平成30年度　統一テスト

（理数基礎学力到達度テスト）

＜問題冊子②＞選択問題

大問２（数学②）　大問３（数学③）

大問４（物理学①）　大問５（物理学②）

大問６（化学①）　大問７（化学②）　大問８（化学③）

試験時間　14:15～16:15

＊解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません＊

【問題を選択する際の注意】

１．以下の問題選択ルールに従い，大問７問のうち４問に解答すること.

a) 物理学、化学からそれぞれ１問は解答すること.

b) 化学を３問とも選択することはできない.

２．したがって，選択問題の解答パターンは下記の４つのみとなる.

数学２問－物理学１問－化学１問

数学１問－物理学２問－化学１問

数学１問－物理学１問－化学２問

数学０問－物理学２問－化学２問

【解答する際の注意】

１．大問１問につき解答用紙１枚（裏面もあり）を用いること.

２．マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること（マーク式のみの大問もあり）.

３．解答の仕方に特に指示が無い場合は，問題文の $\boxed{\text{A1}}$, $\boxed{\text{A2}}$, ・・・にあてはまるものを該当する解答群（選択肢）から選び，選択肢の番号①，②・・・で答えること.
同じ選択肢が複数回あてはまることもある.

４．問題に関する質問は，汚損で読めない等以外は原則認めない.

東北大学　工学部

大問２（数学 ②）

次の各問に答えなさい．

1. 3 次正方行列 $A=\begin{bmatrix} 1-\alpha & 1 & 3 \\ 1 & -2\alpha & -3\alpha \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ と 単位行列 I を用いた連立 1 次方程式を $(A+\alpha I^2)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -2 \end{bmatrix}$ とする．ただし, α はある実数とする．また, 行列 $A+\alpha I^2$ の次数を $n(=3)$, 係数行列の階数を $\mathrm{rank}\,(A+\alpha I^2)$, 拡大係数行列の階数を $\mathrm{rank}\,[A+\alpha I^2 \mid \boldsymbol{b}\,]$ で表すものとする．

(1) $\alpha=$ **A1** のときは $\mathrm{rank}\,(A+\alpha I^2)=$ **A2** $\neq \mathrm{rank}\,[A+\alpha I^2 \mid \boldsymbol{b}\,]$ であるので, $(A+\alpha I^2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は **A3** .

(2) $\alpha=$ **A4** のときは $\mathrm{rank}\,(A+\alpha I^2)$ **A5** $\mathrm{rank}\,[A+\alpha I^2 \mid \boldsymbol{b}\,]<n$ となり解の自由度が **A6** であるので, $(A+\alpha I^2)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は **A7** .

(3) $\alpha\neq$ A1 かつ $\alpha\neq$ A4 のときは $\mathrm{rank}\,(A+\alpha I^2)$ **A8** $\mathrm{rank}\,[A+\alpha I^2 \mid \boldsymbol{b}\,]$ **A9** n であるので, $(A+\alpha I^2)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は **AX** ． よって, $x=$ **B1** , $y=$ **B2** , $z=$ **B3** となる．

A1 A2 A4 A6 B1 B2 B3 の解答群（t：任意定数）

① -3	② -2	③ -1	④ 0	⑤ 1	⑥ 2
⑦ 3	⑧ 4	⑨ $-2t$	⑩ $-t$	⑪ t	⑫ $2t$
⑬ $\dfrac{1}{\alpha-1}$	⑭ $\dfrac{1}{\alpha+1}$	⑮ $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$	⑯ $\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}$	⑰ $-\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$	⑱ $\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

A3 A5 A7 A8 A9 AX の解答群

① $<$	② $>$	③ $\in$	④ $\neq$	⑤ $=$	⑥ $\simeq$

⑦ 一般解をもつ　⑧ 自明な解を持つ　⑨ ただ 1 つの解をもつ

⑩ 無数の解を持つ　⑪ 解をもたない

2. n 次正方行列 B の行列式, 逆行列, 余因子行列をそれぞれ $|B|$, B^{-1}, $\tilde{B}$ とし, また単位行列を I とすると, B $\boxed{\textbf{B4}}$ $=$ $\boxed{\textbf{B5}}$ $B=$ $\boxed{\textbf{B6}}$ I が成り立つ. したがって, B が正則な場合には, 連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ の解は $\boldsymbol{x}=$ $\boxed{\textbf{B7}}$ $\boxed{\textbf{B8}}$ $\boldsymbol{c}$ と求められる.

ここで, $B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ のときには $\tilde{B}=\begin{bmatrix} \boxed{\textbf{B9}} & \boxed{\textbf{BX}} & \boxed{\textbf{C1}} \\ \boxed{\textbf{C2}} & \boxed{\textbf{C3}} & \boxed{\textbf{C4}} \\ -1 & \boxed{\textbf{C5}} & \boxed{\textbf{C6}} \end{bmatrix}$

となるので, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{\textbf{C7}} \\ \boxed{\textbf{C8}} \\ \boxed{\textbf{C9}} \end{bmatrix}$ と求められる.

$\boxed{\text{B4}}$ ～ $\boxed{\text{B8}}$ の解答群

① B	② $\lvert B\rvert$	③ $\lvert B\rvert^2$	④ B^{-1}	⑤ $\lvert B\rvert^{-1}$	⑥ $\lvert B\rvert^{-2}$
⑦ $\tilde{B}$	⑧ $\lvert\tilde{B}\rvert$	⑨ $\lvert\tilde{B}\rvert^2$	⑩ $\tilde{B}^{-1}$	⑪ $\lvert\tilde{B}\rvert^{-1}$	⑫ $\lvert\tilde{B}\rvert^{-2}$

$\boxed{\text{B9}}$ ～ $\boxed{\text{C9}}$ の解答群

① -7	② -6	③ -5	④ -4	⑤ -3	⑥ -2
⑦ -1	⑧ $-\dfrac{1}{3}$	⑨ $-\dfrac{1}{5}$	⑩ 0	⑪ $\dfrac{1}{5}$	⑫ $\dfrac{1}{4}$
⑬ $\dfrac{1}{2}$	⑭ 1	⑮ 2	⑯ 3	⑰ 4	⑱ 5
⑲ 6	⑳ 7				

3\. 固有値 λ をもつ実正方行列を $C = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とすると, 固有値は選択肢の番号の若い順に $\lambda = \boxed{\textbf{CX}}$, $\boxed{\textbf{D1}}$ となる.

(1) $\beta = 2$ の場合には $\lambda = \boxed{\textbf{D2}}$ であり, 固有空間の次元について $\dim W(2)$ $\boxed{\textbf{D3}}$ C の次数 $(= 3)$ となり, C は $\boxed{\textbf{D4}}$ である.

(2) $\beta = 1$ の場合の固有値は $\lambda = \boxed{\textbf{D5}}$, $\boxed{\text{D1}}$ となる. ここで, $\lambda = \boxed{\text{D5}}$ のときは固有ベクトルの 1 つが $\boxed{\textbf{D6}}$ と求められる. また, $\lambda = \boxed{\text{D1}}$ のときは, 選択肢の番号の若い順に $\boxed{\textbf{D7}}$ と $\boxed{\textbf{D8}}$ が固有ベクトルとして求められる. これらの固有ベクトルを選択肢の番号の若い順に並べた変換行列を

$P = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D6}} & \boxed{\text{D7}} & \boxed{\text{D8}} \end{bmatrix}$ とすれば,

C は $\boxed{\textbf{D9}}$ $\boxed{\textbf{DX}}$ $\boxed{\textbf{E1}}$ $= \begin{bmatrix} \boxed{\textbf{E2}} & \boxed{\textbf{E3}} & 0 \\ 0 & \boxed{\textbf{E4}} & \boxed{\textbf{E5}} \\ 0 & 0 & \boxed{\textbf{E6}} \end{bmatrix}$ のように変形される.

