

# 令和 02 年度 統一テスト

(理数基礎学力到達度テスト)

## <問題冊子②> 選択問題

大問 2 (数学②)      大問 3 (数学③)  
大問 4 (物理学①)    大問 5 (物理学②)  
大問 6 (化学①)      大問 7 (化学②)      大問 8 (化学③)

### 試験時間 2 時間

\*解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません\*

#### 【問題を選択する際の注意】

1. 以下の問題選択ルールに従い、大問 7 問のうち 4 問に解答すること。
  - a) 物理学、化学からそれぞれ 1 問は解答すること。
  - b) 化学を 3 問とも選択することはできない。

2. したがって、選択問題の解答パターンは下記の 4 つのみとなる。

数学 2 問－物理学 1 問－化学 1 問

数学 1 問－物理学 2 問－化学 1 問

数学 1 問－物理学 1 問－化学 2 問

数学 0 問－物理学 2 問－化学 2 問

#### 【解答する際の注意】

1. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚 (裏面もあり) を用いること。
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること (マーク式のみの大問もあり)。
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は、問題文の A1, A2, … にあてはまるものを該当する解答群 (選択肢) から選び、選択肢の番号①, ②…で答えること。同じ選択肢が複数回あてはまることもある。
4. 問題に関する質問は、汚損で読めない等以外は原則認めない。

## 大問2 (数学 ②)

次の各問に答えなさい。

1. 連立1次方程式  $Ax=b$ ,  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 11 \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$  ( $\alpha$ : 実数) において,  $\mathbf{R}^4$  の3つのベク

トル  $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$  を列ベクトル表示した4行3列の

(4×3) 行列を  $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$  とする. ここで,  $\text{rank } A$  と  $\text{rank } [A \ | \ b]$  はそれぞれ係数行列と拡大係数行列の階数を表すものとする.

まず最初に,  $Ax=b$  を掃き出し法 (ガウスの消去法) を用いて解き, その基本変形過程を 解答用紙裏面の記述解答欄 1 に 書きなさい. 次に, その結果に基づいて以下の問いに答えなさい.

- (1)  $\text{rank } A$  A1  $\text{rank } [A \ | \ b] = 4$  となるのは  $\alpha \neq$  A2 のときであり, その場合には  $Ax=b$  は A3 .
- (2)  $\text{rank } A$  A4  $\text{rank } [A \ | \ b] = 3$  となるのは  $\alpha =$  A5 のときであり, その場合には  $Ax=b$  は A6 . よって,  $x =$  A7 ,  $y =$  A8 ,  $z =$  A9 となる.
- (3)  $\text{rank } A$  AX  $\text{rank } [A \ | \ b] =$  B1  $< 3$  となるのは  $\alpha =$  B2 のときであり, その場合には  $Ax=b$  は B3 .

**A1** **A3** **A4** **A6** **AX** **B3** の解答群 \_\_\_\_\_

- ①  $>$       ②  $<$       ③  $\in$       ④  $\neq$       ⑤  $\approx$       ⑥  $=$   
⑦ 自明な解を持つ   ⑧ 無数の解を持つ   ⑨ ただ1つの解をもつ   ⑩ 一般解をもつ  
⑪ 解をもたない
- 

**A2** **A5** **A7** **A8** **A9** **B1** **B2** の解答群 ( $t$ : 任意定数) \_\_\_\_\_

- ①  $-6$       ②  $-5$       ③  $-4$       ④  $-3$       ⑤  $-2$       ⑥  $-1$   
⑦  $0$       ⑧  $1$       ⑨  $2$       ⑩  $3$       ⑪  $4$       ⑫  $5$   
⑬  $6$       ⑭  $\pm 2$       ⑮  $\pm 3$       ⑯  $\pm 4$       ⑰  $-t$       ⑱  $t$   
⑲  $1 - t$       ⑳  $1 + t$
-

2. 正則な  $n$  次正方行列  $B$  の行列式 ( $|B|$ ), 逆行列 ( $B^{-1}$ ), 余因子行列 ( $\tilde{B}$ ) および 単位行列 ( $I$ ) については,  $BB^{-1} = I$  と逆行列の公式を導く  $B\tilde{B} (= \tilde{B}B) = |B|I$  が成り立つ. 逆行列と余因子行列の行列式を求めるためにこれら二つの式の両辺の行列式をとると, 前者より  $|B^{-1}| = \boxed{\text{B4}}$  が, 後者においては  $|B\tilde{B}| = ||B|I| = |B|\boxed{\text{B5}}$  となるので  $|\tilde{B}| = \boxed{\text{B6}}$  が得られる. 以下, 次の問いに答えなさい.

$$(1) B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ のとき, } |B| = \boxed{\text{B7}}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{B8}} & \boxed{\text{B9}} & \boxed{\text{BX}} \\ \boxed{\text{C1}} & \boxed{\text{C2}} & \boxed{\text{C3}} \\ \boxed{\text{C4}} & 1 & \boxed{\text{C5}} \end{bmatrix}$$

となる.

$$(2) B = CX^{-1}, C = 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ を満たす行列 } X \text{ は } X = \boxed{\text{C6}} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{C7}} \\ \boxed{\text{C8}} \\ \boxed{\text{C9}} \end{bmatrix}$$

となる.

**B4** **B5** **B6** **C6** の解答群 \_\_\_\_\_

- |                      |                      |               |               |                 |                     |
|----------------------|----------------------|---------------|---------------|-----------------|---------------------|
| ① $ B $              | ② $ B ^2$            | ③ $ B ^{-1}$  | ④ $ B ^{-2}$  | ⑤ $ \tilde{B} $ | ⑥ $ \tilde{B} ^2$   |
| ⑦ $ \tilde{B} ^{-1}$ | ⑧ $ \tilde{B} ^{-2}$ | ⑨ $ B ^{n-2}$ | ⑩ $ B ^{m-1}$ | ⑪ $ B ^n$       | ⑫ $ B ^{m+1}$       |
| ⑬ $ B ^{n+2}$        | ⑭ $n-1$              | ⑮ $n$         | ⑯ $n+1$       | ⑰ $BC^{-1}$     | ⑱ $\tilde{B}C^{-1}$ |
| ⑲ $B^{-1}C$          | ⑳ $BC$               |               |               |                 |                     |
- 

**B7** ~ **C5** の解答群 \_\_\_\_\_

- |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| ① -8 | ② -7 | ③ -6 | ④ -5 | ⑤ -4 | ⑥ -3 |
| ⑦ -2 | ⑧ -1 | ⑨ 0  | ⑩ 1  | ⑪ 2  | ⑫ 3  |
| ⑬ 4  | ⑭ 5  | ⑮ 6  | ⑯ 7  | ⑰ 8  |      |
- 

**C7** **C8** **C9** の解答群 \_\_\_\_\_

- |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| ① -3 0 1 | ② -2 1 1 | ③ -2 3 6 | ④ 0 0 1  | ⑤ 0 0 3  |
| ⑥ 3 0 0  | ⑦ 6 0 -3 | ⑧ 6 0 1  | ⑨ 6 3 -2 | ⑩ 8 0 -5 |
-

3.  $n$ 次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  から  $m$ 次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^m$  への線形写像 ( $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ) においては,  $\mathbf{R}^n$  の標準基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  に対して  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$  の各々は **CX** である. したがって,  $f(e_j) = a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) とおき **D1**  $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$  を考えると, 線形写像は  $f(x) = Ax$  として与えられる.  $f$  の像 ( $\text{Im } f$ ) は  $a_j$  で生成されるので, その次元は  $\dim(\text{Im } f) = \mathbf{D2}$  であり,  $f$  の核 ( $\text{Ker } f$ ) は連立1次方程式 **D3** の解空間に等しく,  $\dim(\text{Ker } f) = \mathbf{D4} - \dim(\text{Im } f)$  である.

ここで具体的に,  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ ,  $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$  の像と核の

次元および基底を求める.  $f = Ax = \begin{bmatrix} \mathbf{D5} \\ \mathbf{D6} \\ \mathbf{D7} \\ \mathbf{D8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  より  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{D5} \\ \mathbf{D6} \\ \mathbf{D7} \\ \mathbf{D8} \end{bmatrix}$  を得る

ので, **D9** である  $f$  の像の次元は  $\dim(\text{Im } f) = \mathbf{DX}$ , その基底の1つの組は選択肢の番号の若い順に  $\{\mathbf{E1}, \mathbf{E2}\}$  と求められる.

また,  $\dim(\text{Ker } f) = \mathbf{E3}$ ,  $\text{Ker } f$  の基底は  $\{\mathbf{E4}\}$  となり,  $f$  の核は **E5** である.

**CX** ~ **D4** の解答群 \_\_\_\_\_

- ①  $m$  次行ベクトル    ②  $n$  次行ベクトル    ③  $m$  次列ベクトル    ④  $n$  次列ベクトル  
⑤  $m \times m$  行列    ⑥  $m \times n$  行列    ⑦  $n \times n$  行列    ⑧  $n \times m$  行列  
⑨  $\text{rank } A$     ⑩  $\text{rank } [A \mid e_m]$     ⑪  $\text{rank } [A \mid e_n]$     ⑫  $Ax = e_m$   
⑬  $Ax = e_n$     ⑭  $Ax = \mathbf{0}$     ⑮  $m$     ⑯  $n$     ⑰  $m+n$     ⑱  $m-n$

**D5** ~ **D8** の解答群 \_\_\_\_\_

- ①  $-6 \ 4 \ 3$     ②  $-2 \ -1 \ 4$     ③  $-2 \ 1 \ 1$     ④  $-2 \ 2 \ 1$   
⑤  $1 \ 1 \ -2$     ⑥  $1 \ 2 \ -2$     ⑦  $3 \ 4 \ -6$     ⑧  $4 \ -1 \ -2$   
⑨  $-2 \ -1 \ 4 \ 0$     ⑩  $-2 \ 4 \ -6 \ -2$     ⑪  $1 \ -2 \ 3 \ 1$     ⑫  $1 \ -1 \ 4 \ 2$   
⑬  $1 \ 1 \ -2 \ 0$     ⑭  $1 \ 2 \ -2 \ 0$     ⑮  $3 \ 4 \ -6 \ 0$

**D9** **DX** **E3** **E5** の解答群 \_\_\_\_\_

- ①  $0$     ②  $1$     ③  $2$     ④  $3$     ⑤  $4$     ⑥  $5$   
⑦  $\mathbf{R}^2$  の部分空間    ⑧  $\mathbf{R}^3$  の部分空間    ⑨  $\mathbf{R}^4$  の部分空間  
⑩  $\mathbf{R}^3$  内の原点を通る直線    ⑪  $\mathbf{R}^3$  内の原点を通る平面    ⑫  $\mathbf{R}^4$  内の原点を通る直線

