

平成 27 年度 統一テスト

<問題冊子>

大問 1 (数学①) 大問 2 (数学②) 大問 3 (数学③)
大問 4 (物理学①) 大問 5 (物理学②)
大問 6 (化学①) 大問 7 (化学②) 大問 8 (化学③)

試験時間 13:30～16:00

＊解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません＊

【問題を選択する際の注意】

1. 以下の問題選択ルールに従い、大問 8 問のうち 5 問に解答すること.
 - a) 大問 1 (数学①) は全員必ず解答すること.
 - b) 数学、物理学、化学の 3 科目からそれぞれ 1 問は解答すること.
 - c) 化学を 3 問とも選択することはできない.

2. したがって、解答パターンは下記の 4 つのみとなる.

数学 3 問－物理学 1 問－化学 1 問

数学 2 問－物理学 2 問－化学 1 問

数学 2 問－物理学 1 問－化学 2 問

数学 1 問－物理学 2 問－化学 2 問

【解答する際の注意】

1. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚 (裏面もあり) を用いること.
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること (マーク式のみの大問もあり).
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は、問題文の ア , イ , . . . にあてはまるものを該当する解答群 (選択肢) から選び、選択肢の番号①, ② . . . で答えること. 同じ選択肢が複数回あてはまることもある.
4. 問題に関する質問は、汚損で読めない等以外は原則認めない.

大問 1 (数学①) 必答問題

空間の温度分布や大気中の圧力分布などはスカラー場で表され、液体や気体の流れによる物質の移動、物体中の熱の移動、荷電粒子の周辺につくられる電場、荷電粒子が運動することにつくられる磁場などはベクトル場で表される。本問では、ある物体内の温度分布と熱の移動を考える。与えられる温度場（温度分布を表すスカラー場）が定常である（熱の移動はあるが各点の温度の時間変化が無い）と仮定し、以下の各問に答えなさい。ただし、温度の単位を℃、長さの単位を m とする。

(1) z 方向には一様な温度場が、 $T(x, y) = 3(x-2)^2 + (y-1)^2$ で与えられている。

(i) 関数 $T(x, y)$ が極値をとるかどうかについて、以下のように調べなさい。

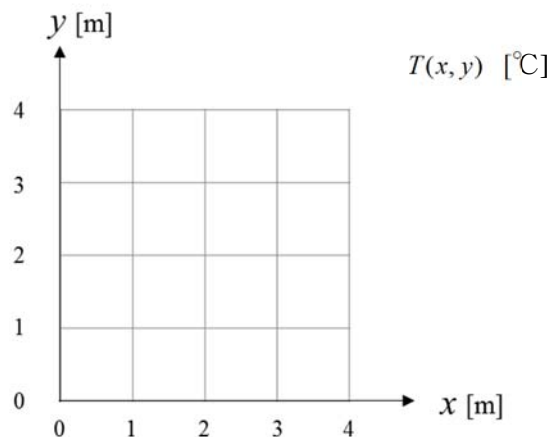
$\partial T / \partial x = 0$ となる点の座標は(,)である。また、 $\partial T / \partial y = 0$ となる点の座標は(,)である。

したがって、両方を満たす点の座標は(,)となる。

この点において、 $\partial^2 T / \partial x^2 =$, $\partial^2 T / \partial y^2 =$, $\partial^2 T / \partial x \partial y =$ であるため、判別式の符号により極値をとることがわかり、かつ $\partial^2 T / \partial x^2$ 0 なので、この点は となり、その点での関数値は $T =$ である。

- | | | | | |
|-----------|-----------|-------|-------|------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 |
| ⑥ 5 | ⑦ 6 | ⑧ 7 | ⑨ 8 | ⑩ 9 |
| ⑪ < | ⑫ > | ⑬ = | ⑭ - | ⑮ + |
| ⑯ 任意の x | ⑰ 任意の y | ⑱ 極小点 | ⑲ 極大点 | ⑳ 鞍点 |

(ii) 物体内の温度分布の概略を領域 $\{0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ で図示しなさい。解答用紙裏面の記述欄 1 に、下図のような xy 座標と格子を描き、各格子点上に温度を書きなさい。さらに、同じ xy 面上に等温線の概略を描きなさい。



- (2) 任意の2点間で温度差があると熱の移動が生じる．熱の移動において，単位時間に単位面積を通過する熱量を熱流束と呼ぶ．物体内の温度差によって熱が移動する（この現象を熱伝導という）場合，熱流束 $\vec{q}$ は温度差（温度勾配）に比例し，次式で表わされる．

$$\vec{q} = -k \text{ grad} T$$

ここで， k は熱伝導率と呼ばれる係数で，単位は $\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ である．また，熱流束の単位は W/m^2 である．次の各問に答えなさい．

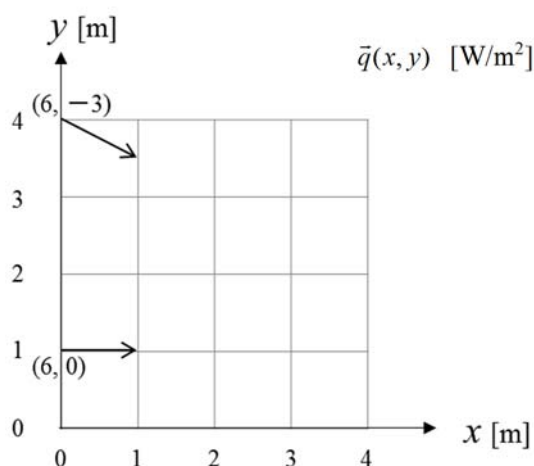
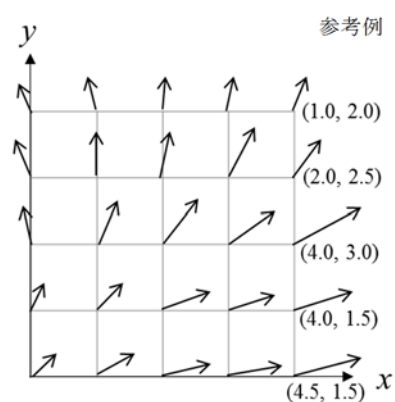
- (i) 熱伝導率を $0.5 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ として前問(1)の温度場 $T(x, y)$ が与えられたときの熱流束場 $\vec{q}(x, y)$ を求め，解答用紙裏面の記述欄2に解答しなさい．

- (ii) 流れ場などのベクトル場は，右図の参考例のように大きさと向きを示す矢印を用いて視覚的に表わすことが多い．

右図を参考に，上の小問(i)で求めた熱流束場を，領域 $\{0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ で，下記の指示に従って図示しなさい．

下図には，例として2つの格子点 $(0, 1)$ と $(0, 4)$ における熱流束 $\vec{q}$ を示してある．解答用紙裏面の記述欄2に書いた小問(i)の解答の下に，下図のよ

うな xy 座標と格子を描き，各格子点における熱流束を表わす矢印を参考例にならって図示しなさい．加えて， $x=4$ 上の格子点には成分も書きなさい．なお，矢印は相対的な大きさがわかる程度に描かれていればよい．