$\boxed{\text{CX}}$ ～ $\boxed{\text{D3}}$ および $\boxed{\text{D5}}$ の解答群

① -2β (3 重解)	② β	③ β (重解)	④ 2β	⑤ -3
⑥ -2 (重解)	⑦ -1	⑧ 1 (重解)	⑨ 1	⑩ 2
⑪ 2 (重解)	⑫ 2 (3 重解)	⑬ 3	⑭ 3 (重解)	⑮ 4
⑯ 4 (3 重解)	⑰ $=$	⑱ $\neq$	⑲ $<$	⑳ $>$

$\boxed{\text{D4}}$ の解答群

① 三角化不可能であるが, 対角化可能

② 三角化不可能であるが, ジョルダン標準形へ変換可能

③ 対角化不可能であるが, ジョルダン標準形へ変換可能

④ ジョルダン標準形へ変換不可能であるが, 対角化可能

⑤ ジョルダン標準形へ変換不可能であるが, 三角化可能

$\boxed{\text{D6}}$ ～ $\boxed{\text{D8}}$ の解答群

① $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	② $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	③ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	⑤ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	⑥ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
⑦ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	⑧ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	⑨ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	⑩ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	⑪ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	⑫ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D9}}$ ～ $\boxed{\text{E6}}$ の解答群

① C	② ${}^tC$（C の転置行列）	③ C^{-1}	④ $\tilde{C}$	⑤ P
⑥ ${}^tP$（P の転置行列）	⑦ P^{-1}	⑧ $\tilde{P}$	⑨ -5	⑩ -4
⑪ -3	⑫ -2	⑬ -1	⑭ 0	⑮ 1
⑯ 2	⑰ 3	⑱ 4	⑲ 5	⑳ 6

大問３（数学③）

次の各問に答えなさい．なお，空欄の中には通常の式では不要な「1」や「0」が当てはまることがある．その場合も，式が成り立つために必要なものとして選択し，解答すること．分数の分母分子とも空欄である問いに 0 を答える場合には「 0/1 」を，1 を答える場合には「 1/1 」で答えなさい．

1. x の陰関数 y が，$f(x,y) = xy^2 - x^2y - 2 = 0$ で定義されているとき，次の各問に答えなさい．ここに，f_x，f_yは $f(x,y)$の x，y それぞれについての偏導関数を表す．なお，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ が定義されない点は除いて考えるものとする．

(1) $f_x = \boxed{\text{A1}}\, x^2 + \boxed{\text{A2}}\, y^2 + \boxed{\text{A3}}\, xy$

$f_y = \boxed{\text{A4}}\, x^2 + \boxed{\text{A5}}\, y^2 + \boxed{\text{A6}}\, xy$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\boxed{\text{A7}}\, x^2 + \boxed{\text{A8}}\, y^2 - 2xy\right) \Big/ \left(\boxed{\text{A9}}\, x^2 + \boxed{\text{AX}}\, y^2 + \boxed{\text{B1}}\, xy\right)$$

(2) $x = \boxed{\text{B2}}$ において $\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる．

(3) $x = \boxed{\text{B2}}$ において $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ が成り立つことを使うと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は $\boxed{\text{B3}}$ なので，このときの (x,y) は $\boxed{\text{B4}}$ であることが分かる．

$\boxed{\text{A1}}$ ～ $\boxed{\text{B2}}$ の選択肢

① −9	② −8	③ −7	④ −6	⑤ −5
⑥ −4	⑦ −3	⑧ −2	⑨ −1	⑩ 0
⑪ 1	⑫ 2	⑬ 3	⑭ 4	⑮ 5
⑯ 6	⑰ 7	⑱ 8	⑲ 9	

$\boxed{\text{B3}}$ と $\boxed{\text{B4}}$ の選択肢

① 極大点	② 極小点	③ 特異点	④ 変曲点	⑤ 接点
⑥ 正	⑦ 負	⑧ ゼロ		

2. 次の各問に答えなさい.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx =$ $\boxed{\text{B5}}$ / $\boxed{\text{B6}}$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} =$ $\boxed{\text{B7}}$ / $\boxed{\text{B8}}$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx =$ $\boxed{\text{B9}}$ / $\boxed{\text{BX}}$

ただし，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = C$ とする.

$\boxed{\text{B5}}$ ～ $\boxed{\text{BX}}$ の選択肢

① −9	② −8	③ −7	④ −6	⑤ −5
⑥ −4	⑦ −3	⑧ −2	⑨ −1	⑩ 0
⑪ 1	⑫ 2	⑬ 3	⑭ 4	⑮ 5
⑯ 6	⑰ 7	⑱ 8	⑲ 9	⑳ C

(4) 次の$f(x)$を部分分数に直した結果と，$f(x)$の不定積分を求めた結果を，解答用紙裏面の記述欄 1 に書きなさい．なお，積分定数を記す必要はありません.

$$f(x) = \frac{2x^2+x+2}{x^3+x}$$

3. 次のような領域 D_1，D_2，D_3 での積分 I_1，I_2，I_3 に関する以下の問いに答えなさい.

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,\ \ D_1 = \{(x, y) \mid 0 \le x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,\ \ D_2 = \{(x, y) \mid 0 \le x^2 + y^2 \le 2R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$I_3 = \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,\ \ D_3 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le R,\ 0 \le y \le R\}$$

(1) 領域 D_1，D_2，D_3 を解答用紙裏面の記述欄 2 に図示しなさい.

(2) 積分 I_1，I_2，I_3 の値の大小関係を示しなさい.

$\boxed{\text{C1}} < \boxed{\text{C2}} < \boxed{\text{C3}}$

$\boxed{\text{C1}}$ ～ $\boxed{\text{C3}}$ の選択肢

① I_1　　② I_2　　③ I_3

(3) (x, y) から極座標 (r, θ) への座標変換（$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$）のヤコビアン J を求めなさい.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \left(\boxed{\text{C4}} \big/ \boxed{\text{C5}}\right) r + \left(\boxed{\text{C6}} \big/ \boxed{\text{C7}}\right) \theta$$

(4) 積分 I_1 と I_2 を求めなさい.

$$I_1 = \left(\boxed{\text{C8}} \big/ \boxed{\text{C9}}\right)\{1 - \exp(\boxed{\text{CX}} \cdot \boxed{\text{D1}})\}$$

$$I_2 = \left(\boxed{\text{D2}} \big/ \boxed{\text{D3}}\right)\{1 - \exp(\boxed{\text{D4}} \cdot \boxed{\text{D5}})\}$$

(5) $R \to \infty$ のとき，$I_1 \to \boxed{\text{D6}} \big/ \boxed{\text{D7}}$，$I_2 \to \boxed{\text{D8}} \big/ \boxed{\text{D9}}$ であるから，

$I_3 \to \boxed{\text{DX}} \big/ \boxed{\text{E1}}$ である.

(6) ここで,

$$I_3 = \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2$$

であることと，(5)の結果より，

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \boxed{\text{E2}} \,/\, \boxed{\text{E3}}$$

であることが分かる.

(7) 以上により，前問(3)の $C = \boxed{\text{E4}} \,/\, \boxed{\text{E5}}$ であることが分かる.

$\boxed{\text{C4}}$ ～ $\boxed{\text{E5}}$ の選択肢

① -4	② -3	③ -2	④ -1	⑤ 0
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	⑩ ∞
⑪ $-\infty$	⑫ $\sqrt{\pi}$	⑬ π	⑭ π^2	⑮ $\log \pi$
⑯ $\sqrt{R}$	⑰ R	⑱ R^2	⑲ $\log R$	⑳ C

大問4（物理学 ①）

物体を落下させたとき，物体に内部構造がある場合や回転が伴う場合などのいろいろな落ち方と跳ね返り方の考察をしてみよう．

高さ h_0 で質量 m の物体を静かに放すものとする．座標 x を鉛直方向上向きにとると，物体の初めの位置の x 座標は h_0 である．重力加速度を g とする．以下の各問に答えなさい．なお，物理量の単位は省略する．

1. 図1のように物体が上下2個の部分から成り，上の物体Aと下の物体Bがバネで結ばれている．それぞれの質量 $m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}$ （$m = m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}$）の比が $1:4$ であるとし，バネの質量は小さく，無視できるものとする．物体Aと物体Bの位置座標をそれぞれ $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}$ とする．ばねの自然の長さを ℓ_0 とし，ばね定数を k とする．初めにAを $x = h_0$ に固定し，Bの重みでばねが少し伸びた状態でつり合っていたとする．時刻 $t = 0$ にAを静かに放すと落下を始める．そのとき物体の姿勢は変わらずAが上でBが下のまま下降するものとする．