**E1** **E2** **E4** の解答群 \_\_\_\_\_

- ①  $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     ②  $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$     ③  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$     ④  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$     ⑤  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     ⑥  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$   
⑦  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$     ⑧  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$     ⑨  $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$     ⑩  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$     ⑪  $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$     ⑫  $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$

大問 3 (数学③)

以下の各問に答えなさい。なお、空欄の中には通常の式では不要な「1」や「0」が当てはまることがある。その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること。分数の分母分子とも空欄である問いに 0 を答える場合には「0/1」を、1 を答える場合には「1/1」を、-1 を答える場合は「-1/1」で答えなさい。その他の分数は既約分数で答えなさい。

1.  $x$  の関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $G(x)$  が次のように定義されているとき、次の各問に答えなさい。

$$f(x) = e^{1/x} \quad (x \neq 0)$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{10/x} & (-10 \leq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -e^{-10/x} & (0 < x \leq 10) \end{cases}$$

$$G(x) = \int_{-10}^x g(x) dx \quad (-10 \leq x \leq 10)$$

(1)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \boxed{\text{A1}}$        $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \boxed{\text{A2}}$

(2) 解答用紙裏面の記述欄 1 に、 $y = f(x)$  のグラフの概形を描きなさい。グラフには、変曲点と漸近線も示すこと。

(3) 解答用紙裏面の記述欄 2 に、 $y = g(x)$  のグラフの概形を描きなさい。

(4)  $y = G(x)$  は  $x = \boxed{\text{A3}}$  で最大値を取る。

$\boxed{\text{A1}}$  ~  $\boxed{\text{A3}}$  の選択肢 \_\_\_\_\_

- |          |      |            |             |      |
|----------|------|------------|-------------|------|
| ① 1      | ② 2  | ③ 3        | ④ 4         | ⑤ 5  |
| ⑥ 6      | ⑦ 7  | ⑧ 8        | ⑨ 9         | ⑩ 10 |
| ⑪ 0      | ⑫ -1 | ⑬ $\infty$ | ⑭ $-\infty$ | ⑮ 不定 |
| ⑯ 定義されない |      |            |             |      |



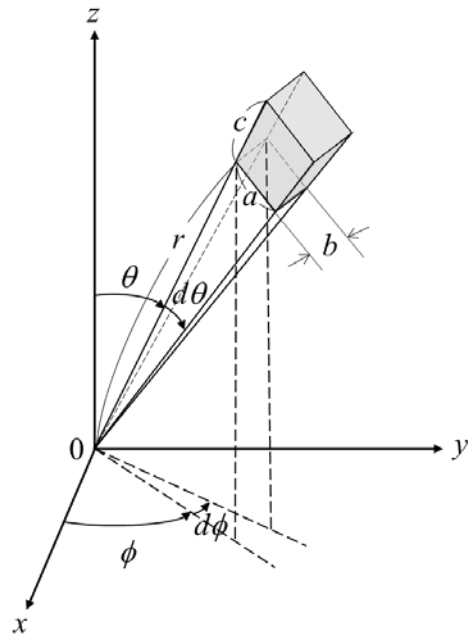
2. 次の各問に答えなさい。式中に  $r, \theta, \phi$  を含む部分があるときは、この順番で書きなさい。

(1) 直交座標  $x, y, z$  を極座標  $r, \theta, \phi$  に変換するときの、変数間の関係（右図参照）は、

$$x = r \text{ [A4] [A5]}$$

$$y = r \text{ [A6] [A7]}$$

$$z = r \text{ [A8]}$$



(2) この変換のヤコビアンは、

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \text{[A9] [AX] [B1]}$$

(3) ヤコビアンの直感的イメージを捉えるために、上図の網掛け部分の体積 ( $a, b, c$  を三辺とする微小体積)  $dV$  を求めてみる。網掛け部分の三辺の長さは、 $a = \text{[B2] [B3]}$ ,  $b = \text{[B4] [B5] [B6]}$ ,  $c = \text{[B7]}$  であるから、

$$dV = abc = \text{[A9] [AX] [B1] [B8] [B9] [BX]}$$

となり、(2)の結果と比較すると、ヤコビアンが変数変換の際の拡大率のようなものであることが分かる。

(4)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  ( $y \geq 0, z \geq 0$ ) の体積  $V$  を、極座標を使って求めると、

$$V = \int_0^{\text{[C1]}} r^{\text{[C2]}} dr \int_0^{\text{[C3]}} \text{[C4]} d\theta \int_0^{\text{[C5]}} \phi^{\text{[C6]}} d\phi = \frac{\text{[C7]}}{\text{[C8]}} \text{[C9] [CX]}$$

[A4] ~ [CX] の選択肢 \_\_\_\_\_

- |          |            |               |                 |                 |
|----------|------------|---------------|-----------------|-----------------|
| ① 1      | ② 2        | ③ 3           | ④ 4             | ⑤ 0             |
| ⑥ -1     | ⑦ $\pi/2$  | ⑧ $\pi$       | ⑨ $2\pi$        | ⑩ $r$           |
| ⑪ $dr$   | ⑫ $\theta$ | ⑬ $d\theta$   | ⑭ $\sin \theta$ | ⑮ $\cos \theta$ |
| ⑯ $\phi$ | ⑰ $d\phi$  | ⑱ $\sin \phi$ | ⑲ $\cos \phi$   | ⑳ $R$           |

3. テイラーの定理とテイラー展開に関する次の各問に答えなさい。以下では、テイラーの定理の剰余項を  $R_n$  と表記している。また、一変数関数  $f(x)$  の  $j$  階微分に  $a$  を代入したものを  $f^{(j)}(a)$  と表記している。二変数関数  $f(x, y)$  の場合は、例えば  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$  を求めた後に  $(a, b)$  を代入したものを  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a, b)$  のように表記する。ここに  $a, b$  は定数。

- (1) 関数  $f(x)$  に関する ( $a$  のまわりの) テイラーの定理は、 $f(x)$  が考える領域で  $C^n$  級 ( $n$  回連続微分可能) であるとき、次のように表される。

$$f(x) = \sum_{j=\boxed{\text{D1}}}^{\boxed{\text{D2}}} \frac{f^{(j)}(a)}{\boxed{\text{D3}} \boxed{\text{D4}}} (x - \boxed{\text{D5}})^{\boxed{\text{D6}}} + R_n$$

- (2)  $f(x)$  のテイラー展開は、 $f(x)$  が  $x = a$  の近傍で  $C^\infty$  級であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \boxed{\text{D7}}$  であれば成立し、次のように表される。

$$f(x) = \sum_{j=\boxed{\text{D1}}}^{\boxed{\text{D8}}} \frac{f^{(j)}(a)}{\boxed{\text{D3}} \boxed{\text{D4}}} (x - \boxed{\text{D5}})^{\boxed{\text{D6}}}$$

- (3) 関数  $f(x, y)$  に関するテイラーの定理は、 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  として、一変数関数のテイラーの定理を用いることにより導かれ、

$$f(a + h, b + k) = \sum_{j=\boxed{\text{D1}}}^{\boxed{\text{D2}}} \frac{1}{\boxed{\text{D3}} \boxed{\text{D4}}} \left( \boxed{\text{D9}} \frac{\partial}{\partial x} + \boxed{\text{DX}} \frac{\partial}{\partial y} \right)^{\boxed{\text{D6}}} f(\boxed{\text{E1}}, \boxed{\text{E2}}) + R_n$$

と表される。なお、この式では微分演算子 (偏微分作用素)  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  を用いており、

これらは  $\left( c \frac{\partial f}{\partial x} + d \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left( c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y} \right) f$  と定義されている ( $c, d$  は定数)。

$\boxed{\text{D1}}$  ~  $\boxed{\text{E2}}$  の選択肢 \_\_\_\_\_

- |         |           |         |            |             |
|---------|-----------|---------|------------|-------------|
| ① 1     | ② 2       | ③ 3     | ④ 0        | ⑤ -1        |
| ⑥ $a$   | ⑦ $b$     | ⑧ $h$   | ⑨ $j-1$    | ⑩ $j$       |
| ⑪ $j+1$ | ⑫ $k$     | ⑬ $n-1$ | ⑭ $n$      | ⑮ $n+1$     |
| ⑯ $\pi$ | ⑰ $\pi^2$ | ⑱ !     | ⑲ $\infty$ | ⑳ $-\infty$ |

- (4)  $f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  近傍で  $C^\infty$  級であり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \boxed{\text{D7}}$  であるとき,  $x = a + h, y = b + k$  とおくと, (3)の式からテイラー展開の式が (2)の式を拡張した形式で) 次のように得られる.

$$f(x, y) = \sum_{j=\boxed{\text{D1}}}^{\boxed{\text{D8}}} \frac{1}{\boxed{\text{D3}} \boxed{\text{D4}}} \left\{ (x - \boxed{\text{E3}}) \frac{\partial}{\partial x} + (y - \boxed{\text{E4}}) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^{\boxed{\text{D6}}} f(\boxed{\text{E1}}, \boxed{\text{E2}})$$

- (5)  $z = f(x, y) = 2 \tan^{-1}(\sqrt{y}/x)$  ( $x \neq 0, y > 0$ ) について,  $(x, y) = (-1, 1)$  まわりのテイラー展開を  $j = 1$  の項までで近似した ( $j \geq 2$ の項を無視した) 式を求めなさい. 解答は途中経過を含めて, 解答用紙の裏面の記述欄 3 に書きなさい.
- (6) 前問(5)で求めた式は, 点  $(-1, 1, f(-1, 1))$  での  $\boxed{\text{E5}}$  を表している. すなわち,  $f(x, y)$  のテイラー展開を  $j = 1$  の項までで近似するということは,  $f(x, y)$  を  $\boxed{\text{E5}}$  で近似していることになる. なお,  $j = 1$  の項までによる近似は,  $\boxed{\text{E6}}$  と対応していることにも留意しておこう.