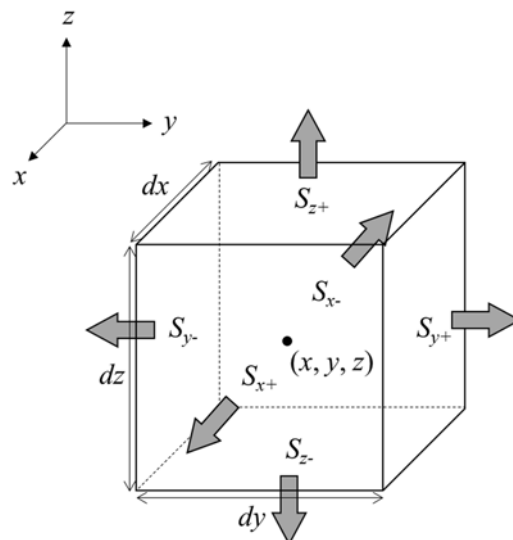


- (3) 熱流束 $\vec{q}$ は熱の移動を表すベクトル場である．ベクトル場が流れを表す場合，ベクトル場の発散とは単位体積あたりの正味の流出量であることに基づき，ベクトル場の発散を求める式を考える．

- (i) 一般のベクトル場 $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ の発散 $\text{div } \vec{A}$ は $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ で与えられること

を以下の手順で導出しなさい．

ベクトル場 $\vec{A}$ における有界領域（ある空間領域）からの正味の流出量は， $\vec{A}$ で表される速度で移動する物質や熱などが，その領域を囲む面 S を通して単位時間に流出した量の総和であり，ベクトル場 $\vec{A}$ の S 上での面積分 $\iint_S \vec{n} \cdot \vec{A} dS$ で与えられる．ここで $\vec{n}$ は，面 S の外向きに立てた法線方向の単位ベクトル（単位法線ベクトル）である．



ベクトル場 $\vec{A}$ における微小直方体からの正味の流出量を考える．図に示すように，注目している空間領域を囲む面 S は 6 つの面から成る．各面を通して流出する量（各面上での面積分）の総和が微小直方体からの正味の流出量である．微小直方体を囲む 6 つの面を S_{x-} ， S_{x+} ， S_{y-} ， S_{y+} ， S_{z-} ， S_{z+} とおく．この微小直方体の中心座標は (x, y, z) であり，各辺の長さを dx ， dy ， dz ，その体積を dV とする．各面においては，被積分関数の値は面の中心座標における値で代表されるとする．

まず x 軸に垂直な面を通した流出について考える．

S_{x-} 面の単位法線ベクトルは $\vec{n}_{x-} = (\quad \text{ス} \quad , \quad \text{セ} \quad , \quad \text{ソ} \quad)$ である．

S_{x-} 面における $\vec{A}$ が面の中心座標 $(x-dx/2, y, z)$ における関数値で代表されるとしているので，

$$\begin{aligned} \text{「} S_{x-} \text{ 面を通して流出する量」} &= \iint_{S_{x-}} \vec{n}_{x-} \cdot \vec{A}(x-dx/2, y, z) dS_{x-} \\ &= \iint_{S_{x-}} \{ \quad \text{タ} \quad (x-dx/2, y, z) \} dS_{x-} \\ &= \{ \quad \text{タ} \quad (x-dx/2, y, z) \} \iint_{S_{x-}} dS_{x-} \end{aligned}$$

となる．ここで， $\iint_{S_{x-}} dS_{x-}$ は S_{x-} 面の面積なので チ と表わされるため，

$$\text{「} S_{x-} \text{面を通して流出する量」} = \{ \text{タ} (x-dx/2, y, z) \} \text{チ}$$

となる．

同様にして， S_{x+} 面の単位法線ベクトルは $\vec{n}_{x+} = (\text{ツ} , \text{テ} , \text{ト})$ であり， S_{x+} 面の中心座標は $(\text{ナ} , \text{ニ} , \text{ヌ})$ と表わされるため，

$$\text{「} S_{x+} \text{面を通して流出する量」} = \{ \text{ネ} (\text{ナ} , \text{ニ} , \text{ヌ}) \} \text{チ}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \text{「微小直方体からの } x \text{ 方向の正味の流出量」} \\ &= \text{「} S_{x-} \text{面を通して流出する量」} + \text{「} S_{x+} \text{面を通して流出する量」} \\ &= \{ \text{タ} (x-dx/2, y, z) + \text{ネ} (\text{ナ} , \text{ニ} , \text{ヌ}) \} \text{チ} \end{aligned}$$

となる．ここで， $\{ \text{タ} (x-dx/2, y, z) + \text{ネ} (\text{ナ} , \text{ニ} , \text{ヌ}) \}$ は， x が $x-dx/2$ から ノ まで変化する間の A_x の増加分であり，これはベクトル $\vec{A}$ の x 方向の変化率に x の増分を乗じたものに等しいため，

$$\text{タ} (x-dx/2, y, z) + \text{ネ} (\text{ナ} , \text{ニ} , \text{ヌ}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx$$

となり，

$$\text{「微小直方体からの } x \text{ 方向の正味の流出量」} = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV$$

となる． y 方向， z 方向にも同様に考えることができるため，

$$\text{「微小直方体からの正味の流出量」} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV$$

となる．

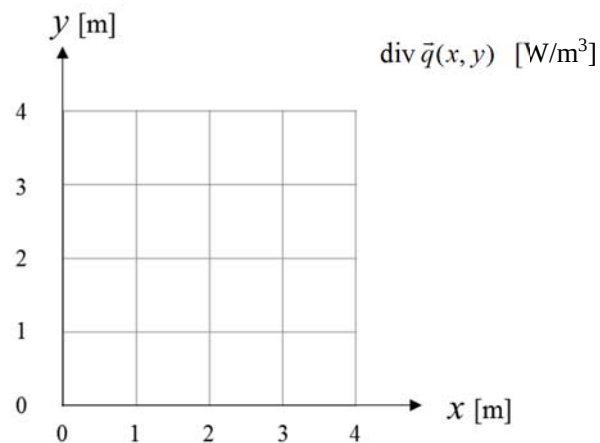
ここで，発散は単位体積あたりの正味の流出量のことなので，以上のことから，

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

が導かれる．

- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| ① x | ② y | ③ z | ④ $x-dx/2$ |
| ⑤ $x+dx/2$ | ⑥ $y-dy/2$ | ⑦ $y+dy/2$ | ⑧ $z-dz/2$ |
| ⑨ $z+dz/2$ | ⑩ $dx dy$ | ⑪ $dy dz$ | ⑫ $dz dx$ |
| ⑬ $+A_x$ | ⑭ $-A_x$ | ⑮ $+A_y$ | ⑯ $-A_y$ |
| ⑰ $+1$ | ⑱ -1 | ⑲ 0 | |

- (ii) 前問(2)で得られた熱流束 $\vec{q}$ の発散 $\text{div } \vec{q}(x, y)$ を求め、領域 $\{0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ で図示しなさい。解答用紙裏面の記述欄 3 に、下図のような xy 座標と格子を描き、各格子点上に発散の値を書きなさい。



例えば座標(2, 2)においては、単位体積あたり、大きさ ハ W/m^3 の熱の ヒ がある。

- | | |
|------------|------------|
| ① 流出（湧き出し） | ② 流入（吸い込み） |
| ③ 0 | ④ 1 |
| ⑤ 2 | ⑥ 3 |
| ⑦ 4 | ⑧ 5 |
| ⑨ 6 | ⑩ 7 |
| ⑪ 8 | ⑫ 9 |

大問2（数学②）

次の各問に答えなさい。なお、問題文の ア，イ…の中には、通常の式で不要な「+」や「1」，「0」などがあてはまることがある。その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること。特に「0」を選ぶと「+」「-」選択の任意性が生ずることがあるが、その場合は「+」「-」のどちらを選んでもよい。

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とする。

A の行列式の値は ア であり、逆行列は $A^{-1} = \text{イ} \begin{bmatrix} \text{ウ} & \text{エ} & \text{オ} \\ \text{カ} & \text{キ} & \text{ク} \\ \text{ケ} & \text{コ} & -1 \end{bmatrix}$ である。

ア ～ コ の解答群				
① -2	② $-\frac{3}{2}$	③ -1	④ $-\frac{1}{2}$	⑤ $-\frac{1}{3}$
⑥ 0	⑦ $\frac{1}{3}$	⑧ $\frac{1}{2}$	⑨ 1	⑩ $\frac{3}{2}$
⑪ 2	⑫ 3			

(2) $B = \begin{bmatrix} 4 & k & 3 \\ 2 & k & 1 \\ -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする. ただし, k はある実数とする.