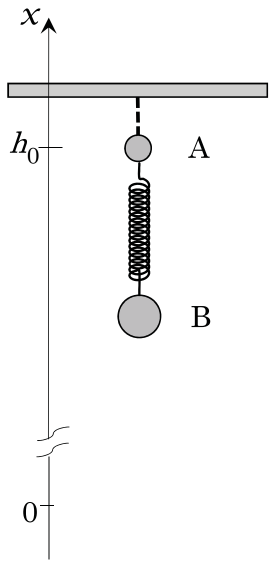


図 1: 物体Aと物体Bがばねで結ばれた複合物体の落下

(1) 最初にバネが伸びてつりあっているとき物体Bの位置座標が $x_{\mathrm{B}} = h_0 - \ell_0 - \delta$ であるとすると，$\delta = \boxed{\textbf{A1}}$ である．

(2) 物体AとBの位置座標の従う運動方程式を記すと，

$$\boxed{\textbf{A2}}\frac{d^2x_{\mathrm{A}}}{dt^2} = \boxed{\textbf{A3}} - \boxed{\text{A2}}g$$

$$\boxed{\textbf{A4}}\frac{d^2x_{\mathrm{B}}}{dt^2} = \boxed{\textbf{A5}} - \boxed{\text{A4}}g$$

となる．

$\boxed{\mathrm{A1}}$ ～ $\boxed{\mathrm{A5}}$ の選択肢

① m　② $\dfrac{m}{5}$　③ $\dfrac{4m}{5}$　④ $\dfrac{m}{k}$　⑤ $\dfrac{m}{5k}$
⑥ $\dfrac{4m}{5k}$　⑦ $\dfrac{k}{m}$　⑧ $\dfrac{5k}{4m}$　⑨ $\dfrac{5k}{m}$　⑩ $\dfrac{mg}{k}$
⑪ $\dfrac{4mg}{5k}$　⑫ $\dfrac{mg}{5k}$　⑬ $k(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})$　⑭ $k(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})$
⑮ $k(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}-\ell_0)$　⑯ $-k(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}-\ell_0)$　⑰ $k(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}-\ell_0)$
⑱ $-k(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}-\ell_0)$　⑲ $k(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}-\ell_0-\delta)$　⑳ $-k(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}-\ell_0-\delta)$

(3)　問 (2) の方程式を解くため，重心の座標 x_{C} に対する方程式と相対位置座標 $x_{\mathrm{R}}=x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}$ に対する方程式を導くと，それぞれ

$$\frac{d^2}{dt^2}x_{\mathrm{C}}=-g$$
$$\frac{d^2}{dt^2}x_{\mathrm{R}}=-\boxed{\mathbf{A6}}\left(x_{\mathrm{R}}-\boxed{\mathbf{A7}}\right)$$

である．

(4)　問 (3) の方程式の解で，$t=0$ に物体が静止している条件を満たすものは，C,D を定数として，また ω を $\omega=\sqrt{\boxed{\mathrm{A6}}}$ で与えられるものとして，それぞれ，

$$x_{\mathrm{C}}=-\frac{1}{2}gt^2+C$$
$$x_{\mathrm{R}}=\boxed{\mathrm{A7}}+D\boxed{\mathbf{A8}}$$

と求まり，$t=0$ における物体の位置についての条件から $C=h_0-\dfrac{4}{5}\ell_0-\dfrac{4}{5}\delta$ および $D=\boxed{\mathbf{A9}}$ が得られる．

これらより，x_{A} と x_{B} が求められる．結果は，

$$x_{\mathrm{A}}=h_0-\frac{4}{5}\delta-\frac{1}{2}gt^2+\frac{4}{5}\delta\boxed{\mathrm{A8}}$$
$$x_{\mathrm{B}}=h_0-\ell_0-\frac{4}{5}\delta-\frac{1}{2}gt^2-\boxed{\mathbf{AX}}\delta\boxed{\mathrm{A8}}$$

である．

$\boxed{\mathrm{A6}}$ ～ $\boxed{\mathrm{AX}}$ の選択肢

① $\dfrac{k}{m}$　② $\dfrac{k}{4m}$　③ $\dfrac{25k}{4m}$　④ $\dfrac{m}{k}$　⑤ $\dfrac{4m}{k}$
⑥ $\dfrac{4m}{25k}$　⑦ h_0　⑧ ℓ_0　⑨ $\dfrac{1}{5}\delta$　⑩ $\dfrac{4}{5}\delta$
⑪ δ　⑫ $(h_0-\ell_0)$　⑬ $(h_0-\ell_0-\delta)$　⑭ $\cos\omega t$　⑮ $\sin\omega t$
⑯ $(1-\cos\omega t)$　⑰ $(\omega t-\sin\omega t)$　⑱ $\dfrac{1}{2}$　⑲ $\dfrac{1}{5}$　⑳ $\dfrac{4}{5}$

(5)　時刻 $t=0$ からしばらくの間の x_{B} のグラフを描くと，図2の $\boxed{\textbf{B1}}$ のようになる．なお，破線は，仮に物体Bがバネから切り離されて単独で自由に落下するとした場合の x_{B} のグラフを表し，また細い線で描かれた $x_{\mathrm{B}}=$ 一定 の直線は，初期値 $x_{\mathrm{B}}=h_0-\ell_0-\delta$ を表し，いずれも基準として示してある．

描く際に注意する x_{B} のグラフの特徴として3つあげると，$\boxed{\textbf{B2}}$，$\boxed{\textbf{B3}}$，$\boxed{\textbf{B4}}$ である．

なお，考察の際に δ と ω の表式から得られる関係式 $\omega\delta=\dfrac{5g}{\omega}$ を用いてよい．

$\boxed{\mathrm{B2}}$，$\boxed{\mathrm{B3}}$，$\boxed{\mathrm{B4}}$ の選択肢

①自由落下と比べて遅れて落ちる
②自由落下と比べて先行して落ちる
③自由落下と比べて先行したり遅れたりして落ちる
④下降する一方である
⑤上昇と下降が交代する
⑥落ち始めの際に速度が上向きである
⑦落ち始めの際に速度が下向きである
⑧落ち始めの際に速度は0である