$\boxed{\text{E3}} \sim \boxed{\text{E6}}$ の選択肢				
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 0
⑥ -1	⑦ $a$	⑧ $b$	⑨ $h$	⑩ $k$
⑪ $\pi$	⑫ $\pi^2$	⑬ $\infty$	⑭ 接線	⑮ 接平面
⑯ 包絡線	⑰ 包絡面	⑱ 連続線	⑲ 連続面	⑳ 全微分

## 大問 4 (物理学①)

ニュートン力学の基本法則と物体の運動に関する以下の問いに答えよ. ベクトル量を太字 ( $\mathbf{v}$ 等), その大きさを細字 ( $v$ 等) で表記する. 直交座標系 (右手系)  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸を使用する. 各軸方向の単位ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  とする. 時間は  $t$  と表記する. 以下の空枠にあう適切な数字を解答用紙に記せ.

1.  $z$  軸に平行に運動する質量  $m$  の質点を考える.  $z$  軸方向負の向きに重力 (加速度  $\mathbf{g}$ ) が作用する場合,  $t=0$  での質点の高さ ( $z$  座標) と速度をそれぞれ  $0, v_0\mathbf{e}_z$  ( $v_0 > 0$ ) とする. 時刻  $t (> 0)$  における質点の運動量  $\mathbf{p}$  は次式

$$\mathbf{p} = \boxed{\text{A1}} + \int_0^t \boxed{\text{A2}} dt \quad (1)$$

により  $\mathbf{p} = \boxed{\text{A3}} \mathbf{e}_z$  となる.

$t > 0$  における質点が到達する最大の高さを  $h_{\max}$  とする. エネルギーの保存則により  $t=0$  での質点の  $\boxed{\text{A4}}$  エネルギーがすべて重力の  $\boxed{\text{A5}}$  エネルギーとなる. したがって,  $h_{\max} = \boxed{\text{A6}}$  となる. 質点が最高点に到達する前の高さ  $h_1$  ( $0 < h_1 < h_{\max}$ ) において, 質点の速度  $v_1\mathbf{e}_z$  は  $\boxed{\text{A7}} \mathbf{e}_z$  となる.

### A1~A7 の選択肢

- ① 力      ② 運動量      ③ エネルギー      ④ ポテンシャル      ⑤ 運動
- ⑥  $m v_0 \mathbf{e}_y$       ⑦  $m v_0 \mathbf{e}_z$       ⑧  $t$       ⑨  $z$       ⑩  $m g \mathbf{e}_z$       ⑪  $-m g \mathbf{e}_z$
- ⑫  $-m g t$       ⑬  $v_0 t$       ⑭  $m(v_0 - g t)$       ⑮  $\frac{v_0^2}{g}$       ⑯  $\frac{v_0^2}{2g}$
- ⑰  $v_0 \sqrt{1 - \frac{g h_1}{v_0^2}}$       ⑱  $v_0 \sqrt{1 - \frac{2g h_1}{v_0^2}}$       ⑲  $v_0 \left( 1 - \frac{g h_1}{v_0^2} \right)$       ⑳  $v_0 \left( 1 - \frac{2g h_1}{v_0^2} \right)$

2. 長さ  $l_0$  の棒の両端に質量  $m$  の質点が結合したバトンを考える. 棒の部分の質量は無視できる. 図 1 のように  $t < 0$  では, バトンは  $x$  軸上に静止している. 右端の質点 P に向かって  $y$  軸に平行に速度  $v_0 \mathbf{e}_y$  ( $v_0 > 0$ ) で飛来する同一質量  $m$  の質点があり,  $t = 0$  で完全弾性衝突をする.  $z$  軸は紙面に垂直手前向きにとる. ここで  $t > 0$  におけるバトンの運動を求める. 衝突直後  $t = +0$  で, 飛来した質点の速度は **A8**, バトン右端の質点 P の速度は **A9** となり, バトン左端の質点の速度は **AX** である. 衝突後のバトンの重心速度は **B1** の保存則により **B2** である. 一方, バトンの回転運動においては **B3** の保存則により重心 G 周りの **B3** が保存される.

重心 G から質点 P への線分 GP と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とすれば, 回転の角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}_c$  は  $\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z$  である. バトンの重心周りの慣性モーメント  $I$  は **B4** である. 質点 P の重心に対する相対速度が回転速度となるから,  $t = +0$  における角速度  $\boldsymbol{\omega}_{c0}$  は **B5**  $\mathbf{e}_z$  となる.  $t > 0$  でバトンの重心周りの角運動量  $\mathbf{L}$  は  $\mathbf{L} = \mathbf{B6}$  であり, その時間微分はバトンに作用するトルクに等しい.  $t > 0$  では, バトンにトルクは働かないので,  $t > 0$  で  $\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega}_{c0}$  となる.

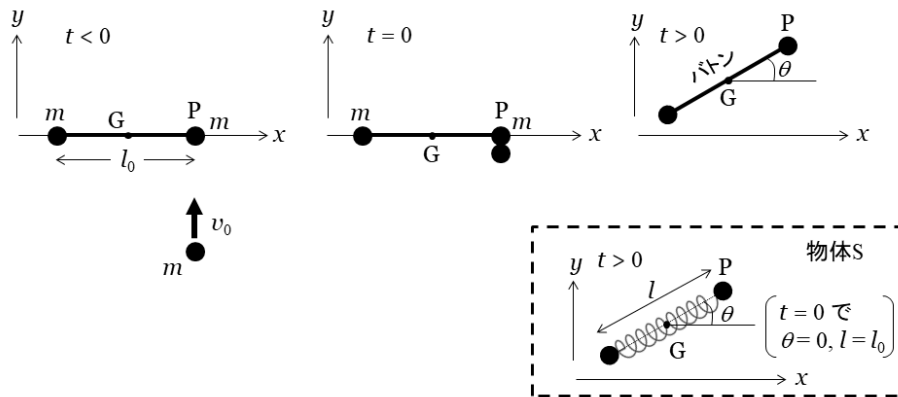


図 1 飛来する質点の衝突によるバトンの運動

**A8~AX, B1~B6 の選択肢**

- |                             |   |                     |                       |
|-----------------------------|---|---------------------|-----------------------|
| ① 運動量                       | ② エネルギー                                   | ③ 角運動量              | ④ 慣性モーメント             |
| ⑤ $\frac{m v_0^2}{2}$       | ⑥ 0                                       | ⑦ 1                 | ⑧ $-v_0 \mathbf{e}_y$ |
| ⑨ $v_0 \mathbf{e}_y$        | ⑩ $\frac{v_0}{2} \mathbf{e}_y$            |                     |                       |
| ⑪ $\frac{m l_0^2}{2}$       | ⑫ $m l_0^2$                               | ⑬ $\frac{v_0}{l_0}$ | ⑭ $\frac{2v_0}{l_0}$  |
| ⑮ $I \boldsymbol{\omega}_c$ | ⑯ $\frac{1}{2} I \boldsymbol{\omega}_c^2$ |                     |                       |

次にバトンの棒を図1右下の破線枠内のようにばねで置き換え、ばねの両端に質量  $m$  の質点が結合したものを物体  $S$  と呼ぶ。ばねは、自然長  $l_0$ 、ばね定数  $k$ 、質量  $0$  である。物体  $S$  は図1のバトンと同様に  $t < 0$  で  $x$  軸上に静止している。速度  $v_0 \mathbf{e}_y$  で飛来した質量  $m$  の質点が質点  $P$  に完全弾性衝突した後の物体  $S$  は回転に加えてばねによる振動をする。この運動について考える。時刻  $t (> 0)$  で、ばねの長さを  $l$ 、自然長からの伸び率を  $\varepsilon (= l/l_0 - 1)$  とする。両質点には  $\varepsilon > 0$  であれば共に重心に向かうばねの復元力が作用する。ここでは、ばね定数  $k$  を十分に大きくとることで、 $m v_0^2 \ll k l_0^2$  および  $|\varepsilon| \ll 1$  が常に成り立つものとする。

まずは、ニュートン力学の基本法則により、衝突後の物体  $S$  の運動の基本量を求める。衝突直後から物体  $S$  の  は保存されるから、物体  $S$  の重心の速度  $\mathbf{v}_G$  はバトンの場合と同様に  である。よって  $t > 0$  で物体  $S$  の重心は等速直線運動をする。

一方、物体  $S$  の重心周りの角運動量も衝突後保存する。よって時刻  $t (> 0)$  では、物体  $S$  の重心周りの回転角速度  $\boldsymbol{\omega}_c (= \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z)$  は、 $t = +0$  における物体  $S$  の回転角速度  $\boldsymbol{\omega}_{c0}$  ( $= \input{B5} \mathbf{e}_z$ ) と時刻  $t$  における重心周りの慣性モーメント  $I$  (ばねの長さに依存、 $I = \input{B7}$ ) によって表される。したがって回転角速度  $\boldsymbol{\omega}_c$  は  $\boldsymbol{\omega}_c = \input{B8} \boldsymbol{\omega}_{c0}$  となる。

ここから、重心  $G$  を運動の新たな原点として考える。両質点の運動は重心  $G$  に関して  な運動となる。質点  $P$  の動径 (重心  $G$  から  $P$  への距離) を  $r$  とし、質点  $P$  の加速度の動径成分  $a_r$  の式は、 $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  である。よって質点  $P$  の動径方向の運動方程式は次式となる。

$$m \left[ \frac{d^2}{dt^2} ( \input{BX} ) - r \input{C1} \right] = -k ( \input{C2} ) \quad (2)$$

この式を  $\boldsymbol{\omega}_c = \input{B8} \boldsymbol{\omega}_{c0}$  の関係を用いて解くことで運動の詳細がわかる。物体  $S$  が無回転の時、式(2)の左辺の[ ]内の第2項がなくなる。その時の2質点の振動運動の角振動数  $\omega_{s0}$  (振動数の  $2\pi$  倍) は、 $\omega_{s0} = \input{C3}$  となる。

**B7~BX, C1~C3 の選択肢**

- |                     |                       |                                 |                        |                                       |       |
|---------------------|-----------------------|---------------------------------|------------------------|---------------------------------------|-------|
| ① $ml^2$            | ② $ml^2/2$            | ③ 対称                            | ④ 非対称                  | ⑤ $y$                                 | ⑥ $r$ |
| ⑦ $(1+\varepsilon)$ | ⑧ $(1+\varepsilon)^2$ | ⑨ $\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$ | ⑩ $\frac{d\theta}{dt}$ | ⑪ $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ |       |
| ⑫ $2r$              | ⑬ $2r-l_0$            | ⑭ $\sqrt{k/m}$                  | ⑮ $\sqrt{2k/m}$        | ⑯ $\sqrt{k/2m}$                       |       |

式(2)を伸び率 $\varepsilon$ についての1次近似\*で解くだけでも少々時間を要する. ここでは代わりにエネルギー保存の法則を用いて物体 $S$ の回転中のばねの振動振幅だけを求めることにする. 飛来した質点の衝突前の運動エネルギーは, 完全弾性衝突後に物体 $S$ の①重心の並進運動エネルギー, ②重心周りの回転運動エネルギー, ③ばねの **C4** エネルギー, ④2つの質点の重心から動径方向の **C5** エネルギーに分配される.