(i) $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解をもつためには, $k = \boxed{\text{サ}}$ でなければならない.

(ii) $B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が解をもつためには, $p = \boxed{\text{シ}}$ でなければならない.

ただし, k は小問 (i) で求めた値をとるものとする.

サ	シ	の解答群 _____		
① -4	② -3	③ -2	④ -1	⑤ 0
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	⑩ 5

(3) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする. C の固有値を λ とすると, 固有方程式は,

λ^3 スセ λ^2 ソタ λ チツ $=0$ であり, したがって固有値の組は テ と求められる. また独立な固有ベクトルの組はたとえば, ト, ナ, ニ であり, こ

れらをならべた行列 $T = \begin{bmatrix} \text{ト} & \text{ナ} & \text{ニ} \end{bmatrix}$ を用いる変数変換, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ により,

2 次形式 $-2xz + y^2$ の標準形は, $-2xz + y^2 =$ ヌネ X^2 ノハ Y^2 ヒフ Z^2 のように得られる.

ス ソ チ ヌ ノ ヒ の解答群 _____

- ① + ② -

セ タ ツ ネ ハ フ の解答群 _____

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0

テ の解答群 _____

- ① 1, 0, -1 ② 2, 0, -2 ③ 2, 0, -1
④ 2, 1, 0 ⑤ 1, 0, 0(重複) ⑥ 1, 1(重複), 0
⑦ 1, 1(重複), -1 ⑧ 1, -1, -1(重複) ⑨ 0, -1, -1(重複)

ト ナ ニ の解答群 _____

解答は, 以下から 3 個を選び, 番号の若い順にト, ナ, ニ にあてはめなさい.

- ① $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ⑤ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$
⑥ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ⑦ $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ ⑩ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

大問3 (数学 ③)

次の各問に答えなさい。なお、答の ア , イ … の中には、通常の様式で不要な「+」や「1」,「0」などがあてはまることもある。その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること。特に「0」を選ぶと「+」「-」選択の任意性が生ずることがあるが、その場合は「+」「-」のどちらを選んでもよい。

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin 2x}$ を求めなさい。

答 ア

ア の解答群 _____

① -2	② $-\frac{3}{2}$	③ -1	④ $-\frac{1}{2}$	⑤ 0
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ 1	⑧ $\frac{3}{2}$	⑨ 2	⑩ 3

- (2) $(1+x)\log(1+x)$ を $x=0$ のまわりで3次までテイラー展開しなさい。ただし、係数は既約分数で表わしなさい。また、係数が0の場合は $\frac{0}{1}$ で答え、係数が1の場合は $\frac{1}{1}$ で答えなさい。なお、 $x=a$ のまわりで関数 $f(x)$ のテイラー級数は、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ で与えられる。

答 イ ウ エ オ カ キ x ク ケ コ x^2 サ シ ス x^3

イ オ ク サ の解答群 _____

① + ② -

ウ エ カ キ ケ コ シ ス の解答群 _____

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

(3) 不定積分 $\int 2x \log(x^2 + 2) dx$ を求めなさい.

答 セ $\log(x^2 + 2)$ ソ タ $+ C$ (C は定数)

セ の解答群 _____

- ① 2 ② $2x$ ③ $-4x$ ④ $4x^2$ ⑤ $-(x^2 + 2)$
 ⑥ $(-x^2 + 2)$ ⑦ $(x^2 - 2)$ ⑧ $(x^2 + 2)$ ⑨ $-(x^2 + 4)$ ⑩ $(-x^2 + 4)$
 ⑪ $(x^2 - 4)$ ⑫ $(x^2 + 4)$
-

ソ の解答群 _____

- ① $+$ ② $-$
-

タ の解答群 _____

- ① $\frac{1}{2}x^4$ ② x^2 ③ x
 ④ $\frac{4x^2}{x^2 + 2}$ ⑤ $4 \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ ⑥ $4x - 4 \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
 ⑦ $(x^4 - 2x^2)$ ⑧ $(x^4 + 2x^2)$ ⑨ $(x^2 - 2x)$
 ⑩ $(x^2 + 2x)$
-

(4) 重積分 $I = \iint_K y^2 dx dy$ が累次積分 $\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x y^2 dy$ で求められるとする. 次の各問に答えなさい.

(i) この領域 K を $x-y$ 平面に図示しなさい. 答は解答用紙裏面の記述欄 1 に描きなさい.

(ii) 積分 $\int_{\frac{x^2}{2}}^x y^2 dy$ を求めなさい.

答 $\frac{1}{\boxed{\text{チ}}} \left(\boxed{\text{ツ}} - \frac{\boxed{\text{テ}}}{8} \right)$

(iii) I の値を求めなさい.

答 $\boxed{\text{ト}}$

$\boxed{\text{チ}}$ $\boxed{\text{ツ}}$ $\boxed{\text{テ}}$ の解答群 _____

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| ⑥ 6 | ⑦ 7 | ⑧ 8 | ⑨ 9 | ⑩ 10 |
| ⑪ x | ⑫ x^2 | ⑬ x^3 | ⑭ x^4 | ⑮ x^5 |
| ⑯ x^6 | ⑰ x^7 | ⑱ x^8 | ⑲ x^9 | ⑳ x^{10} |

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群 _____

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| ① 0 | ② $-\frac{1}{21}$ | ③ $\frac{2}{21}$ | ④ $\frac{4}{21}$ | ⑤ $\frac{5}{21}$ |
| ⑥ $-\frac{2}{15}$ | ⑦ $\frac{4}{15}$ | ⑧ $\frac{7}{15}$ | ⑨ $-\frac{8}{15}$ | ⑩ $\frac{1}{7}$ |
| ⑪ $\frac{2}{7}$ | ⑫ $-\frac{3}{7}$ | ⑬ $\frac{4}{7}$ | ⑭ $\frac{1}{5}$ | ⑮ $-\frac{2}{5}$ |
| ⑯ $\frac{3}{5}$ | ⑰ $-\frac{4}{5}$ | ⑱ $\frac{1}{3}$ | ⑲ $-\frac{2}{3}$ | ⑳ 1 |

大問4 (物理学 ①)