$\boxed{\text{B1}}$ の選択肢

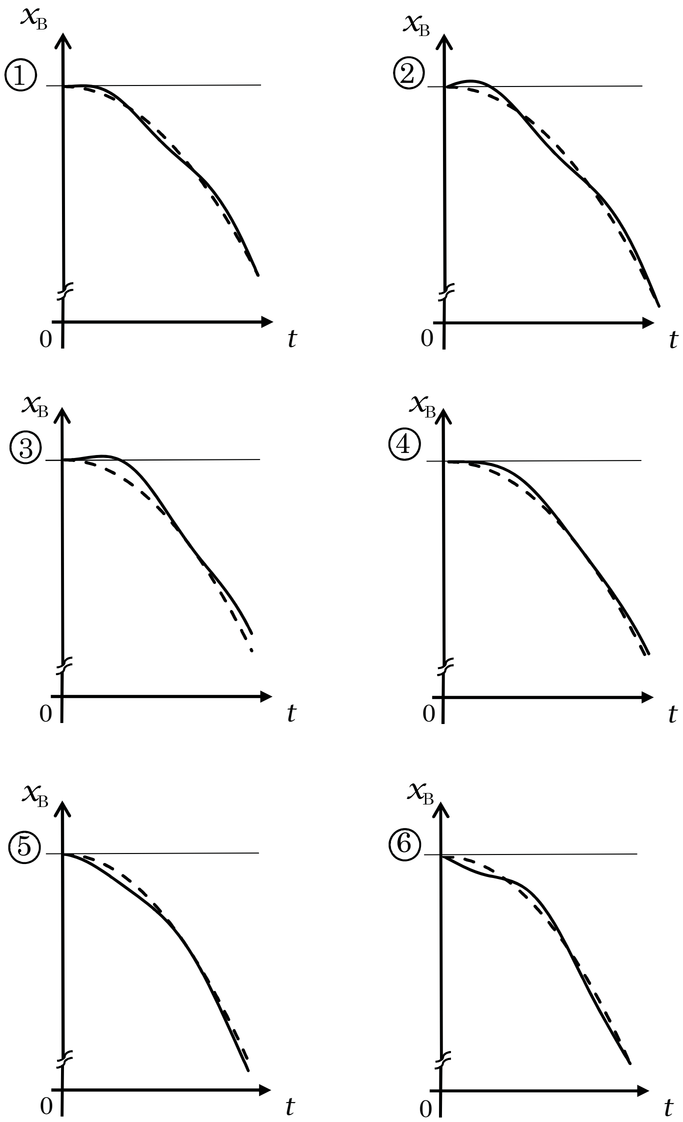


図 2: 物体 B の位置の時間変化

2.　図 3 のように，傾きが 45° の斜面の上端から物体を転がす．物体は球状で，斜面をすべらずに転がり落ちるものとする．床は水平であるとし，図のように床と平行に y 軸をとる．斜面の上端Aの座標は $(h_0, 0)$ であり，斜面の下端Bの座標は $(\frac{1}{2}h_0, \frac{1}{2}h_0)$ であるとする．点Bを通過したのち物体は放物運動をして床に到達する．床に点Cで衝突した物体は弾性的に跳ね上がり，上昇して最高点Dを通過する．点Dの高さ h を求めたい．この球状物体の半径を a ，慣性モーメントを I とする．

床はすべりやすく，床との衝突は物体の回転にも，また物体の重心の速度の床に平行な成分にも影響を与えないものと仮定する．物体は小さいとし，高さ h_0 に比べて半径 a を無視する．

点Bを通過する瞬間の物体の重心の速度を $\vec{v}_1$ ，回転角速度の大きさを ω_1 とし，点Dを通過する瞬間の物体の重心の速度を $\vec{v}_2$，回転角速度の大きさを ω_2 とする．$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ それぞれの床に垂直な成分を v_{1x}, v_{2x} とおき， 床に平行な成分を v_{1y}, v_{2y} とおく．

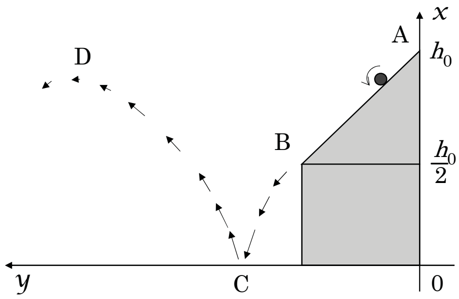


図 3: 転がり落ちた物体が床に当たって跳ね上がる

(1)　平面上をすべらずに転がる球状物体については，重心の速度と球の回転角速度の大きさの間に関係がある．微小時間の間に平面に沿って進む距離は，その間に回転によって順次平面との接点になるような球の表面上の弧の長さに等しいから，球の半径を a とすると $\omega_1 = \boxed{\textbf{B5}}$ である．

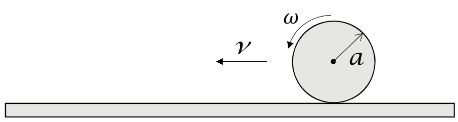


図 4: 滑らずに転がる球の重心の速度と回転の角速度

(2)　$\boxed{\textbf{B6}}$ 保存則により，物体が点Aから転がり落ち始める時と点Bを通過する時について，関係式

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mgh_0 + \boxed{\textbf{B7}}$$

が成り立つ．これと問 (1) の関係式から，点Bにおける速さとして

$$|\vec{v}_1| = \boxed{\textbf{B8}}$$

が得られ，また

$$v_{1x} = -\boxed{\textbf{B9}}\ \boxed{\text{B8}},\quad v_{1y} = \boxed{\textbf{BX}}\ \boxed{\text{B8}}$$

が成り立つ．比較するため，もしも斜面が滑らかで物体が転がらずに滑り落ちた場合の速さを求めると，

$|\vec{v}_1| = \boxed{\textbf{C1}}$ となる．

$\boxed{\text{B5}}$，$\boxed{\text{B7}}$～$\boxed{\text{C1}}$ の選択肢（$\boxed{\text{B6}}$の選択肢は問 (3) の下）

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $a|\vec{v}_1|$

⑥ $2a|\vec{v}_1|$ ⑦ $\frac{|\vec{v}_1|}{a}$ ⑧ $\frac{|\vec{v}_1|}{2a}$ ⑨ $m|\vec{v}_1|$ ⑩ $I\omega_1$

⑪ $m|\vec{v}_1| + I\omega_1$ ⑫ $\frac{1}{2}m\vec{v}_1{}^2$ ⑬ $\frac{1}{2}I\omega_1{}^2$ ⑭ $\frac{1}{2}m\vec{v}_1{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1{}^2$ ⑮ gh_0

⑯ $\sqrt{gh_0}$ ⑰ $\sqrt{2gh_0}$ ⑱ $\sqrt{\frac{m}{m+Ia^2}gh_0}$ ⑲ $\sqrt{\frac{ma^2}{ma^2+I}gh_0}$ ⑳ $\sqrt{\frac{4ma^2}{4ma^2+I}gh_0}$

(3) $\boxed{\textbf{C2}}$ 保存則により，物体の速度の床に平行な成分は点Bを通過した後に一定に保たれる．また，$\boxed{\textbf{C3}}$ 保存則により，物体の回転角速度は点Bを通過した後に一定に保たれる．さらに点Dでは，速度は $\boxed{\textbf{C4}}$ 方向を向いている．

これらに注意すると，

$$v_{2x} = \boxed{\textbf{C5}},\quad v_{2y} = \boxed{\textbf{C6}},\quad \omega_2 = \boxed{\textbf{C7}}$$

が成り立つことがわかる．

物体がA点を離れる時とD点を通過する時について成り立つ $\boxed{\text{B6}}$ 保存の関係式は，以上のことを用いて書き直すことができる．その結果，関係式

$$mgh_0 = mgh + \boxed{\textbf{C8}}$$

が得られる．

$\boxed{\text{B6}}$，$\boxed{\text{C2}}$～$\boxed{\text{C8}}$ の選択肢

① 運動量 ② エネルギー ③ 角運動量 ④ 質量 ⑤ 粒子数

⑥ x 軸 ⑦ y 軸 ⑧ 斜面 ⑨ 0 ⑩ v_{1x} ⑪ v_{1y}

⑫ $|\vec{v}_1|$ ⑬ $\vec{v}_1$ ⑭ ω_1 ⑮ $m|\vec{v}_1| + I\omega_1$ ⑯ $\frac{1}{2}I\omega_1{}^2$

⑰ $\frac{1}{2}m\vec{v}_1{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1{}^2$ ⑱ $\frac{1}{2}mv_{1x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1{}^2$ ⑲ $\frac{1}{2}mv_{1y}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1{}^2$ ⑳ $\frac{1}{2}mv_{2x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_2{}^2$

(4) ここまで考察したことを用いて h が求められる．とくに物体が均質な球体である場合には，$I = \frac{2}{5}ma^2$ であることを用いて，$h = \frac{19}{28}\boldsymbol{h_0}$が得られる. 比較するため，もしも斜面が滑らかで物体が転がらずに滑り落ちた場合の値を求めると，$h = \boxed{\textbf{C9}}\,h_0$ が得られる．

$\boxed{\text{C9}}$ の選択肢

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

⑥ $\frac{3}{4}$ ⑦ $\frac{3}{5}$ ⑧ $\frac{4}{5}$ ⑨ $\frac{5}{7}$ ⑩ $\frac{9}{14}$

大問５（物理学②）

図 1 のように台に円筒シリンダーが水平に固定され，シリンダー右端中央部に直立細管が接続されている．x 軸，y 軸を図のように定める．y 軸負の方向に重力が作用し重力加速度を g とする．シリンダー内には非圧縮性の密度ρの液体が満たされ，外圧 p_0 は細管内液面とピストンに等しくかかる．