$t = t_1 (> 0)$  でばねの長さが極値 (最大あるいは最小)  $l_1 (= (1 + \varepsilon_1)l_0)$  になった瞬間の角速度を  $\omega_1 \mathbf{e}_z$ , 慣性モーメントを  $I_1$  とする. そうすると次のように,  $t < 0$  における全エネルギーを左辺として, 物体 $S$ の  $t = t_1$  における力学的エネルギーを右辺とした次式が成り立つ.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} (2m) v_G^2 + \frac{1}{2} I_1 \cdot \text{C6} + \text{C7} \quad (3)$$

(3)式の右辺第2項 (回転運動エネルギー) は  $t = +0$  における回転運動エネルギーの値の **C8** 倍である. ここで無次元パラメータ  $\beta = m v_0^2 / k l_0^2$  を導入する. 先述の条件より  $\beta$  は伸び率と同様に1次微小量である. 2次微小量まで含めて式(3)を解けば, 伸び率の最大値は **C9**, 最小値は **CX** となる.

\*  $\varepsilon$  についての1次近似では, 次のテイラー展開式で  $\varepsilon$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ) の2次以上の項を

$$\text{無視する. } f(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{1}{2} n(n-1)\varepsilon^2 + \dots$$

#### C4~CX の選択肢

- |                                     |   |                         |                           |                                 |                      |
|-------------------------------------|---|-------------------------|---------------------------|---------------------------------|----------------------|
| ① 運動                                | ② ポテンシャル                                | ③ $\omega_0$            | ④ $\omega_1$              | ⑤ $\omega_0^2$                  | ⑥ $\omega_1^2$       |
| ⑦ $\frac{1}{2} k l_1^2$             | ⑧ $\frac{1}{2} k l_0^2 \varepsilon_1^2$ | ⑨ $(1 + \varepsilon_1)$ | ⑩ $(1 + \varepsilon_1)^2$ | ⑪ $\frac{1}{1 + \varepsilon_1}$ |                      |
| ⑫ $\frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^2}$ | ⑬ 0                                     | ⑭ 1                     | ⑮ $\beta$                 | ⑯ $\frac{\beta}{2}$             | ⑰ $\frac{3\beta}{2}$ |

## 大問 5 (物理学②)

電波望遠鏡は波の干渉に基づいた天体観測装置である。電波望遠鏡は天体からやってくる波（X線から電波まで）を指向性良くとらえ、その方角にある超新星爆発やブラックホールなど宇宙で起きている出来事を調べることができる。以下の問に答えよ。

1.  $n$  個の波源からなる直線波源列が、図 1 のように等間隔  $d$  で  $x$  軸上に置かれている。すべての波源は同一の振幅、同一の初期位相  $\phi$ 、同一の角周波数  $\omega$  で振動している。いま原点  $O$  から距離  $r$  にある点  $R$  を考える。 $\overline{OR}$  は  $x$ - $y$  平面内にあり、 $y$  軸から  $x$  軸負の方向に角度  $\theta$  をなす。原点  $O$  にある波源 1 を出た球面波は減衰して点  $R$  に到達するが、その波形は点  $R$  の近傍においては平面波：

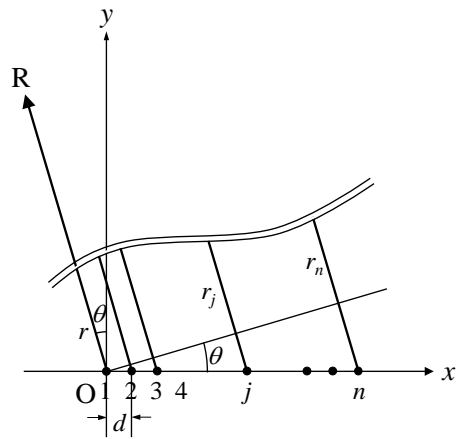


図 1

と近似してよい。ここに  $t$  は時間、 $A$  は点  $R$  における波の振幅である。 $k$  は波数であり、波長  $\lambda$  と A1 の関係にある。(1) 式は

$$u = A \cos[k(r - \omega t / k) + \phi] \quad (2)$$

と変形されるから、波  $u$  は速度  $c = \text{A2}$  で進むことが分かる。 $c$  は波の A3 と呼ばれる。

$r \gg nd$  のとき、波源  $j$  ( $j=1 \cdots n$ ) から点  $R$  までの距離  $r_j$  は、 $d$  および  $\theta$  を用いて近似的に

$$r_j = \text{A4} \quad (3)$$

と表わされる。(1)式で  $r$  を  $r_j$  に置き換え、 $\phi_j = \phi + kr_j$  とおくと、波源  $j$  から出て点  $R$  に伝播した波  $u_j$  は

$$u_j = A \cos(-\omega t + \phi_j) \quad (4)$$

となる。ただし  $r \gg nd$  を考慮し、各波の点  $R$  における振幅をすべて  $A$  とした。隣り合う波源からきた波同士の位相差  $\Delta\phi = \phi_{j+1} - \phi_j$  は、傾き角  $\theta$  に依存する定数であり、

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \text{A5} && (k \text{ を用いて}) \\ \Delta\phi &= \text{A6} && (\lambda \text{ を用いて}) \end{aligned} \quad (5)$$



である. このように  $n$  個の波源が点  $R$  に作る合成波を求めることは, (4) 式において, 位相  $\phi$  が  $j$  が 1 増えるごとに  $\Delta\phi$  ずつ増大するようにしながらすべての  $u_j$  を  $j=1\cdots n$  について足し合わせることに等価である.

**A1~A6 の選択肢**

- ①  $\lambda = 2\pi k$       ②  $k = 2\pi\lambda$       ③  $k = 2\pi / \lambda$       ④  $\omega / k$       ⑤  $k / \omega$   
 ⑥ 位相速度      ⑦ 群速度      ⑧  $r + (j-1)d \cos \theta$       ⑨  $r + jd \cos \theta$   
 ⑩  $r + (j-1)d \sin \theta$       ⑪  $r + jd \sin \theta$       ⑫  $2\pi d \lambda \sin \theta$       ⑬  $2\pi d \lambda \cos \theta$   
 ⑭  $kd \cos \theta$       ⑮  $2\pi d \sin \theta / \lambda$       ⑯  $2\pi d \cos \theta / \lambda$       ⑰  $kd \sin \theta$

2. このような波の合成を考えるには, 複素数を考えるときわめて便利である. たとえば 2 個の波源が点  $P, Q$  に置かれており, 両者が同一角周波数  $\omega$  で振動しているとする. 両波源から放出される二つの波が空間のある地点  $R$  に作る波は一般に

$$u_1 = A_1 \cos(-\omega t + \phi_1) \quad (6)$$

$$u_2 = A_2 \cos(-\omega t + \phi_2) \quad (7)$$

の形をとる. もし, 一对の複素関数

$$\tilde{u}_1 = A_1 e^{i(-\omega t + \phi_1)} \quad (8)$$

$$\tilde{u}_2 = A_2 e^{i(-\omega t + \phi_2)} \quad (9)$$

$i$ : 虚数単位

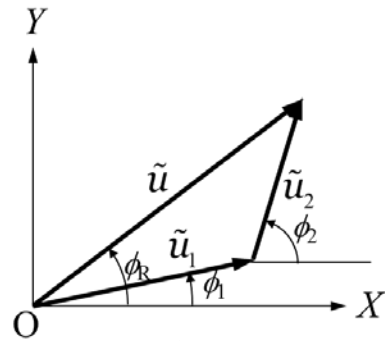


図 2

を考えると, (6)(7)両式の合成波は  $u = \text{Re}[\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2]$  と簡単に与えられる. ここに  $\text{Re}$  は複素数の実部を取る操作である.

複素数の和は, 複素平面内におけるベクトル和として幾何学的に可視化される. (8)(9)式の時間依存性  $e^{-i\omega t}$  を省略すると, 和  $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$  は複素平面上で図 2 のように表現される. 合成波は  $\tilde{u}$  の振幅  $A_R = |\tilde{u}|$  と位相  $\phi_R$  を用いて

$$u = A_R \cos(-\omega t + \phi_R) \quad (10)$$

と与えられる. 図より明らかなように, 振幅  $A_R = |\tilde{u}|$  が最大となるのはベクトル  $\tilde{u}_1$  と  $\tilde{u}_2$  が **A7** の時, すなわち  $\phi_2 - \phi_1$  が  $\pi$  の **A8** のときである.

**A7~A8 の選択肢**

- ① 平行      ② 垂直      ③ 反平行  
 ④ 偶数倍      ⑤ 奇数倍      ⑥ 整数倍

3. 図 1 の点 R における合成波に戻る. 問 1 の最後に述べたように, この波の合成は (4) 式の  $u_j$  を,  $j$  が 1 増えるごとに  $\Delta\phi$  ずつ増大するような位相  $\phi$  を持つものとして  $j=1\cdots n$  について足し合わせることに等価である. 対応する  $n$  個の複素関数として

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= Ae^{-i\omega t} \\ \tilde{u}_2 &= Ae^{i(-\omega t+\Delta\phi)} \\ \tilde{u}_3 &= Ae^{i(-\omega t+2\Delta\phi)} \\ &\dots \\ \tilde{u}_n &= Ae^{i(-\omega t+(n-1)\Delta\phi)}\end{aligned}\quad (11)$$

を考える. ただし  $n \gg 1$  とする. (11) 式の各式に共通する時間依存性  $e^{-i\omega t}$  を省略すると, 複素平面での  $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \cdots + \tilde{u}_n$  の図形的表現は図 3 に表されるようなものになる.