長さ l の軽い剛体棒の一端 A と他端 B のそれぞれに、質量 m の質点と質量 $2m$ の質点を固定した物体を考える。図 1 に示すように、この物体が滑らかな水平面 (xy 平面) の上に置かれており、A の位置は $(0,0)$ 、B の位置は $(l,0)$ であった。時刻 $t=0$ に B の質点に撃力を加えたところ、この質点は y 軸の正方向に速さ v_0 で動き出し、A の質点の速度はゼロであった。撃力を加えた後 ($t>0$) の物体の運動を解析したい。

物体の重心 G の座標を (X,Y) 、A の座標を (x_A, y_A) 、B の座標を (x_B, y_B) とする。また、図 2 のように $\overrightarrow{AB}$ と x 軸のなす角を ϕ とし、重心 G から A までの距離を a 、G から B までの距離を b とすると、次の関係が成立する。

$$x_A = X - a \cos \phi, \quad y_A = Y - a \sin \phi, \quad x_B = X + b \cos \phi, \quad y_B = Y + b \sin \phi.$$

以下の設問に答えよ。

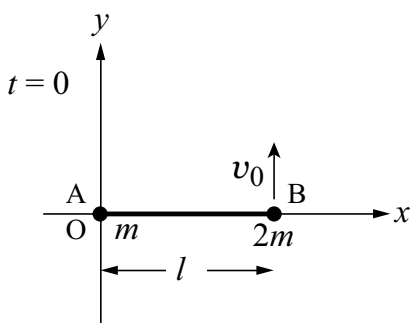


図 1

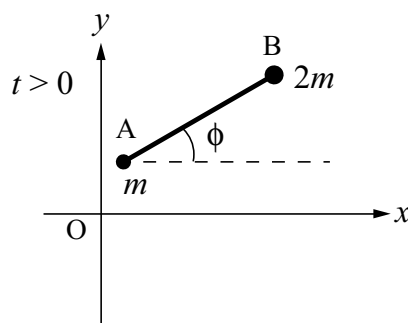


図 2

- (1) 物体の重心 G から A までの距離 a と G から B までの距離 b は、

$$a = \boxed{\text{ア}}, \quad b = \boxed{\text{イ}}$$

で与えられる。

ア と イ の解答群				
① 0	② l	③ $l/2$	④ $l/3$	⑤ $2l/3$
⑥ $l/4$	⑦ $3l/4$	⑧ $l/6$	⑨ $5l/6$	

- (2) 時間 t に関する微分をドット記号で表す（たとえば dX/dt を $\dot{X}$ と表す）ことにすると、物体の運動量の x 成分 P_x 、 y 成分 P_y を次のように表すことができる。

$$P_x = \boxed{\text{ウ}} \dot{X}, \quad P_y = \boxed{\text{エ}} \dot{Y}.$$

また、図 2 において、紙面に垂直で、紙面の裏側から表側へ向かう向きに z 軸をとると、原点 O に関する物体の角運動量の z 成分 L は次のように表される。

$$L = \boxed{\text{オ}} (a^2 + \boxed{\text{カ}}) \dot{\phi} - \boxed{\text{キ}} (\boxed{\text{ク}} \dot{X} - \boxed{\text{ケ}} \dot{Y}).$$

$\boxed{\text{ウ}} \sim \boxed{\text{ケ}}$ の解答群

① 0	② m	③ $2m$	④ $3m$	⑤ a
⑥ b	⑦ l	⑧ X	⑨ Y	⑩ b^2
⑪ $2b^2$	⑫ $3b^2$	⑬ l^2	⑭ $2l^2$	⑮ $3l^2$

- (3) 保存則を利用すると $\dot{X}$ 、 $\dot{Y}$ 、 $\dot{\phi}$ を求めることができ、次の結果を得る。

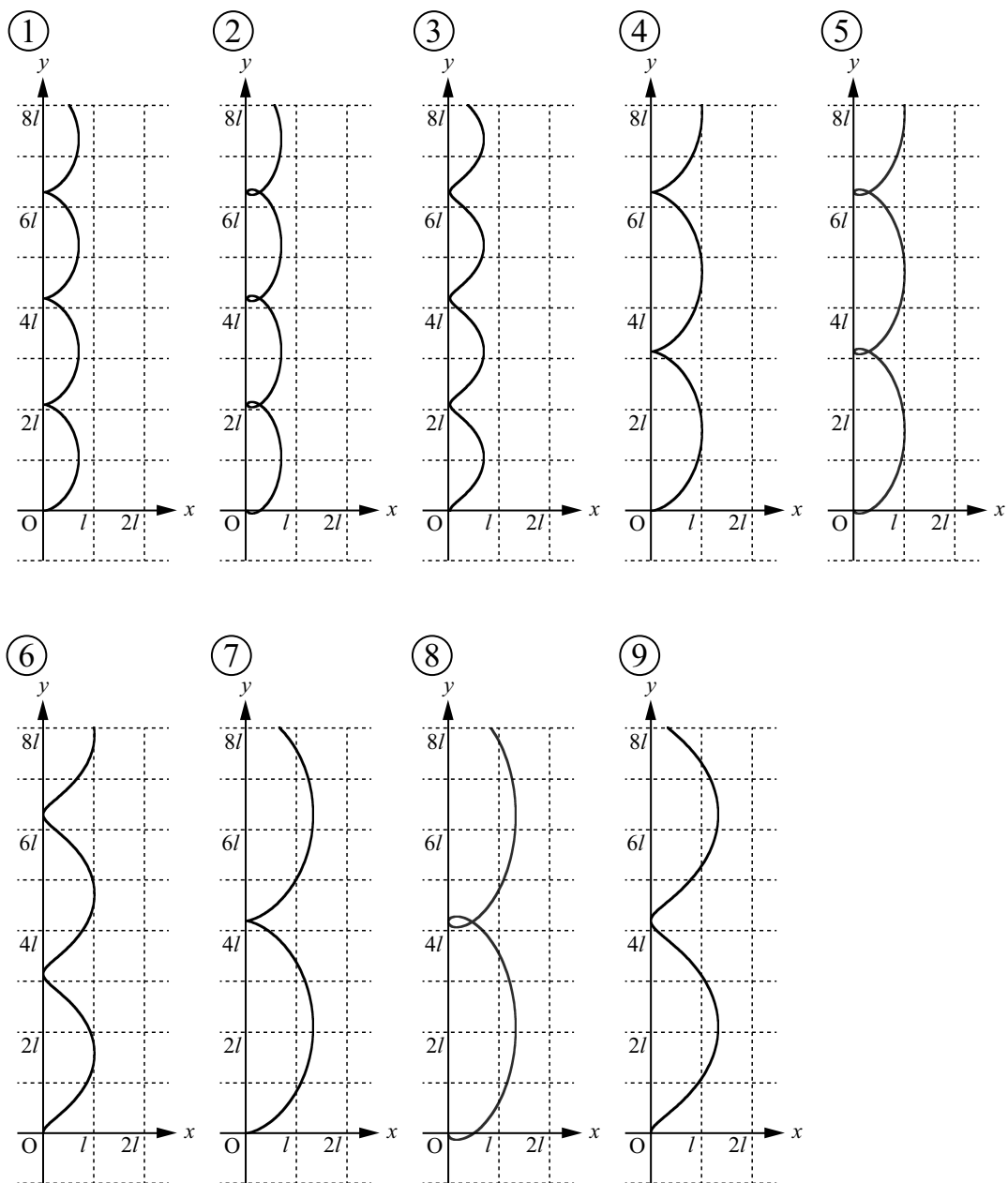
$$\dot{X} = \boxed{\text{コ}}, \quad \dot{Y} = \boxed{\text{サ}}, \quad l\dot{\phi} = \boxed{\text{シ}}.$$