図 1 A のように液面位置（y 座標）が 0 のときばね（ばね定数 k）が自然長であり，ピストン位置（x 座標）は x_0 である．つぎに図 1 B のように細管内に液体をある量追加したとき，液柱にかかる重力とばねの力がつりあったピストン位置（x 座標）が 0 であり，そのときの液面高を h とする．これを平衡位置とよぶ．このときシリンダー内液量と細管内液量は同程度とする．つぎに，ピストンに少しだけ力を加えて図 1 C のようにピストンを w だけ x 軸正方向に移動させた．このとき液面の平衡位置 $y = h$ からの上昇分（液面変位）を u とする．ただし $|u| << h$ とする．このピストンに加えた力を静かに取り除けばもとの平衡位置にもどる．

シリンダー内液体の y 座標はつねに 0 として，その重力位置エネルギーも 0 とする．シリンダーの断面積は S_1，細管内断面積が S_2 で，$S_2 << S_1$ とする．ピストンとばねの質量は無視する．ピストンの摩擦も液体粘性も無視する．

以下の各問に答えなさい．

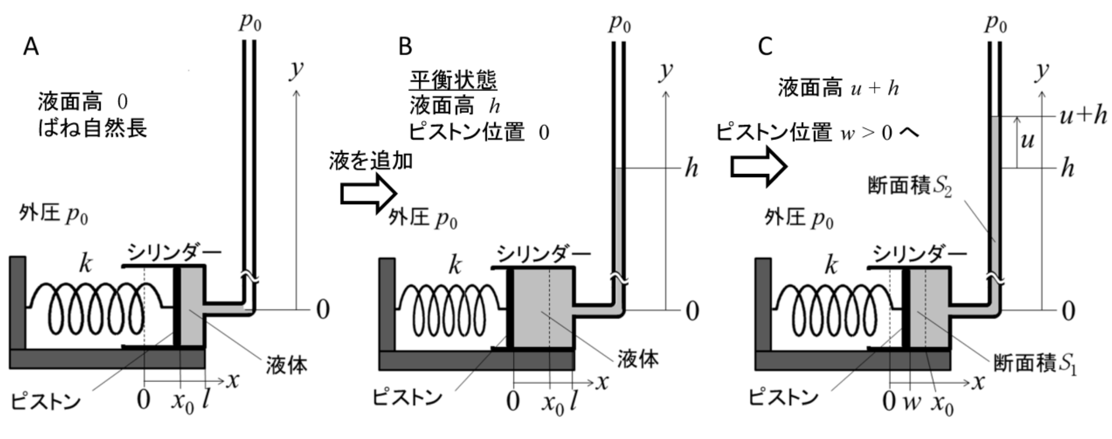


図 1

1. 平衡位置（図１ B）におけるシリンダー内の液圧は $\boxed{\text{A1}}$ である．このとき力のつり合いから $kx_0 = \boxed{\text{A2}}\ S_1$ となり，これはこの装置固有の関係でつねに成り立つ．つぎに小さな力をピストンに加えて図１B から図１C へ変化する過程では, $\boxed{\text{A3}}$ 保存則と液体の非圧縮性によって細管内液面変位 $u = \boxed{\text{A4}}\ w$ となる．そのとき細管内液柱の重力による位置エネルギーは

$$\boxed{\text{A5}}\ (\ \boxed{\text{A6}}\ )^2$$

である．一方，ばねの位置エネルギーは $\boxed{\text{A7}}$ である．細管内液柱の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和がこの系のポテンシャルエネルギーV である．平衡状態の V を V_0 として，$\Delta V = V - V_0$ とすると

$$\Delta V = \frac{1}{2}k\ \boxed{\text{A8}} + \frac{1}{2}g\ \boxed{\text{A9}} \tag{1}$$

となる．この系において，初期状態（$t = 0$ で $u = a$, 液面速度 0）からピストンに加えた力を取り除いた後，細管内液体が下がり平衡位置になる瞬間に，ΔV の初期値が液体の運動エネルギーにすべて変換されると考えれば，液面速度の最大値を求めることができる．

シリンダー内の液体の運動エネルギーと細管内液体の運動エネルギーの比を考えると，液量が同程度であることから，おおよそ w^2 / u^2 となり，前者は後者に比べて無視できる．したがって，細管内液面速度の最大値は

$$\left|\frac{du}{dt}\right|_{u=0} = a\left[\ \boxed{\text{AX}}\left(1+\frac{\boxed{\text{B1}}}{\boxed{\text{B2}}}\right)\right]^{1/2} \tag{2}$$

となる．

A1〜AX，B1，B2　の選択肢

①：ρgh,　②：$p_0 + \rho gh$，③：エネルギー，④：運動量，⑤：質量，⑥：$\dfrac{S_2}{S_1}$,

⑦：$\dfrac{S_1}{S_2}$,　⑧：h,　⑨：$u+h$,　⑩：$\dfrac{g}{h}$,　⑪：$\dfrac{1}{2}\rho g S_2$,　⑫：$\dfrac{1}{2}kw^2$,

⑬：$\dfrac{1}{2}k(w-x_0)^2$，⑭：$\rho g S_1^{\ 2}$，⑮：w^2，⑯：$(w-x_0)^2$，⑰：kS_1，⑱：kS_2，

⑲：$\rho S_2 u^2$，⑳：$\rho g S_2^{\ 2}$.

2. 図 1 C のような平衡位置近傍の微小な液面変位 u について運動方程式をたてて，初期条件（$t = 0$ で $u = a$ $(0 < a << h)$ および 液面速度= 0）を満たす解をもとめよう．細管の水平部はごく短く無視する．ここで微小量について補足する．例えば， $|u| << h$ の条件によって u は h に対して 1 次微小量である．2 つの 1 次微小量の積は 2 次微小量である．

細管内液体の運動量の時間変化率は，細管内液体にかかる力に等しい．よって細管内液体の運動方程式は次のように書ける．(3)式右辺は細管内液体にかかる力であり，ばねの復元力からシリンダー内液体の慣性力を引いた力（第 1 項）と細管内液体にかかる重力（第 2 項）の和である．

$$\frac{d}{dt}\left[\boxed{\text{B3}}\ \frac{du}{dt}\right] = \left[\boxed{\text{B4}} - \frac{d}{dt}\left\{\rho S_1(l-w)\frac{dw}{dt}\right\}\right]\frac{S_2}{S_1} - \boxed{\text{B3}}\,g \qquad (3)$$

ここで (S_2/S_1) は 1 次微小量であるが，ばね定数 k が大きな値であるため $k(S_2/S_1)^2$ は微小量ではないものとする．(3)式において 2 次以上の微小量を無視すると左辺と右辺はそれぞれ次のようになる．

$$\text{左辺} = \boxed{\text{B5}}\frac{d^2u}{dt^2} \qquad (4)$$

$$\text{右辺} = -\left[\ k\ \left(\boxed{\text{B6}}\right)^2 + \boxed{\text{B7}}\ \right]\ u \qquad (5)$$

よって次の運動方程式が得られる．

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\,\omega_0^{\,2}u \qquad (6)$$

$$\omega_0 = \left[\boxed{\text{B8}}\left(1+\frac{\boxed{\text{B9}}}{\boxed{\text{BX}}}\right)\right]^{1/2}$$

ω_0 がこの液柱の固有角振動数である．

(6)式の一般解 $u = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$ において，初期条件 $t = 0$ で $u = a$, 液面速度 0 を満足する解は次のようになる．

$$u = \boxed{\text{C1}}$$

この u の時間微分により液面速度を計算できる．その結果得られる最大液面速度は，この系の $\boxed{\text{C2}}$ 則から得た前小問の結果 $\boxed{\text{C3}}$ 式と一致する．さらに，(1)式の ΔV は液面変位 u の関数であり，ΔV からこの細管内液柱にはたらく y 方向の力 F を得ることができる。

$$F = \boxed{\text{C4}}$$

これは $\boxed{\text{C5}}$ 式に一致する．このように運動方程式は系の運動の時間発展を予測することができ， $\boxed{\text{C2}}$ 則とも矛盾せず上記論理の正当性を確かめることができる．

B3~BX，C1 の選択肢

①： $\rho g(u+h)$，　②： ρgh，　③： ρgS_1，　④： ρgS_2，　⑤： $\rho S_2 h$，

⑥： $\rho gS_1{}^2$，⑦： $\rho S_2(u+h)$，⑧： kS_2，⑨： $\frac{S_2}{S_1}$，　⑩： $\frac{S_1}{S_2}$，⑪： $\frac{g}{h}$，

⑫： $\frac{h}{g}$，⑬： $k(w-x_0)$，⑭： $-k(w-x_0)$，⑮： $a\sin\omega_0 t$，⑯： $a\cos\omega_0 t$．

C2~C5　の選択肢

①：質量保存，②：運動量保存，③：エネルギー保存，④： $\frac{d\Delta V}{dy}$ ，⑤： $-\frac{d\Delta V}{dy}$ ，

⑥：(1),　⑦：(2),　⑧：(3),　⑨：(4),　⑩：(5),　⑪：(6).