すべてのベクトルの始点および終点は一つの円 (中心 Q) の円周上にある. 隣接する二個のベクトルは互いに  $\Delta\phi$  だけ傾いている. 円の半径を  $\rho$  とし,  $\triangle OQP_1$  において  $\angle OQP_1 = \Delta\phi$  であることを用いると, ベクトル  $\tilde{u}_1$ , 従って各ベクトル  $\tilde{u}_j$  の大きさ  $A$  は,

$$A = \boxed{A9} \quad (12)$$

と与えられる. また  $\Delta\phi < 2\pi/n$  における合成ベクトル  $\tilde{u}$  の大きさは,  $\triangle OQP_n$  において  $\angle OQP_n = n\Delta\phi$  より,

$$|\tilde{u}| = \boxed{AX} \quad (13)$$

と与えられる. 式 (12), (13) から  $\rho$  を消去すると,

$$|\tilde{u}| = \boxed{B1} \quad (14)$$

が得られ, したがって合成波  $\tilde{u}$  の強度は

$$I = |\tilde{u}|^2 = (\boxed{B1})^2 \quad (15)$$

と求められる.

図 1 で  $y$  軸方向に伝播する波 ( $\theta=0$ ) の場合, (5) 式より  $\Delta\phi=0$  となる. この場合, 各複素ベクトル  $\tilde{u}_j$  の虚部はすべてゼロとなり, 点  $P_1, P_2 \cdots P_n$  はすべて実軸 ( $X$  軸) 上に並ぶ. 合成波の振幅は  $|\tilde{u}| = \boxed{B2}$  となり, その強度は最大値  $I_0 = |\tilde{u}|^2 = (\boxed{B2})^2$  をとる.

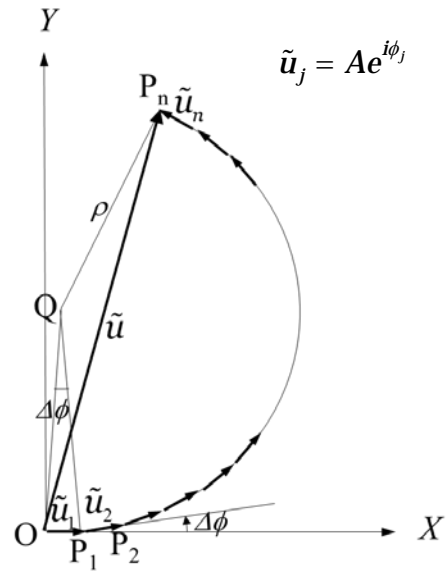


図 3

A9～B2 の選択肢

- ①  $2\rho \sin(n\Delta\phi/2)$     ②  $2\rho \cos(n\Delta\phi/2)$     ③  $\rho \cos(\Delta\phi)$     ④  $\rho \cos(n\Delta\phi)$   
 ⑤  $2\rho \cos(\Delta\phi/2)$     ⑥  $\rho \sin(\Delta\phi)$     ⑦  $\rho \sin(n\Delta\phi)$     ⑧  $2\rho \sin(\Delta\phi/2)$   
 ⑨  $A \frac{\sin(n\Delta\phi)}{\sin(\Delta\phi)}$     ⑩  $A \frac{\cos(n\Delta\phi)}{\cos(\Delta\phi)}$     ⑪  $A \frac{\sin(n\Delta\phi/2)}{\sin(\Delta\phi/2)}$     ⑫  $A \frac{\cos(n\Delta\phi/2)}{\cos(\Delta\phi/2)}$   
 ⑬  $nA$     ⑭  $A$     ⑮  $A^n$

$\theta$  を 0 から徐々に増大させると  $\Delta\phi$  も徐々に増大する。  $n$  個の点  $P_1, P_2 \dots P_n$  は、すでに図 3 に示したように円弧上に並ぶが、  $\Delta\phi$  の増大に伴って円弧の中心角  $\angle OQP_n = n\Delta\phi$  は増大し、かつ円の半径  $\rho$  は減少する。結果として、  $|\tilde{u}|$  はその最大値 B2 から減少する。さらに  $\theta$  を増大させると点  $P_n$  は原点  $O$  に到達し、そのとき合成波の振幅が消失する ( $|\tilde{u}| = 0$ )。このときの  $\Delta\phi$  を  $\Delta\phi_1$  とおくと、  $\Delta\phi_1$  は  $\angle OQP_n = 2\pi$  より  $\Delta\phi_1 = 2\pi/n$  と求められる。対応する傾き角  $\theta$  を  $\theta_1$  とすると、  $\theta$  と  $\Delta\phi$  の関係式(式(5))より  $\sin \theta_1 =$  B3 を得る。さらに  $\theta_1$  を十分小さいとして  $\sin \theta_1 \cong \theta_1$  とおくと  $\theta_1 =$  B3 を得る。

さらに  $\theta$  を増大させると  $n$  個の点列は二周目の円弧を描くようになる。円弧が円をおよそ  $3/2$  周まわったところで、  $|\tilde{u}|$  の第二の極大が現れる。このときの円の直径  $2\rho = |\tilde{u}|$  は、円弧の長さを  $nA$  に等しいと近似し、この円弧の長さが円周の  $3/2$  倍に等しいと置くことにより  $|\tilde{u}| = 2nA/3\pi$  と見積もられる。こうして合成波強度の第二の極大値として  $I = |\tilde{u}|^2 =$  B4  $I_0$  を得る。これは  $I_0$  に比べて十分小さい。以上の議論より、図 1 に示される個々の波源から放出される球面波は、干渉の結果、  $y$  軸方向に伝播する平面波として合成されることがわかる。角度  $\theta_1$  は、この平面波の伝播方向が  $y$  軸まわりのどの程度の角度範囲に分布するかを表す指標 (指向性) である。その値は、波の波長  $\lambda$  と波源列両端距離  $nd$  の比  $\lambda/nd$  を十分 B5 とることにより十分小さくできる。

B3～B5 の選択肢

- ①  $\lambda/nd$     ②  $\lambda/d$     ③  $nd/\lambda$     ④  $d/\lambda$     ⑤  $4.5 \times 10^{-1}$     ⑥  $4.5 \times 10^{-2}$   
 ⑦  $4.5 \times 10^{-3}$     ⑧  $4.5 \times 10^{-4}$     ⑨ 小さく    ⑩ 大きく

ここまではすべての波源の初期位相が等しい場合を考えてきた。もし波源の初期位相が、 $j$ が1 増えるごとに一定値  $\Delta\varphi$  ( $>0$ ) ずつ減るよう調節されていたとすると、点  $R$  での合成波の強度は、 $\theta=0$  ではなく、 $\theta = \sin^{-1}(\lambda\Delta\varphi/2\pi d)$  において最大となる。すなわち合成波は、図 1 のように  $y$  軸方向から  $x$  軸負方向に角度  $\theta = \sin^{-1}(\lambda\Delta\varphi/2\pi d)$  だけ傾いて伝播する。それはこの方向に傾いた伝播方向の波においては、各波源に設定された初期位相の遅れ ( $j$  と共に増大) が伝播に伴う位相の進み (伝播距離に比例し、 $j$  と共に増大) によって打ち消され、点  $R$  において互いに強め合う干渉を生じることができるからである。このことを利用すると、波源列の隣り合う波源間の位相差  $\Delta\varphi$  を調節することで、放出される平面波の伝播方向を制御することができる。この場合も、波の指向性は  $\theta_1 = \boxed{\text{B3}}$  によって与えられる。

4. ここで波の伝播方向を図4のように反転してみる.  $x$  軸上に並んだ発振器をアンテナ受信機に置き換え, これを用いて  $x$ - $y$  平面上の遠方の点  $R$  にある天体からの (電磁) 波を受信する. 受信機  $j$  で検出される波  $u_j$  は,  $j$  が 1 増えるたびに一定値  $\Delta\phi$  ずつ増大するような位相項  $\phi_j$  を含むはずである.  $\Delta\phi$  は天体の方角  $\theta$  の関数である. 未知の値  $\Delta\phi$  を知るために, それぞれの波  $u_j$  の位相  $\phi_j$  を  $(j-1)\Delta\phi$  だけ減じてから, すべての  $j$  についてそれらを足し合わせる. ここに  $\Delta\phi$  はパラメータである.

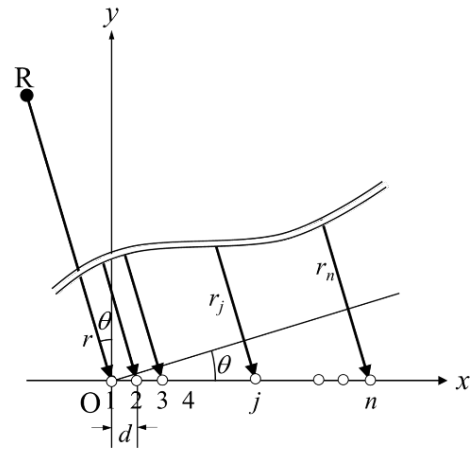


図4

この操作は図3の各ベクトル  $\tilde{u}_j$  をそれぞれ  $(j-1)\Delta\phi$  ずつ時計回りに回転させることに相当する. その結果,  $\Delta\phi = \Delta\phi$  となったときすべてのベクトルが実軸 ( $X$  軸) 正方向を向くから, 合成波の強度は最大値をとる. このようにして合成波強度が最大値となる  $\Delta\phi$  の値 ( $=\Delta\phi$ ) を通して天体の方角を  $\theta$  と知ることができる. この角度の精度 (指向性) は, やはり  $\theta_1 = \boxed{\text{B3}}$  によって与えられる. 全長  $L = nd = 16 \text{ km}$  にわたって直線状に並ぶアンテナ列からなる電波望遠鏡で天体から到達する波長  $\lambda = 3 \text{ cm}$  の電波を受信するとき, この電波望遠鏡の角度分解能は  $\boxed{\text{B6}}$  である. ただし  $1^\circ = 3600''$  である.