また、この結果を用いて棒の A 端の座標 (x_A, y_A) を求め、A 端の速さの最大値を計算すると $\boxed{\text{ス}}$ となる。

$\boxed{\text{コ}} \sim \boxed{\text{ス}}$ の解答群

① 0	② v_0	③ $-v_0$	④ $v_0/2$	⑤ $-v_0/2$
⑥ $3v_0/2$	⑦ $-3v_0/2$	⑧ $2v_0$	⑨ $-2v_0$	⑩ $v_0/3$
⑪ $-v_0/3$	⑫ $2v_0/3$	⑬ $-2v_0/3$	⑭ $4v_0/3$	⑮ $-4v_0/3$
⑯ $5v_0/3$	⑰ $-5v_0/3$	⑱ $3v_0$	⑲ $-3v_0$	

(4) 棒の A 端の軌跡を表す図として最も適切なものを、次の ①～⑨ のうちから一つ選べ。 **セ**



大問 5 (物理学②)

半径 r 、質量 m の球形のおもりの運動について下記の問に答えよ。以下では重力加速度を g とし、おもりが油から受ける浮力はおもりに働く重力に比べて十分小さく無視できるものとする。またバネの質量も十分小さく無視できるものとする。

- (1) おもりを図 1 のように油の入った容器の中で静かに放したところ、おもりの沈下する速度はすぐに一定値 v_0 になった。このとき、おもりの半径と質量が分っているので、油の粘性率 η は v_0 によって ア と表せる。ここで、おもりはストークスの抵抗を受けるとする。

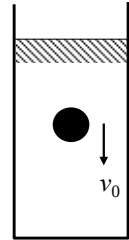


図 1

アの選択肢

- ① $\frac{r^2 mg}{6\pi v_0}$ ② $\frac{rmg}{6\pi v_0}$ ③ $\frac{mg}{6\pi v_0}$ ④ $\frac{mg}{6\pi r v_0}$ ⑤ $\frac{mg}{6\pi r^2 v_0}$ ⑥ $\frac{mg}{6\pi r^3 v_0}$
- ⑦ $\frac{r^2 mg}{6\pi v_0^2}$ ⑧ $\frac{rmg}{6\pi v_0^2}$ ⑨ $\frac{mg}{6\pi v_0^2}$ ⑩ $\frac{mg}{6\pi r v_0^2}$ ⑪ $\frac{mg}{6\pi r^2 v_0^2}$ ⑫ $\frac{mg}{6\pi r^3 v_0^2}$

- (2) バネ定数 k 、自然長 l_0 のバネの一端を図 2 のように天井に固定し、他端におもりをつけて大気中で鉛直にぶら下げた。おもりが静止したときのバネの伸びを a とする。このとき、このバネのバネ定数 k は イ であり、この系の角振動数 ω_0 は ウ である。

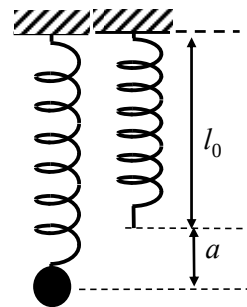


図 2

イ、ウ の選択肢

- ① $\frac{a}{m}$ ② $\sqrt{\frac{a}{m}}$ ③ $\frac{m}{a}$ ④ $\sqrt{\frac{m}{a}}$ ⑤ $\sqrt{\frac{a}{mg}}$ ⑥ $\sqrt{\frac{mg}{a}}$
- ⑦ $\frac{a}{mgl_0}$ ⑧ $\frac{a}{mg}$ ⑨ mga ⑩ $\frac{mg}{a}$ ⑪ $\frac{mgl_0}{a}$ ⑫ $\frac{mga}{l_0}$
- ⑬ $\frac{a}{g}$ ⑭ $\sqrt{\frac{a}{g}}$ ⑮ $\frac{g}{a}$ ⑯ $\sqrt{\frac{g}{a}}$

- (3) 次に小問(2)のバネに図3のようにおもりをつけて、小問(1)の油を入れた容器に図のように沈めた。油の中でおもりが静止した平衡位置から、おもりを下にわずかに引っ張って静かに放したところ、おもりは油の中から出ることなく、平衡位置のまわりで減衰振動し、かつ、バネが伸びた場合でもバネ自体は油の中に入ることにはなかった。また、おもりが受ける運動の抵抗は油の粘性によるストークスの抵抗のみとする。

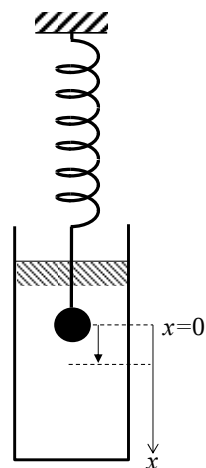


図3

このとき、図3のように平衡の位置を基準とするおもりの変位を x として、以下の各問(i)～(iv)に答えよ。ただし、小問(1)の油の粘性率 η 、小問(2)のバネ定数 k と角振動数 ω_0 は、解答のプロセスにおいて用いても構わないが、解答の選択肢には含まれないので注意すること。選択肢中の v_0 , a は、それぞれ小問(1)および小問(2)で与えられたものである。

- (i) おもりの運動方程式は、定数 m , k , h を用いて次式で表される。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - h \quad \boxed{\text{エ}}$$

ただし、 $h = \boxed{\text{オ}}$ である。

- (ii) 前問(i)で得られた方程式から、おもりの振動の角振動数を求める。

この方程式は2階の常微分方程式である。本問(3)の題意より、おもりの運動は油の粘性による抵抗が $\boxed{\text{カ}}$ 減衰振動であるとしてよい。この場合の一般解を表す式は複数あるが、例えば次式のように整理することができる。

$$x = A \cdot \exp(-\boxed{\text{キ}} t) \cdot \sin(\boxed{\text{ク}} t + \delta)$$

ここで、 A および δ は初期条件で決まる定数である。これより、おもりの振動の角振動数は $\boxed{\text{ク}}$ である。

エ～クの選択肢

- ①強い ②弱い ③ x ④ x^2 ⑤ $\frac{dx}{dt}$ ⑥ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ⑦ $\sqrt{\left(\frac{mg}{a^2}\right) - \left(\frac{mg}{2v_0 a}\right)^2}$
- ⑧ $\sqrt{\left(\frac{mg}{a}\right) - \left(\frac{g}{2v_0}\right)^2}$ ⑨ $\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right) - \left(\frac{g}{2v_0}\right)^2}$ ⑩ $\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)^2 - \left(\frac{g}{2v_0}\right)}$ ⑪ $\sqrt{\left(\frac{mg}{a^2}\right) - \left(\frac{mg}{2v_0}\right)}$
- ⑫ $\frac{mg}{v_0}$ ⑬ $\frac{mg}{v_0^2}$ ⑭ $\frac{mg}{2v_0}$ ⑮ $\frac{mg}{2v_0^2}$ ⑯ $\frac{g}{v_0}$ ⑰ $\frac{g}{v_0^2}$ ⑱ $\frac{g}{2v_0}$ ⑲ $\frac{g}{2v_0^2}$