大問６（化学①）

必要があれば，以下の物理定数値を使うこと．

プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s　　電子の質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
真空中での光速 $c = 3.00 \times 10^{8}$ m s^{-1}

1. 水素原子スペクトルに関する以下の文章を読み，設問 (1)〜(6)に答えよ．

水素原子が出す光は，波長がとびとびに分布する線スペクトルを示す．気体の原子が発する光の波長は元素の種類により決まり，線スペクトルの波長の間隔は短波長側に向かって $\boxed{\text{A1}}$ 傾向を示す．バルマー（1825 〜 1898）は，水素原子から発せられる光の波長 λ [m] に式 1)のような規則性があることを見出した．

$$\lambda = 3.65 \times 10^{-7} \frac{n^2}{n^2 - 2^2} \quad (n = 3, 4, 5, 6) \qquad 1)$$

これらの光は，いずれも $\boxed{\text{A2}}$ 域で観測された．このように線スペクトルの波長は実験式にまとめられたが，当時の物理学（古典電磁気学）では，線スペクトルとして観測される理由を十分に説明することはできなかった．

ボーア（1885 〜 1962）は，ラザフォードの原子模型を採用しながらも，水素原子のスペクトル系列に着目し，いくつかの仮説を設け，従来の物理学（古典電磁気学）では説明できない難点を解決した．その仮説の一つに量子仮説がある．すなわち，原子には式 2)で許容されるいくつかの定常状態があり，電子の $\boxed{\text{A3}}$ が $\boxed{\text{A4}}$ の整数倍に限られるというものである．

$$m_e v r = n \cdot \boxed{\text{A4}} \qquad 2)$$

ここで v は速さ，r は軌道半径，n は正の整数をそれぞれ示す．この仮説にもとづくと，定常状態で電子が取り得るエネルギー E_n は連続ではなく，とびとびの値になる．水素原子の場合は，式 3)のように量子数 n の値によってエネルギー準位が定まる．

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) \qquad 3)$$

ここで e は電子の電荷，ε_0 は真空の誘電率をそれぞれ示す．さらに，ボーアは新たに遷移仮説を設定することで線スペクトルの波長の説明を試みた．すなわち，電子があるエネルギー準位から別のエネルギー準位に移るとき，2 つのエネルギー準位差のエネルギーを有する光を放射または吸収するという仮説を設けた．これに基づくと，高エネルギー準位（n_2）から低エネルギー準位（n_1）に遷移したときに放射される光の波長 λ は，

式 4)で表すことができる．

$$\lambda = \boxed{\quad \text{A5} \quad} \qquad 4)$$

ここで c は光速を示す．このようにして，ボーアは水素原子のスペクトルを理論的に説明することに成功した．

(1) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{A1}}$ に当てはまる語句として最も適切なものを，下の①～③のうちから 1 つ選べ．

① 狭くなる　② 広くなる　③ 等間隔の

(2) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{A2}}$ に当てはまる語句として最も適切なものを，下の①～③のうちから 1 つ選べ．

① 紫外光　② 可視光　③ 赤外光

(3) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{A3}}$ に当てはまる語句として最も適切なものを，下の①～③のうちから 1 つ選べ．

① 角周波数　② 角運動量　③ 運動量

(4) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{A4}}$ に当てはまる最も適切なものを，下の①～③のうちから 1 つ選べ．

① $h/2\pi$　② π/h　③ $2\pi/h$

(5) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{A5}}$ に当てはまる最も適切なものを，下の①～⑥のうちから 1 つ選べ．

① $\dfrac{8\varepsilon_0^2 h^3 c}{e^4 m_e}\left(\dfrac{1}{n_1^2}-\dfrac{1}{n_2^2}\right)$　② $\dfrac{8\varepsilon_0^2 h^3 c}{e^4 m_e}\left(\dfrac{1}{n_1^2}-\dfrac{1}{n_2^2}\right)^{-1}$　③ $\dfrac{e^4 m_e c}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\dfrac{1}{n_1^2}-\dfrac{1}{n_2^2}\right)$

④ $\dfrac{e^4 m_e c}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\dfrac{1}{n_1^2}-\dfrac{1}{n_2^2}\right)^{-1}$　⑤ $\dfrac{e^4 m_e c}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\dfrac{1}{n_2^2}-\dfrac{1}{n_1^2}\right)$　⑥ $\dfrac{e^4 m_e c}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\dfrac{1}{n_2^2}-\dfrac{1}{n_1^2}\right)^{-1}$

(6) 水素原子をイオン化するのに必要なエネルギー（電離エネルギー）として最も適切なものを下の①～⑥のうちから 1 つ選べ. $\boxed{\text{A6}}$

ただし，リュードベリ定数 R（$= \dfrac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$ ）は $1.09 \times 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$ とする.

① 5.48×10^{31} J　　② 1.82×10^{-32} J

③ 2.41×10^{-35} J　　④ 2.17×10^{-18} J

⑤ 2.03×10^{-49} J　　⑥ 4.61×10^{17} J

2. 元素の周期的性質に関連する以下の記述 a ～ d に正しいものが 2 つある. 最も適切な組み合わせを下の①～⑥のうち 1 つ選べ. $\boxed{\text{A7}}$

a 中性原子が電子と結合し，陰イオンとなるときに吸収するエネルギーを電子親和力という.

b 電子を引き付ける強さは，原子の表面の電場の強さに依存するという考えから，電気陰性度を見積る計算式を提案したのはポーリングである.

c 金属水素化物における水素原子の酸化数と，過酸化物における酸素原子の酸化数はともに－1 である.

d パウリの排他原理にしたがうと，主量子数 n, 方位量子数 l, 磁気量子数 m によって決まる軌道に収納できる電子は 2 つに限られ，その 2 つの電子は 2 つの異なるスピン量子数 s をもたなければならない.

① a と b	② a と c
③ a と d	④ b と c
⑤ b と d	⑥ c と d

3. 以下の文章を読み，設問 (1)〜(10)に答えよ．

HCl 分子中では塩素原子は水素原子の電子を引き寄せる傾向があり，HCl 分子は A8 を有する．HCl 分子のように分子全体で極性を示すような分子を極性分子（または有極性分子）という．異核 2 原子分子の双極子モーメント μ は， A9 .

一方，分子内の双極子が互いに打ち消され，分子全体で極性を示さない分子は無極性分子といわれる．しかしながら，無極性分子であっても外部電場の影響下では分子内の電子雲が移動し，正負の電荷の中心がずれると，一時的に双極子が生じることになる．この双極子を AX という． AX のモーメントは， B1 .

分子間力の主な起源は，これらの分子双極子の間に働く静電力であり， B2 種に分類することができる．そのうちの一つに B3 の分散効果に由来する力（分散力）がある．無極性分子（分子 1）は電子雲のゆらぎによって一時的に電荷がかたより双極子を生ずる．この双極子は近傍の無極性分子（分子 2）を分極させるので，近傍の無極性分子には AX が生じる．結果的に二つの無極性分子は静電力で引き合うことになる．分散効果による異種 2 分子間の相互作用エネルギーは式 1)で表される．

$$E(r) = -\frac{1}{16\pi^2}\left\{\frac{3I_1I_2}{2(I_1+I_2)}\right\}\frac{\alpha_1\alpha_2}{r^6} \qquad 1)$$

ここで r は分子間距離，I_1 と I_2 はそれぞれ分子 1 と分子 2 のイオン化エネルギー，α_1 と α_2 はそれぞれ分子 1 と分子 2 の分極率を表す. 式 1)に示すように分散力による相互作用エネルギーは分子間距離の 6 乗に反比例する．

分子間距離が狭まると原子核間や電子雲の反発が急速に強くなる. その反発エネルギーは分子間距離の B4 に反比例する．引力ポテンシャルと斥力ポテンシャルを加え合わせたものとしてはレナード・ジョーンズポテンシャルが広く知られる．反発ポテンシャルを正にとり，分子間距離に対してこのポテンシャルカーブを描くと，ある距離（分子間平衡距離）で B5 値をとる．

(1) 上記文章の空欄 A8 に当てはまる語句として適切なものを下の①〜③のうちから 1 つ選べ.