**B6 の選択肢**

- ①  $0.04''$       ②  $0.4''$       ③  $4''$       ④  $40''$

大問 6 (化学①)

必要があれば、以下の物理定数値を使うこと。  
プランク定数  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$       電子の質量  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$   
電子の電荷  $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$       真空中での光速  $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

1. 電磁波ならびに物質波に関連する以下の設問 (1)~(3)に答えよ。

(1) 28.0 GHz の振動数を有する電磁波の波長として最も適切なものを、下の①~⑧のうちから1つ選べ。 A1

- ①  $1.86 \times 10^{-26} \text{ m}$       ②  $1.86 \times 10^{-23} \text{ m}$       ③  $5.57 \times 10^{-18} \text{ m}$       ④  $5.57 \times 10^{-15} \text{ m}$   
⑤ 1.07 cm      ⑥ 10.7 m      ⑦ 9.33 cm      ⑧ 93.3 m

(2) 波長 300 nm の電磁波の量子エネルギーとして最も適切なものを、下の①~⑧のうちから1つ選べ。 A2

- ①  $2.42 \times 10^{-4} \text{ eV}$       ②  $4.14 \times 10^{-3} \text{ eV}$       ③ 0.242 eV      ④ 4.14 eV  
⑤  $2.42 \times 10^2 \text{ eV}$       ⑥  $4.14 \times 10^3 \text{ eV}$       ⑦  $2.42 \times 10^5 \text{ eV}$       ⑧  $4.14 \times 10^6 \text{ eV}$

(3) 電子が速さ  $100 \text{ km s}^{-1}$  で直線運動をしている。この電子のド・ブロイ波 (物質波) の波長として最も適切なものを、下の①~⑧のうちから1つ選べ。 A3

- ① 0.145 pm      ② 7.28 pm      ③ 7.28 nm      ④ 145 nm  
⑤  $1.37 \times 10^5 \text{ m}$       ⑥  $6.87 \times 10^6 \text{ m}$       ⑦  $1.37 \times 10^8 \text{ m}$       ⑧  $6.87 \times 10^{12} \text{ m}$

2. 波動関数と量子状態に関連する以下の記述  $a \sim d$  には正しいものが2つある。最も適切な組み合わせを、下の①～⑥のうちから1つ選べ。 A4

- $a$  波動関数を用いれば、任意の場所における電子の運動量を正確に知ることができる。
- $b$  シュレディンガー方程式の解となる関数は、波動関数または振幅関数と呼ばれる。
- $c$  水素類似原子において、方位量子数  $l$  は主量子数  $n$  からの制限を受けることなく、任意の整数を取ることができる。
- $d$  水素類似原子における方位量子数  $l=0$  の波動関数は、核からの距離  $r$  のみに依存する球対称性関数である。

- ①  $a$  と  $b$             ②  $a$  と  $c$             ③  $a$  と  $d$   
④  $b$  と  $c$             ⑤  $b$  と  $d$             ⑥  $c$  と  $d$

3. 元素の周期的性質に関連する以下の記述  $a \sim e$  には誤っているものが2つある。その組み合わせを、下の①～⑩のうちから1つ選べ。 A5

- $a$  多電子原子系では、内側軌道の電子雲からの遮蔽効果によって、外側軌道の電子にとどく正電場の強さが弱められ、核の見かけの正電荷が減少したようになる。この見かけの正電荷を有効核電荷という。
- $b$  マリケンの電気陰性度は、イオン化エネルギーと電子親和力の相乗平均で表される。
- $c$  パウリの排他原理によれば、同一原子内の複数の電子は、同時に同じ量子状態になることはない。
- $d$  単体である水素の酸化数はゼロで与えられるが、金属水素化物中の水素は  $+1$  で与えられる。
- $e$  気体状態の単独の中性原子が電子と結合し、陰イオンとなるときに放出するエネルギーを電子親和力という。

- ①  $a$  と  $b$             ②  $a$  と  $c$             ③  $a$  と  $d$             ④  $a$  と  $e$             ⑤  $b$  と  $c$   
⑥  $b$  と  $d$             ⑦  $b$  と  $e$             ⑧  $c$  と  $d$             ⑨  $c$  と  $e$             ⑩  $d$  と  $e$

4. 等核および異核二原子分子に関連する以下の文章を読み，設問 (1)～(5)に答えよ。

第2周期の元素で構成される等核二原子分子の分子軌道とその電子配置を図1および図2に示す。図中のエネルギー準位は，結合軸をx軸としたときのものであり，二原子分子の例としてリチウム ( $\text{Li}_2$ ) のエネルギー準位を示した。

(1) 図1および図2中の **A6** ～ **A9** に当てはまる分子軌道の表記として最も適切なものを，下の①～⑧のうちから1つずつ選べ。

- |                 |                   |                           |                               |
|-----------------|-------------------|---------------------------|-------------------------------|
| ① $\sigma_{1s}$ | ② $\sigma^*_{1s}$ | ③ $\sigma_{2s}$           | ④ $\sigma^*_{2s}$             |
| ⑤ $\sigma_{2p}$ | ⑥ $\sigma^*_{2p}$ | ⑦ $\pi_{2py} = \pi_{2pz}$ | ⑧ $\pi^*_{2py} = \pi^*_{2pz}$ |

(2)  $\text{N}_2$ 分子の電子配置として最も適切なものを，図1中の①～⑧のうちから1つ選べ。

**AX**

(3)  $\text{O}_2$ 分子の電子配置として最も適切なものを，図2中の①～⑧のうちから1つ選べ。

**B1**

(4) 下の①～⑦の等核二原子分子のうち，結合エネルギーが最も大きいものを1つ選べ。

**B2**

- |                 |                 |                |                |
|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
| ① $\text{Li}_2$ | ② $\text{Be}_2$ | ③ $\text{B}_2$ | ④ $\text{C}_2$ |
| ⑤ $\text{N}_2$  | ⑥ $\text{O}_2$  | ⑦ $\text{F}_2$ |                |

(5) 一酸化炭素  $\text{CO}$  と一酸化窒素  $\text{NO}$  の結合次数として最も適切な数値を，下の①～⑧のうちからそれぞれ1つずつ選べ。

$\text{CO}$  の結合次数： **B3**

- |       |     |       |     |
|-------|-----|-------|-----|
| ① 0.5 | ② 1 | ③ 1.5 | ④ 2 |
| ⑤ 2.5 | ⑥ 3 | ⑦ 3.5 | ⑧ 4 |

$\text{NO}$  の結合次数： **B4**

- |       |     |       |     |
|-------|-----|-------|-----|
| ① 0.5 | ② 1 | ③ 1.5 | ④ 2 |
| ⑤ 2.5 | ⑥ 3 | ⑦ 3.5 | ⑧ 4 |



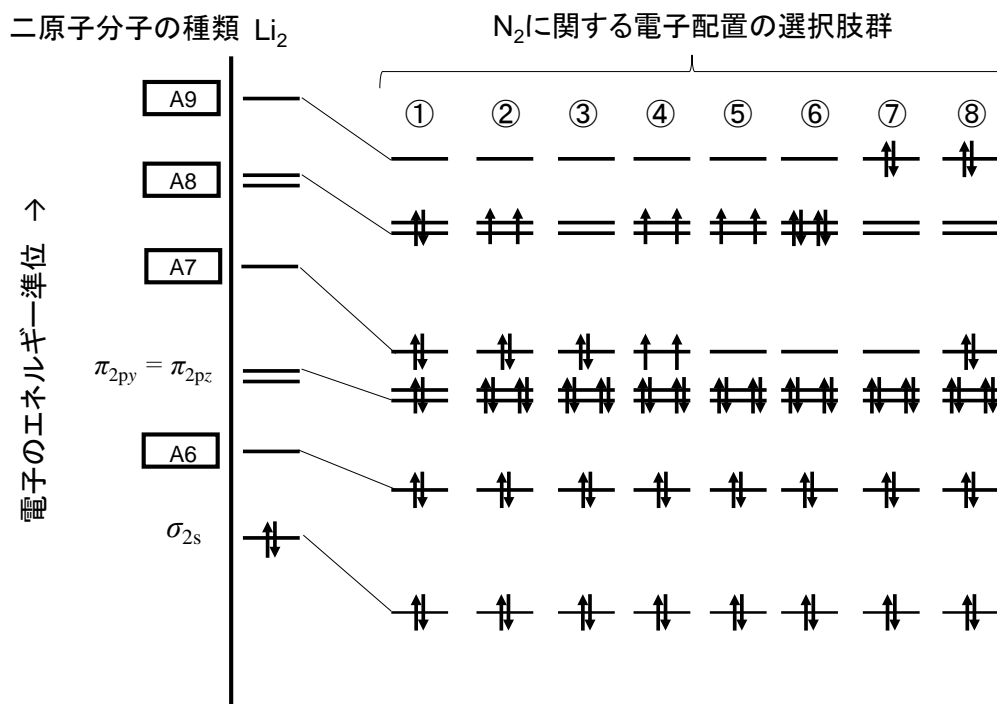


図1 第2周期の元素で構成される等核二原子分子の電子配置 ( $\text{Li}_2$  と  $\text{N}_2$ )

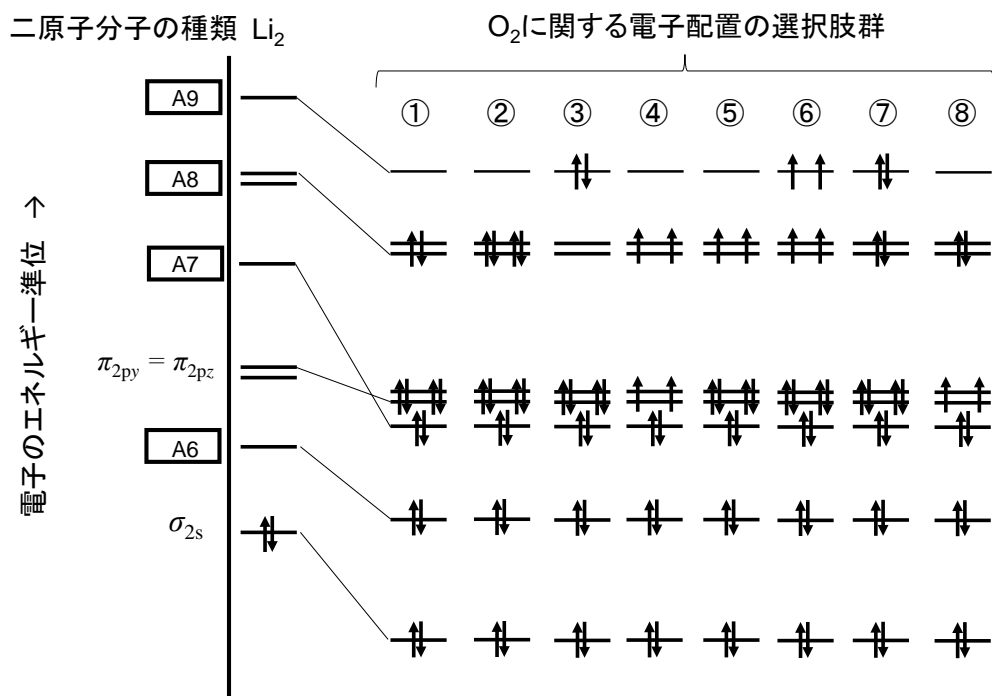


図2 第2周期の元素で構成される等核二原子分子の電子配置 ( $\text{Li}_2$  と  $\text{O}_2$ )

5. 水素結合に関連する以下の文章を読み、設問 (1)~(5)に答えよ.