(iii) この減衰振動において、振動の振幅が最初の振幅の $1/2$ になるまでの時間は ケ である。

(iv) 図 4 のように減衰振動において、変位 x の n 回目の極値 x_n と、それに続く同じ符号の極値 x_{n+2} の比 (x_n/x_{n+2}) の自然対数を対数減衰率という。

極値 x_n, x_{n+2} を与える時刻を t_n, t_{n+2} とおき、本問(3)においては、

$$\text{ク} (t_{n+2} - t_n) = \text{コ}$$

となることを利用すると、対数減衰率は、

サ と求められる。

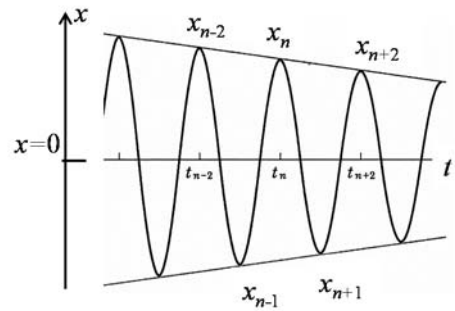


図 4

ケ～サ の選択肢

- ① $-\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ $n\pi$ ⑥ $\frac{v_0 \ln 2}{2g}$ ⑦ $\frac{2v_0 \ln 2}{g}$ ⑧ $\frac{v_0}{2g}$
- ⑨ $\frac{v_0}{g \ln 2}$ ⑩ $\frac{v_0}{2g \ln 2}$ ⑪ $\frac{2\pi}{\sqrt{v_0^2 - ag}}$ ⑫ $\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{ag}\right) - \frac{1}{4}}}$ ⑬ $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{v_0^2}{ag}}}$ ⑭ $\frac{\pi}{\sqrt{v_0^2 - \frac{1}{4}}}$
- ⑮ $\sqrt{v_0^2 - ag}$ ⑯ $2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{ag}\right) - \frac{1}{4}}$ ⑰ $\sqrt{\frac{v_0^2}{ag}}$ ⑱ $2\sqrt{v_0^2 - \frac{1}{4}}$

- (4) 問(3)の油を別の油に入れ替えて、同じようにおもりを油の中に沈め、その平衡位置から下にわずかに引っ張って静かにおもりを放した。このとき、おもりが問(3)のように振動せずに平衡位置に静かに停止するための条件は v_0 シ ス である。これより、おもりが振動することなく平衡位置に静かに停止するために必要な油の粘性率の最小値は セ である。

シ の選択肢

① $=$ ② $\leq$ ③ $\geq$

ス、セ の選択肢

① $\sqrt{\frac{g}{a}}$ ② $\sqrt{\frac{g}{4a}}$ ③ $\frac{m}{2\pi r} \sqrt{\frac{g}{a}}$ ④ $\frac{m}{3\pi r} \sqrt{\frac{g}{a}}$ ⑤ $\frac{m}{6\pi r} \sqrt{\frac{g}{a}}$ ⑥ $\frac{2m}{\pi r^2} \sqrt{ag}$
 ⑦ $\frac{m}{\pi r^2} \sqrt{ag}$ ⑧ $\frac{m}{3\pi r^2} \sqrt{ag}$ ⑨ $\frac{\pi r}{3m} \sqrt{ag}$ ⑩ $\frac{\pi r}{2m} \sqrt{ag}$ ⑪ $\frac{\sqrt{ag}}{2}$ ⑫ $\sqrt{ag}$
 ⑬ $2\sqrt{ag}$ ⑭ $\sqrt{\frac{a}{4g}}$ ⑮ $\sqrt{\frac{a}{g}}$ ⑯ $2\sqrt{\frac{a}{g}}$ ⑰ $\frac{\sqrt{ag}}{2m}$ ⑱ $\frac{\sqrt{ag}}{m}$ ⑲ $\frac{2\sqrt{ag}}{m}$

大問 6 (化学①)

必要があれば，以下の物理定数値を使うこと．

プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$ 電子の質量 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

電子の電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 真空中の光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

(1) 以下の文章を読み，以下の設問 (i), (ii), (iii), (iv) に答えよ．

物質が発する光を分光器で見ると，それぞれ物質に特有のスペクトルが見られる．このうち，線スペクトルと言われるものはその物質の原子が射出するものである．この線スペクトルは原子に特有な配列をもっているので，原子の構造をうかがう最も直接的なデータである．a 図 1 は，水素原子の可視部の発光スペクトルの例である．

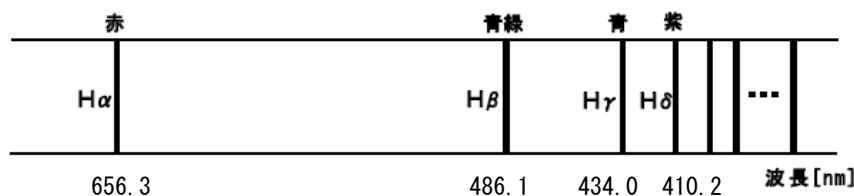


図 1：水素発光スペクトル

このように，原子から射出される光のエネルギーが連続ではなく，とびとびになっている．これは，b 電子が波動の性質をもつため，原子核のまわりをまわる電子のエネルギーが **ア** されるからである．例えば，水素原子の電子エネルギーは，**イ** n を用いて，以下のように表される．

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ [eV]}$$

この **ア** された異なるエネルギーレベルの間を電子が遷移するときに射出される光が，線スペクトルとなる．

(i) 上記文章の空欄 **ア** と **イ** に当てはまる語句として最も適当なものを，下の①～⑥のうちから一つずつ選べ．

- | | | |
|--------|-------|-------|
| ① イオン化 | ② 整数 | ③ 自然数 |
| ④ 実数 | ⑤ 量子化 | ⑥ 構造化 |

(ii) 下線部 a で、図の水素原子の一群のスペクトルを何と呼ぶか。適当なものを、次の①～⑤から一つ選べ。 **ウ**

- ① ライマン系列 ② バルマー系列 ③ パッシェン系列
④ ブラケット系列 ⑤ プント系列

(iii) 下線部 b で、誘電率 ϵ_0 の真空中、電位差 E [V] の間を、質量 m 、素電荷の大きさ e の電子を加速させた。電子の波長 λ を求める式として、最も適当なものを、次の①～⑥から一つ選べ。 **エ**

- ① $\lambda = \frac{eh}{\sqrt{2mE}}$ ② $\lambda = \frac{\sqrt{2mE}}{eh}$ ③ $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meE}}$
④ $\lambda = \frac{\sqrt{2meE}}{h}$ ⑤ $\lambda = \frac{\epsilon_0 h}{\sqrt{2meE}}$ ⑥ $\lambda = \frac{\sqrt{2meE}}{\epsilon_0 h}$

(iv) 図の水素原子の発光スペクトルで、最長波長の H_α 線は、どの 2 つの電子エネルギー準位間 (n_1, n_2) の遷移によるものか。最も適当な n_1 と n_2 の組み合わせを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。 **オ**

- ① (1, 2) ② (1, 3) ③ (2, 3)
④ (2, 4) ⑤ (3, 4) ⑥ (4, 5)

(2) 水素類似原子の波動関数と量子状態に関連する以下の記述には正しいものが 2 つある。最も適切な組み合わせを、下の①～⑥のうちから一つ選べ。 **カ**

- ① 波動関数の振幅の 2 乗は、電子の密度分布に比例する
② 軌道のエネルギーの大きさは、原子番号の 2 乗に比例する
③ ボア半径は、水素原子での電子の原子核からの距離の期待値である
④ 2s 軌道の波動関数では、動径部分の節の数は 1 つである

- ① ①と② ② ①と③ ③ ①と④
④ ②と③ ⑤ ②と④ ⑥ ③と④

(3) 2 原子分子について、以下の設問 (i), (ii), (iii)) に答えよ.