① 永久双極子　② 誘起双極子　③ 四重極子

(2) 上記文章の空欄 A9 に当てはまる文章として適切なものを下の①〜③のうちから 1 つ選べ.

① 帯電量と核間距離の両者に比例する
② 帯電量に比例して，核間距離に反比例する
③ 核間距離の 2 乗に反比例する

(3) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{AX}}$ に当てはまる語句として適切なものを下の①～③のうちから 1 つ選べ.

① 永久双極子　② 誘起双極子　③ 四重極子

(4) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{B1}}$ に当てはまる文章として適切なものを下の①～③のうちから 1 つ選べ.

① 電場の強さと分極率の両者に比例する
② 電場の強さに比例して，分極率に反比例する
③ 分極率に比例して，電場の強さに反比例する

(5) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{B2}}$ に当てはまる数字として適切なものを下の①～④のうちから 1 つ選べ.

① 2　② 3　③ 4　④ 5

(6) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{B3}}$ に当てはまる語句として適切なものを下の①～④のうちから 1 つ選べ.

① 長岡半太郎　② ロンドン　③ 湯川秀樹　④ フント

(7) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{B4}}$ に当てはまる語句として適切なものを下の①～④のうちから 1 つ選べ.

① 3 乗　② 4 乗　③ 6 乗　④ 12 乗

(8) 上記文章の空欄 $\boxed{\text{B5}}$ に当てはまる語句として適切なものを下の①～④のうちから 1 つ選べ.

① 極大　② 極小　③ 最大　④ 閾（しきい）

(9) 同種の 2 分子間で生じる分散効果による相互作用エネルギー式として適切なものを下の①～⑥のうちから 1 つ選べ．ただし，I と α はそれぞれ分子のイオン化エネルギーと分極率を表す． $\boxed{\text{B6}}$

① $E(r) = -\dfrac{3I}{64\pi^2}\dfrac{\alpha^2}{r^6}$　　② $E(r) = \dfrac{3I}{64\pi^2}\dfrac{\alpha^2}{r^6}$

③ $E(r) = -\dfrac{3I}{32\pi^2}\dfrac{\alpha}{r^6}$　　④ $E(r) = \dfrac{3I}{32\pi^2}\dfrac{\alpha}{r^6}$

⑤ $E(r) = -\dfrac{3I}{32\pi^2}\dfrac{\alpha^2}{r^{12}}$　　⑥ $E(r) = \dfrac{3I}{32\pi^2}\dfrac{\alpha^2}{r^{12}}$

(10) 分子間力，水素結合，イオン―イオン間の各相互作用エネルギーの代表的な大きさを調べた．相互作用の大きさの序列として適切なものを下の①～⑥のうちから 1 つ選べ． $\boxed{\text{B7}}$

① 分子間力 ＞ 水素結合 ＞ イオン―イオン間
② 分子間力 ＞ イオン―イオン間 ＞ 水素結合
③ イオン―イオン間 ＞ 分子間力 ＞ 水素結合
④ イオン―イオン間 ＞ 水素結合 ＞ 分子間力
⑤ 水素結合 ＞ 分子間力 ＞ イオン―イオン間
⑥ 水素結合 ＞ イオン―イオン間 ＞ 分子間力

大問 7 （化学②）

1. 熱力学に関する以下の問に答えよ．空欄 A1 ～ B2 に当てはまる最も適切なものを，選択肢からそれぞれ 1 つずつ選べ.

(1) ヘスの法則 A1
ラウールの法則 A2

① 反応系から生成系に至る異なる反応経路の中間段階ごとのエンタルピー変化 ΔH の総和は等しい値をとる.
② 多成分系の溶液と平衡にある蒸気中の i 成分の分圧 p_i は，溶液中の i 成分のモル分率 x_i に比例する.
③ 一定温度で一定量の液体に溶ける気体の量は，その気体の分圧に比例する.
④ 温度による相転移の平衡圧変化は，相転移のエンタルピー変化 ΔH とモル体積変化 ΔV_m に依存する.

(2) 可逆機関の 1 つであるカルノーサイクルでは，高温（$T = T_1$）熱源から熱 Q_1 を受け取り，低温 ($T = T_2$) 熱源に熱 $-Q_2$ を放出する．不可逆的な熱機関で同様に高温($T = T_1$) 熱源から熱 Q_1 を受け取り，低温 ($T = T_2$) 熱源に熱$-Q_2'$ を放出する.
このとき，

$Q_1/T_1 + Q_2/T_2$ A3 0　　1)

$Q_1/T_1 + Q_2'/T_2$ A4 0　　2)

である.
自然界で進行する自発的変化は，すべて有限の時間内で進む不可逆過程であるから孤立系で起こる変化は必ずエントロピーの A5 を伴うことになる.

A3 , A4
① >　② <　③ =　④ いずれでもない

A5
① 増加　② 減少　③ 収束　④ 発散

(3) 温度 T が融点 T_m よりも高いとき ($T > T_m$)，固相(S)および液相(L)の化学ポテンシャルを各々 μ^S および μ^L で表すと，両者の間には次の関係が成り立つ．

μ^S $\boxed{\text{A6}}$ μ^L

$\boxed{\text{A6}}$

① >　　② <　　③ =　　④ いずれでもない

(4) 圧力 1.0 atm おける 1.0 モルの水の相変化を考える．ただし，水の融点を 0℃，沸点を 100℃，モル融解熱を ΔH_{fus}，モル蒸発熱を ΔH_{vap} とする．また，0℃から 100℃までの水の定圧モル熱容量は一定であり C_p とする．

0℃の氷が 0℃の水になるとき，エントロピー変化　$\Delta S_1 =$ $\boxed{\text{A7}}$ である．
0℃の水が 100℃の水になるとき，エントロピー変化　$\Delta S_2 =$ $\boxed{\text{A8}}$ である．
0℃の水が 100℃の水になるとき，エンタルピー変化　$\Delta H_2 =$ $\boxed{\text{A9}}$ である．

$\boxed{\text{A7}}$～$\boxed{\text{A9}}$

① ΔH_{fus}　② ΔH_{vap}　③ C_p　④ $100\Delta H_{fus}$　⑤ $100\Delta H_{vap}$
⑥ $100C_p$　⑦ $H_{fus}/273$　⑧ $H_{vap}/273$　⑨ $H_{fus}/373$　⑩ $H_{vap}/373$
⑪ $C_p \ln(373/273)$　⑫ $C_p \ln(273/373)$　⑬ $C_p \ln(100/273)$　⑭ $C_p \ln(100/373)$
⑮ $100\Delta H_{fus}/273$　⑯ $100\Delta H_{vap}/273$　⑰ $100C_p/273$

(5) 一般的な気相化学反応

$$a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} \rightleftarrows c\,\mathrm{C} + d\,\mathrm{D} \qquad 3)$$

の平衡についてを考える．全圧を P，温度を T とし，反応前後の物質量（モル）変化を $\Delta n = (c + d) - (a + b)$ で表す.

式 3)の圧力平衡定数 K_P と濃度平衡定数 K_C との間の関係式を選べ.

AX

① $K_P = K_C / (P)^{\Delta n}$　② $K_P = (P)^{\Delta n} / K_C$　③ $K_P = K_C (P)^{\Delta n}$　④ $K_P = (K_C P)^{\Delta n}$

反応器中で式 3)の反応が進行した平衡状態から，温度 T を一定に保ったまま全圧 P を高くした．このとき平衡が正方向に移動するための条件を選べ.