水素結合のエネルギーは  $10 \sim 30 \text{ kJ mol}^{-1}$ 程度で一般的に **B5**. 水素結合のエネルギーは, 水素原子が直接結合している原子の種類によって異なり, その原子の **B6** が大きいほど, 強い水素結合をつくり易くなる. 分子間に作用する水素結合の強さは, 相変化挙動に影響を及ぼす. 例えば, (a)分子間に水素結合が作用する水の沸点は, 水素結合が作用しないベンゼンの沸点よりも高くなる. 一方, 水素結合が分子内に作用する場合もある. 分子内の水素結合が相挙動に影響を及ぼす例としては, ニトロフェノールの沸点が挙げられる. ニトロフェノールには3種の異性体があるが, このうち分子内で水素結合をつくるのは **B7** であり, 例えば減圧下 (70 Torr) における **B7** の沸点は他の2種の異性体よりも **B8**.

(1) **B5** に当てはまる語句として最も適切なものを下の選択肢から1つ選べ.

- ① 共有結合より小さい                      ② 共有結合より大きい  
③ 共有結合と同程度である

(2) **B6** に当てはまる語句として最も適切なものを下の選択肢から1つ選べ.

- ① 原子番号                      ② イオン化傾向                      ③ 電気陰性度

(3) **B7** に当てはまる語句として最も適切なものを下の選択肢から1つ選べ.

- ① *o*-ニトロフェノール    ② *m*-ニトロフェノール    ③ *p*-ニトロフェノール

(4) **B8** に当てはまる語句として最も適切なものを下の選択肢から1つ選べ.

- ① 低い                      ② 高い

(5) 下線(a)に関連して, 分子の沸点を比較したものとして 誤っているもの を下の選択肢から1つ選べ. **B9**

- ① (高沸点)  $\text{HF} > \text{HI} > \text{HBr} > \text{HCl}$  (低沸点)  
② (高沸点)  $\text{CH}_4 > \text{SnH}_4 > \text{GeH}_4 > \text{SiH}_4$  (低沸点)  
③ (高沸点)  $\text{H}_2\text{O} > \text{H}_2\text{Te} > \text{H}_2\text{Se} > \text{H}_2\text{S}$  (低沸点)

(空白ページ)

大問 7 (化学②)

以下の問に答えよ. 空欄 **A1** ~ **C3** にあてはまる最も適切なものを, 選択肢からそれぞれ1つずつ選べ. ただし, 特に指定しない場合は, 温度, 体積, 圧力をそれぞれ  $T$ ,  $V$ ,  $P$  で表す. 同様に, 熱, 仕事をそれぞれ  $Q$ ,  $W$  で, ギブズ自由エネルギーを  $G$  で表す. また, 気体定数を  $R$  とする.

1. 温度差のある2つの熱源 ( $T_1 > T_2$ ) の間で, 1モルの理想気体を作業物質とする熱機関を準静的に作動させる図1のようなカルノーサイクル ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ ) を考える. 等圧熱容量を  $C_p$ , 等容熱容量を  $C_v$ ,  $C_v$  に対する  $C_p$  の比を  $\gamma$  とする.

まず, 以下の2つの過程での仕事を考えると,

等温膨張での仕事  $W_1 =$  A1

断熱膨張での仕事  $W_2 =$  A2

となる. 同様に圧縮過程での仕事を考える.

また, 断熱過程では  $TV^{\gamma-1}$  の値は一定に保たれるため, 次の体積の関係式が得られる.

A3 = A4

これより, 1サイクルで外界になす仕事を  $-W$  とすると,

$-W =$  A5

となる. この仕事は, 図1の等温線と A6 で囲まれた面積に等しい.

この熱機関の効率  $\eta$  は, 高熱源から受け取った熱  $Q_1$  に対して, 外界になした仕事  $-W$  の割合で表されるため,

$\eta =$  A7

となる.

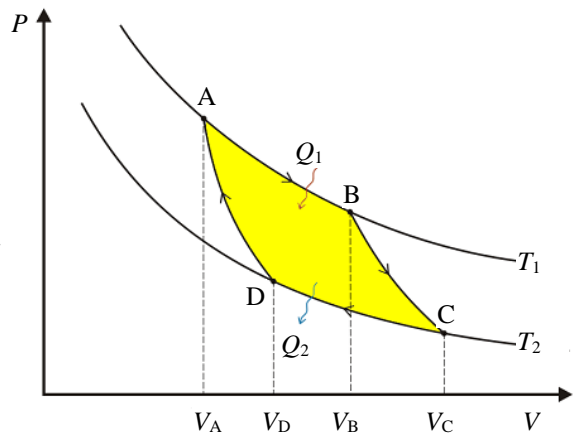


図1 カルノーサイクル

(1) A1, A2

- ①  $RT_1 \ln \frac{V_D}{V_A}$       ②  $RT_2 \ln \frac{V_A}{V_D}$       ③  $RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$       ④  $RT_1 \ln \frac{V_A}{V_B}$   
⑤  $RT_1 \ln \frac{V_C}{V_B}$       ⑥  $RT_2 \ln \frac{V_B}{V_C}$       ⑦  $RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$       ⑧  $RT_2 \ln \frac{V_C}{V_D}$   
⑨  $C_V(T_2 - T_1)$       ⑩  $C_V(T_1 - T_2)$       ⑪  $C_P(T_2 - T_1)$       ⑫  $C_P(T_1 - T_2)$

(2) A3, A4

- ①  $\frac{V_A}{V_B}$       ②  $\frac{V_A}{V_C}$       ③  $\frac{V_A}{V_D}$       ④  $\frac{V_C}{V_B}$       ⑤  $\frac{V_D}{V_C}$       ⑥  $\frac{V_B}{V_D}$

(3) A5

- ①  $R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A}$       ②  $R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_A}{V_B}$       ③  $R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_A}{V_D}$   
④  $R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_D}{V_A}$       ⑤  $R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_C}{V_B}$       ⑥  $R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_C}$

(4) A6

- ① 壓縮線      ② 膨脹線      ③ 斷熱線      ④ 等壓線

(5) A7

- ①  $\frac{T_2 - T_1}{T_1}$       ②  $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$       ③  $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$       ④  $\frac{T_1 - T_2}{T_2}$

2. 水の状態図について考える。水は、水蒸気(気体)、水(液体)、氷(固体)の3つの状態をとるが、どの状態が安定であるかは、図2に示すように、温度  $T$  と圧力  $P$  によって決まる。ここで、O 点は **A8** 点と呼ばれ、O-C 線は **A9** 曲線と呼ばれる。

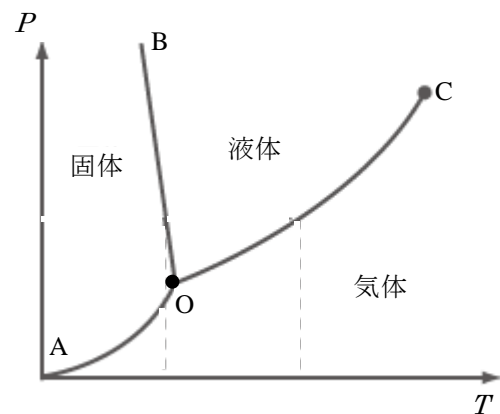


図2 水の状態図

一般に、相全体の成分数を  $n$ ，相の数を  $L$ ，および系の自由度を  $f$  とすると、次の関係式が成り立つ。

$$f = \mathbf{AX}$$

この関係を **B1** の相律という。例えば、水の二相平衡系では、 $T$  と  $P$  の2つの状態変数のうち1つを決めれば、他の1つは自動的に決まる。すなわち、自由度は1である。ただし、前述のO点では、 $n = \mathbf{B2}$ ， $L = \mathbf{B3}$  より、 $f = \mathbf{B4}$  となる。つまり、その  $T$  と  $P$  は一意的に決まり、それぞれ  $0.0098^\circ\text{C}$ ， $0.0060 \text{ atm}$  である。

(1) **A8**, **A9**

- ① 共融                      ② 三重                      ③ 共沸                      ④ 臨界  
⑤ 蒸気圧                    ⑥ 融解                      ⑦ 昇華

(2) **AX**

- ①  $n+2-L$                   ②  $n-2+L$                   ③  $n+3-L$                   ④  $n-3+L$

(3) **B1**

- ① トルーション              ② ギブズ                      ③ ラウール                  ④ ヘンリー  
⑤ クラジウス-クラペイロン

(4) **B2**

- ① 1                              ② 2                              ③ 3                              ④ 4                              ⑤ 0

(5) **B3**

- ① 1                              ② 2                              ③ 3                              ④ 4                              ⑤ 0

(6) **B4**

- ① 1                              ② 2                              ③ 3                              ④ 4                              ⑤ 0

3. 化学反応の平衡を熱力学的に定式化する. 反応  $2A+3B \rightleftharpoons C+2D$  を考える.  $x$  を反応進行度とし, 反応が  $dx$  だけ進行したとき, 反応物と生成物の物質量  $n_i$  ( $i = A, B, C, D$ ) は次のように変化する.

$$dn_A = -2dx$$

$$dn_B = \boxed{\text{B5}}$$

$$dn_C = +dx$$

$$dn_D = \boxed{\text{B6}}$$

$T$  と  $P$  が一定のとき, 対応するギブス自由エネルギーの変化  $(dG)_{T,P}$  は, 成分  $i$  の化学ポテンシャル  $\mu_i$  を用いて次式で表される.

$$(dG)_{T,P} = \mu_C dn_C + \mu_D dn_D + \mu_A dn_A + \mu_B dn_B$$

化学反応の進行に伴う自由エネルギーの変化  $\Delta G$  は, 自由エネルギーを反応の進行度に対してプロットしたグラフの勾配で定義され, 次式となる.

$$\Delta G = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{T,P} = \boxed{\text{B7}} + \boxed{\text{B8}} + \boxed{\text{B9}} + \boxed{\text{BX}}$$

反応が正方向 (右方向) に自発的に進行する場合, 次式が成立する.

$$\Delta G \boxed{\text{C1}} 0$$

また, 反応が平衡となる場合,

$$\Delta G \boxed{\text{C2}} 0$$

が成立する. このとき, 各物質が理想気体であるとする, 成分  $i$  の化学ポテンシャル  $\mu_i$  は次式で表せる.