(i) 図 2 は酸素分子の分子軌道の形成とエネルギー準位を示したものである。

キ ~ ケ の分子軌道の形として最も適当なものを、次の①~⑥のうちから一つずつ選べ.

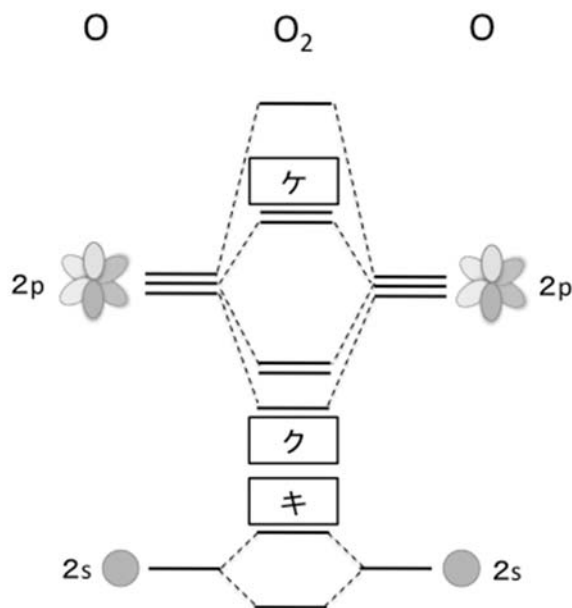
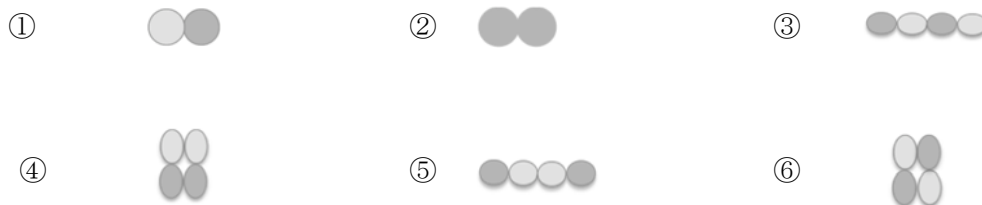


図 2 : 酸素分子の分子軌道の形成とエネルギー準位



(ii) 酸素分子の分子軌道に占める電子数が異なる分子・イオンのなかで、結合次数が 1.5 のものは コ , 結合距離の最も短いものは サ である。また、常磁性でないものは, シ である。

コ ~ シ として最も適当なものを、①~④からそれぞれ一つずつ選べ.



(iii) HF分子の双極子モーメントの実測値は $6.1 \times 10^{-30} \text{ C m}$ である。イオン性が41%であるとき、HF分子の結合距離は何 pm か。最も適当なものを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。 ス pm

① 1.6

② 16

③ 3.8

④ 38

⑤ 93

⑥ 9.3

大問 7 (化学②)

必要があれば，以下を使うこと．

気体定数 $R = 8.31 \text{ J/(mol K)}$ ， $\ln x = 2.303 \log x$ ， $\log 2 = 0.3011$ ， $\log 3 = 0.4771$ ．

(1) 酢酸分子の水溶液中における酸解離反応は，



と書ける．

本反応の熱力学的諸量のうち，298 K において，標準エンタルピー $\Delta H^0 = -0.421 \text{ kJ/mol}$ ，
および 標準エントロピー $\Delta S^0 = -92.5 \text{ J/(mol K)}$ である．

反応の ア 変化 ΔG^0 は，次の関係式，

$$\Delta G^0 = \text{ イ } \quad \cdots \text{式 2)}$$

より，298 K において ウ kJ/mol である．

また，式 1)の平衡定数 K は，

$$K = \frac{\text{ エ }}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} \quad \cdots \text{式 3)}$$

と表される． ΔG^0 と K の間には，オ の関係がある．よって， $K = \text{ カ }$ の解が得られる．

- | | |
|--|---|
| ① 標準 Hermholtz 自由エネルギー | ② 標準ポテンシャルエネルギー |
| ③ 標準 Gibbs 自由エネルギー | |
| ④ ΔH^0 | ⑤ $T\Delta S^0$ |
| ⑥ $\Delta H^0 + \Delta S^0$ | ⑦ $\Delta H^0 - T\Delta S^0$ |
| ⑧ 28.0 | ⑨ 27.6 |
| ⑩ 27.1 | |
| ⑪ $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CH}_3\text{COOH}]$ | ⑫ $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CH}_3\text{COO}^-]$ |
| ⑬ $[\text{H}_2\text{O}][\text{CH}_3\text{COOH}]$ | |
| ⑭ $\Delta G^0 = -R \ln K$ | ⑮ $\Delta G^0 = -RT \ln K$ |
| ⑯ $\Delta G^0 = -\ln K / (RT)$ | |
| ⑰ $10^{-2.00}$ | ⑱ $10^{-9.13}$ |
| ⑲ $10^{-4.76}$ | |

(2) 酢酸の酸解離反応の素反応過程は、次のように表すことができる。



$$(k_1 = 8.0 \times 10^5 \text{ s}^{-1}, \quad k_2 = 4.5 \times 10^{10} \text{ mol}^{-1} \text{ l s}^{-1})$$

正逆反応の速度式は、各々、次のように表される。

$$-\frac{d[\text{CH}_3\text{COOH}]}{dt} = k_1 \boxed{\text{キ}} \quad \dots \text{式 5)}$$

$$\frac{d[\text{CH}_3\text{COOH}]}{dt} = k_2 \boxed{\text{ク}} \quad \dots \text{式 6)}$$

平衡到達時には式 5) と式 6) が等価であるので、

$$k_1 / k_2 = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{キ}}} = \boxed{\text{ケ}} \quad \dots \text{式 7)}$$

となり、問(1)で検討した、酢酸の平衡論的酸解離平衡定数 K と $\boxed{\text{コ}}$ ことが明らかである。

① $[\text{H}^+]$

② $[\text{CH}_3\text{COOH}][\text{H}^+]$

③ $[\text{OH}^-]$

④ $[\text{H}^+][\text{CH}_3\text{COO}^-]$

⑤ $[\text{CH}_3\text{COOH}]$

⑥ $[\text{CH}_3\text{COO}^-]$

⑦ $10^{-2.00}$

⑧ $10^{-4.75}$

⑨ $10^{-9.15}$

⑩ 異なる

⑪ ほぼ等しい

⑫ 比較できない

- (3) 一成分の液相－気相平衡では、液相モル体積 V_l 、気相モル体積 V_g 、気相圧力 P 、温度 T 、および蒸発エンタルピー ΔH とすると、

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{T(V_g - V_l)} \quad \dots \text{式 8)}$$

が成り立つ。この式を サ の式という。

ここで、気相を シ とみなして $V_g =$ ス が成り立つとすれば($n = 1$ モル), $V_g \gg V_l$ の仮定のもとで式 8)を積分して、結局、

$$\ln P = -\frac{\Delta H}{RT} + \text{Constant} \quad \dots \text{式 9)}$$

となる。2 つの異なる温度条件下(T_1 および T_2)の蒸気圧 P_1 および P_2 は、式 9)から得られる最終式、

$$\log \frac{P_2}{P_1} = \frac{-\Delta H}{2.303R} \text{ セ } \quad \dots \text{式 10)}$$

によって表される。

水の蒸発エンタルピーを 40.6 kJ/mol 、および 100°C 沸騰中の水蒸気圧を $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ として計算すれば、 95°C のときの水の蒸気圧に最も近い値は ソ である。

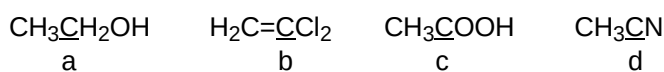
- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ① ルシャトリエ | ② ヘンリー | ③ クラウジウス－クラペイロン |
| ④ 理想気体 | ⑤ 非理想気体 | ⑥ RT ⑦ RT/P |
| ⑧ $T_1 \times T_2$ | ⑨ T_1 / T_2 | ⑩ $\{ (1/T_2) - (1/T_1) \}$ |
| ⑪ $8.5 \times 10^4 \text{ Pa}$ | ⑫ $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ | ⑬ $1.01 \times 10^4 \text{ Pa}$ |

大問 8 (化学③)

- (1) 分子式 $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$ を有する化合物の構造異性体には、エーテル類が ア 種類、カルボニル基を有する化合物が イ 種類ある。アルコール類は ウ 種類あるが、そのうち不安定なエノール構造を有し、相当するカルボニル化合物と互変異性体であるものが エ 種類ある。不斉炭素原子を有する化合物は オ 種類ある。

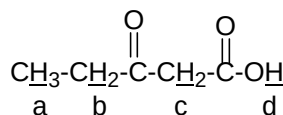
①1 ②2 ③3 ④4 ⑤5

- (2) 下線 a の炭素原子の軌道は カ で、b は キ , c は ク , d は ケ である。



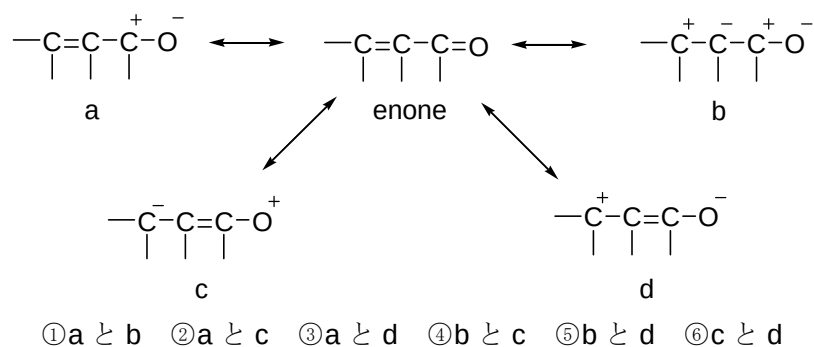
①s 軌道 ②p 軌道 ③sp 混成軌道 ④ sp^2 混成軌道 ⑤ sp^3 混成軌道

- (3) 下線 a～d の水素のうち、酸性度が一番高いのは コ で、次に高いのは サ である。



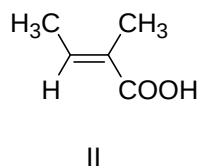
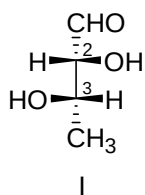
①a ②b ③c ④d

(4) エノン(enone)の共鳴構造 a～d のうち、共鳴への寄与が大きいのは **シ** である。



(5) 化合物Ⅰの2位炭素の絶対配置は **ス** で、3位炭素の絶対配置は **セ** である。

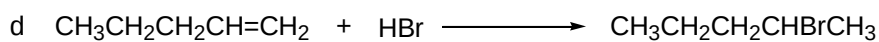
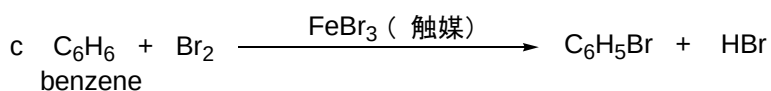
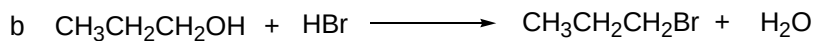
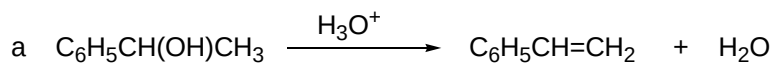
三置換アルケンⅡは **ソ** 体である。



- ① + ② - ③ E ④ R ⑤ S ⑥ Z

(6) 次の各問に答えよ.

(i) 下記反応 a の反応形式は タ で, b は チ, c は ツ, d は テ である.



① 求核付加反応

② 脱離反応

③ 求電子置換反応

④ 求電子付加反応

⑤ 求核置換反応

(ii) 上記反応 d において, 最初のプロトン化は安定なカルボカチオンを生成するように起こるため置換基の少ないほうの炭素に水素がつくことになる. この配向性は ト 則と呼ばれている.

① Zaitsev

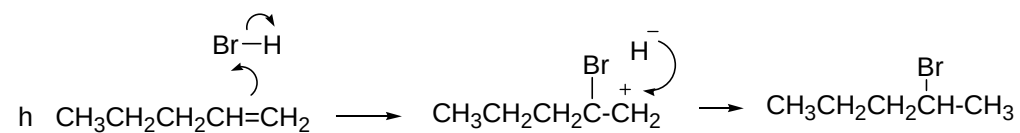
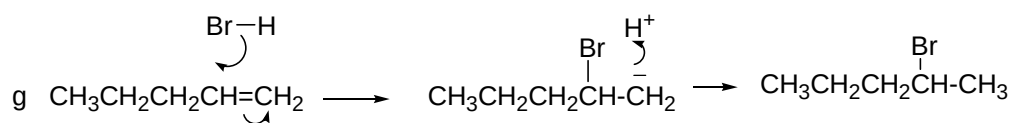
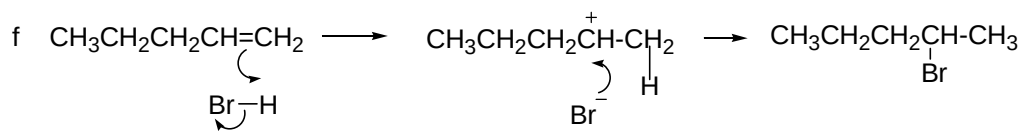
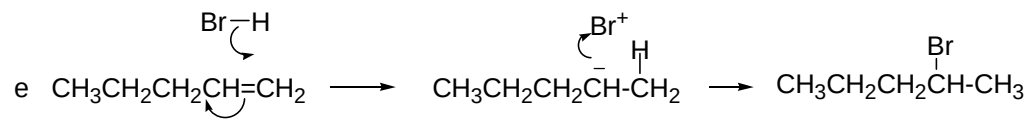
② Hofmann

③ Markovnikov

④ Hammond

⑤ Cahn-Ingold-Prelog

(iii) 上記反応 d について示された電子の流れ図 e~h について正しいものは ナ である。



① e ② f ③ g ④ h

＜試験を終えた学生のみなさんへ＞

統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の 1 年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

＊統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@eng.tohoku.ac.jp