$$\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln p_i$$

$p_i$  は成分  $i$  の平衡状態での分圧,  $\mu_i^\circ(T)$  は  $i$  成分が標準状態, 温度  $T$  のときの化学ポテンシャル,  $R$  は気体定数 ( $8.31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ ) である. 標準生成自由エネルギー  $\Delta G^\circ$  を定義し, 平衡定数  $K_p$  を導入すると次式を得る.

$$\Delta G^\circ = -RT \ln K_p \quad K_p = \frac{P_C P_D^2}{P_A^2 P_B^3}$$



ここで、アンモニア合成反応  $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{NH}_3(\text{g})$  を考える。(g) は気相を表す。  
 $\text{NH}_3$  の標準生成自由エネルギーが 298 K で  $-16.5 \text{ kJ/mol}$  であるとする。このとき、298 K  
 でのこの反応の平衡定数  $\ln K_p$  は **C3** となる。ただし、各気体は理想気体として扱  
 えるものとする。

(1) **B5**, **B6**

- ①  $-dx$                       ②  $+dx$                       ③  $-2dx$                       ④  $+2dx$   
 ⑤  $-3dx$                       ⑥  $+3dx$

(2) **B7** ~ **BX**

- ①  $-\mu_A$                       ②  $+\mu_A$                       ③  $-2\mu_A$                       ④  $+2\mu_A$   
 ⑤  $-2\mu_B$                       ⑥  $+2\mu_B$                       ⑦  $-3\mu_B$                       ⑧  $+3\mu_B$   
 ⑨  $-\mu_C$                       ⑩  $+\mu_C$                       ⑪  $-2\mu_C$                       ⑫  $+2\mu_C$   
 ⑬  $-2\mu_D$                       ⑭  $+2\mu_D$                       ⑮  $-3\mu_D$                       ⑯  $+3\mu_D$

(3) **C1**

- ①  $<$                               ②  $=$                               ③  $>$

(4) **C2**

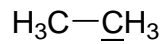
- ①  $<$                               ②  $=$                               ③  $>$

(5) **C3**

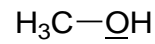
- ①  $6.65 \times 10^{-3}$                       ②  $6.65 \times 10^{-2}$                       ③  $6.65 \times 10^{-1}$                       ④  $6.65$   
 ⑤  $13.3 \times 10^{-3}$                       ⑥  $13.3 \times 10^{-2}$                       ⑦  $13.3 \times 10^{-1}$                       ⑧  $13.3$   
 ⑨  $1.11 \times 10^{-3}$                       ⑩  $1.11 \times 10^{-2}$                       ⑪  $1.11 \times 10^{-1}$                       ⑫  $1.11$

大問 8 (化学③)

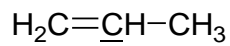
1. 下記の化合物の下線で示した原子の混成軌道として最も適切なものを、①～③のうちからそれぞれ1つ選べ。なお、同じ選択肢を何度選んでもよい。



A1



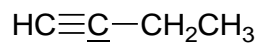
A2



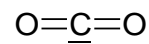
A3



A4



A5

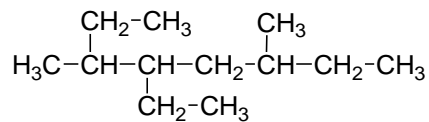


A6

- ①  $sp$       ②  $sp^2$       ③  $sp^3$

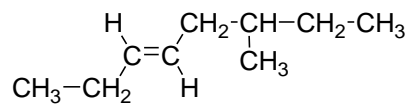
2. 下記の(1), (2)の化合物の IUPAC 名として適切なものを、それぞれ①～④のうちから1つ選べ。

(1) A7



- ① 2,3-ジエチル-5-メチルヘプタン      ② 5,6-ジエチル-3-メチルヘプタン  
③ 4-エチル-3,6-ジメチルオクタン      ④ 5-エチル-3,6-ジメチルオクタン

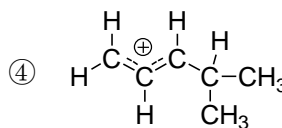
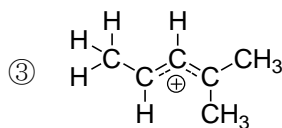
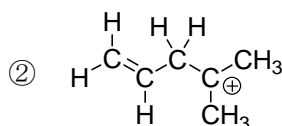
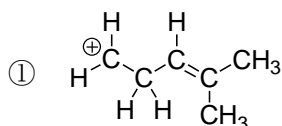
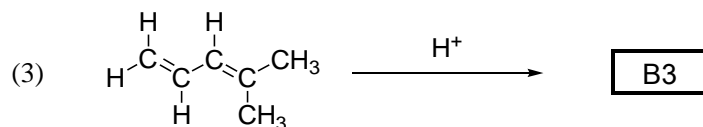
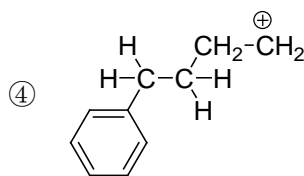
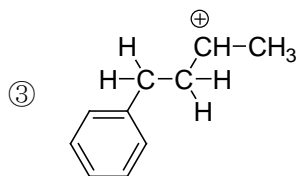
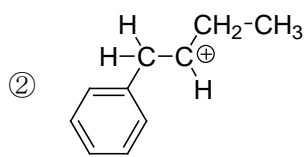
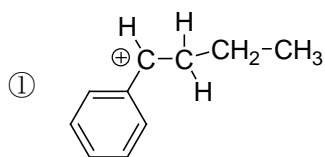
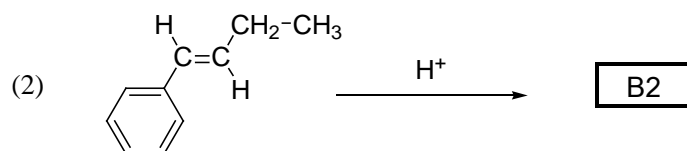
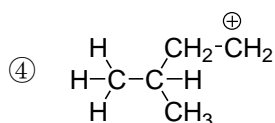
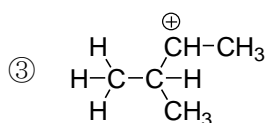
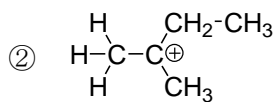
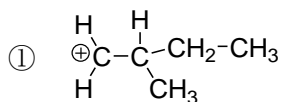
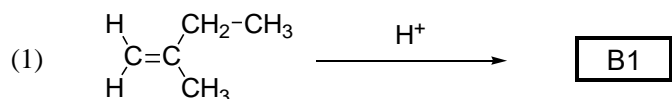
(2) A8



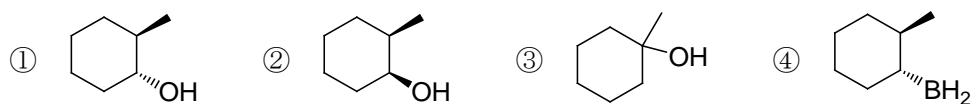
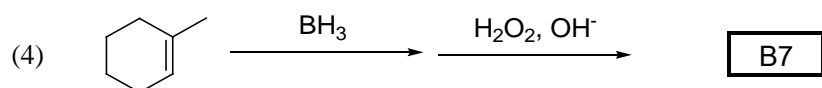
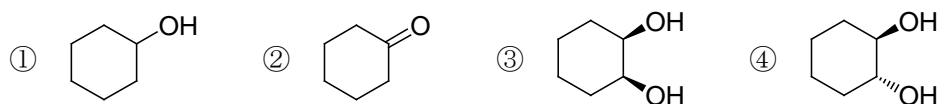
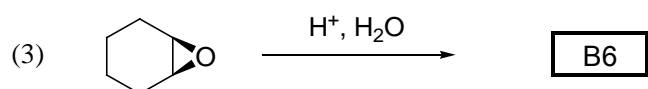
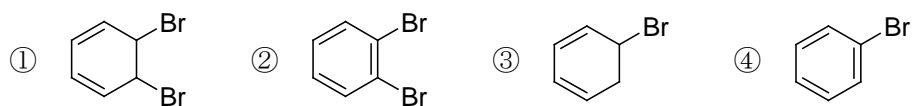
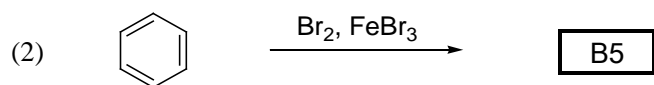
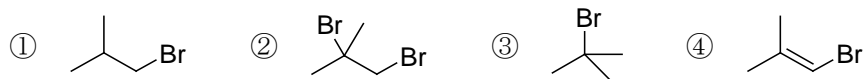
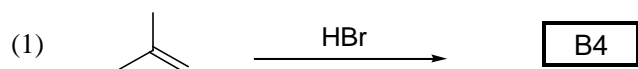
- ① *trans*-3-メチル-5-オクテン      ② *cis*-3-メチル-5-オクテン  
③ *trans*-6-メチル-3-オクテン      ④ *cis*-6-メチル-3-オクテン



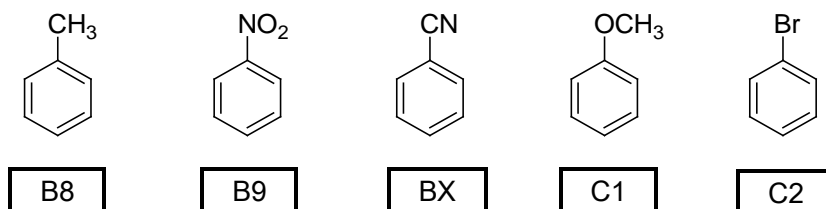
4. 下記の(1)~(3)のアルケンにプロトン(H<sup>+</sup>)が付加して生成するカルボカチオンのうち、最も安定なものを①~④のうちから1つ選べ。



5. 下記の(1)~(4)の反応の主生成物を、1つずつ①~④のうちから選べ.



6. 次の5つの1置換ベンゼンの求電子置換反応に対する配向性と、ベンゼンと比較した反応性に関して正しいものを、①～④のうちからそれぞれ1つ選べ。なお、同じ選択肢を何度選んでもよい。



- ① オルト・パラ配向性でベンゼンよりも反応性が高い
- ② オルト・パラ配向性でベンゼンよりも反応性が低い
- ③ メタ配向性でベンゼンよりも反応性が高い
- ④ メタ配向性でベンゼンよりも反応性が低い

(空白ページ)

<試験を終えた学生のみなさんへ>

統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の1年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

\*統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス [eng-edu@grp.tohoku.ac.jp](mailto:eng-edu@grp.tohoku.ac.jp)