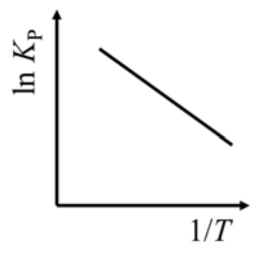
B1

① $\Delta n > 0$　② $\Delta n < 0$　③ $\Delta n = 0$　④ いずれでもない

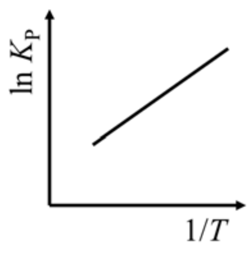
式 3)の反応が吸熱反応 ($\Delta H > 0$) であるとき，温度 T と圧力平衡定数 K_P の関係として，最も適切な $\ln K_P$ vs $1/T$ プロットを選べ.

B2

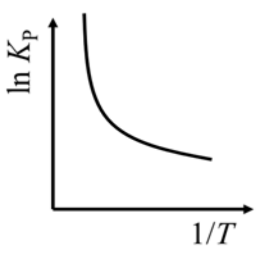
①



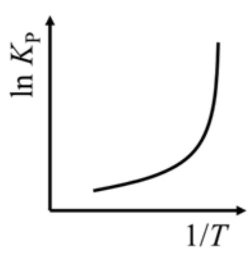
②



③



④



2. 電解質溶液に関する以下の問に答えよ．空欄 $\boxed{\text{B3}}$〜$\boxed{\text{C7}}$ に当てはまる最も適切なものを，選択肢からそれぞれ 1 つずつ選べ．

(1) アレニウス (Arrhenius) は，水に溶解して $\boxed{\text{B3}}$ を生ずる電解質を酸，$\boxed{\text{B4}}$ を生ずる電解質を塩基と定義した．ブレンステッド（Brønsted）とローリー（Lowry）は，$\boxed{\text{B3}}$ だけの動きに注目して，$\boxed{\text{B3}}$ を与える物質を酸，$\boxed{\text{B3}}$ を受け取る物質を塩基と定義した．この定義によると，水以外の溶媒に対しても酸と塩基を定義できる．HA が水と反応して，H_3O^+と A^-を生成するとき，反応は次式で表される．

$$HA \quad + \quad H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + \quad A^- \tag{1}$$

式 1)において，右向きの反応に注目すると $\boxed{\text{B5}}$ がブレンステッド酸，$\boxed{\text{B6}}$ がブレンステッド塩基となるのに対し，逆向きの反応では $\boxed{\text{B7}}$ がブレンステッド酸，$\boxed{\text{B8}}$ がブレンステッド塩基となる．

$\boxed{\text{B3}}$〜$\boxed{\text{B8}}$

① Na^+	② H^+	③ Cl^-	④ OH^-	⑤ HA	⑥ H_2O
⑦ H_3O^+	⑧ A^-	⑨ H	⑩ A	⑪ NaH	

(2) HA を弱酸とするとき，解離平衡は次式で表される．

$$\mathrm{HA} \rightleftharpoons \mathrm{H^+} + \mathrm{A^-} \qquad 2)$$

このとき，解離定数 K_a は,

$$K_a = \boxed{\text{B9}} \ . \qquad 3)$$

HA の初期濃度を C (mol dm^{-3})，解離度を α とすれば，$[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{A^-}] = C\alpha$, $[\mathrm{HA}] = C(1-\alpha)$ であるから，式 3)は,

$$K_a = \boxed{\text{BX}} \qquad 4)$$

と置き換えられる．解離度 α が十分に小さく，1 に対して無視できる場合は,

$$\alpha = \boxed{\text{C1}} \qquad 5)$$

$$\mathrm{pH} = \boxed{\text{C2}} \qquad 6)$$

である．ここで，pK_a は　$-\log K_a$ を記号化したもので，解離指数と呼ぶ.

$\boxed{\text{B9}}$

① $\dfrac{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$　② $\dfrac{[\mathrm{HA}]}{[\mathrm{H^+}][\mathrm{A^-}]}$　③ $\dfrac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$　④ $\dfrac{[\mathrm{H^+}]}{[\mathrm{A^-}]}$

$\boxed{\text{BX}}$, $\boxed{\text{C1}}$

① $\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$　② $\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}$　③ $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$　④ $\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$　⑤ $\dfrac{C\alpha^2}{1-\alpha}$　⑥ $\dfrac{1-\alpha}{C\alpha^2}$

⑦ $\dfrac{C}{K_a}$　⑧ $\dfrac{K_a}{C}$　⑨ $\left(\dfrac{C}{K_a}\right)^{1/2}$　⑩ $\left(\dfrac{K_a}{C}\right)^{1/2}$　⑪ $(CK_a)^{1/2}$

$\boxed{\text{C2}}$

① $(\log C + \mathrm{p}K_a)$　② $(\log C - \mathrm{p}K_a)$　③ $(\mathrm{p}K_a - \log C)$

④ $\dfrac{1}{2}(\log C + \mathrm{p}K_a)$　⑤ $\dfrac{1}{2}(\log C - \mathrm{p}K_a)$　⑥ $\dfrac{1}{2}(\mathrm{p}K_a - \log C)$

(3) 弱酸から生じたナトリウム塩 NaA では，加水分解反応が進行し溶液の pH を変化させる．$\mathrm{A^-}$は水と反応して，HA と $\mathrm{OH^-}$を生成する．

$$\mathrm{A^-} + \mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{HA} + \mathrm{OH^-} \qquad 7)$$

式 7)の平衡定数を K_h とすると,

$$K_h = \boxed{\text{C3}} \ . \qquad 8)$$

水のイオン積 $K_W = [\mathrm{H^+}][\mathrm{OH^-}]$ と弱酸 HA の解離定数 K_a を用いて式 8)を書き換えると

$$K_h = \boxed{\text{C4}} \ . \qquad 9)$$

NaA の初期濃度を C (mol dm^{-3})，加水分解度を h とすれば，[A$^-$] = $C(1-h)$,
[HA] = [OH$^-$] = Ch であるから式 9)は,

K_h = $\boxed{\text{C5}}$ 10)

と置き換えられる．加水分解度 h が十分に小さく，1 に対して無視できる場合は,

h = $\boxed{\text{C6}}$ 11)

pH = $\boxed{\text{C7}}$ 12)

である．

$\boxed{\text{C3}}$

① $\dfrac{[\text{HA}]}{[\text{OH}^-]}$　② $\dfrac{[\text{OH}^-]}{[\text{HA}]}$　③ $\dfrac{[\text{A}^-]}{[\text{HA}][\text{OH}^-]}$　④ $\dfrac{[\text{HA}][\text{OH}^-]}{[\text{A}^-]}$

$\boxed{\text{C4}}$, $\boxed{\text{C5}}$

① $K_W K_a$　② $\dfrac{K_W}{K_a}$　③ $\dfrac{K_a}{K_W}$　④ $\dfrac{1-h}{h^2}$　⑤ $\dfrac{h^2}{1-h}$

⑥ $\dfrac{C(1-h)}{h^2}$　⑦ $\dfrac{h^2}{C(1-h)}$　⑧ $\dfrac{1-h}{Ch^2}$　⑨ $\dfrac{Ch^2}{1-h}$

$\boxed{\text{C6}}$

① $\dfrac{CK_a}{K_W}$　② $\dfrac{K_W}{CK_a}$　③ $\left(\dfrac{CK_a}{K_W}\right)^{1/2}$　④ $\left(\dfrac{K_W}{CK_a}\right)^{1/2}$　⑤ $\left(\dfrac{K_a}{CK_W}\right)^{1/2}$　⑥ $\left(\dfrac{CK_W}{K_a}\right)^{1/2}$

$\boxed{\text{C7}}$

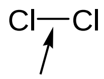
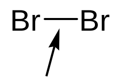
① $(\log C + \text{p}K_a)$　② $(\log C - \text{p}K_a)$　③ $(\text{p}K_a - \log C)$　④ $\frac{1}{2}(\log C + \text{p}K_a)$

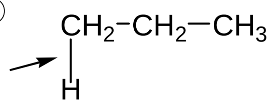
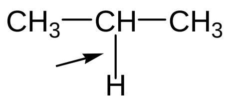
⑤ $\frac{1}{2}(\log C - \text{p}K_a)$　⑥ $\frac{1}{2}(\text{p}K_a - \log C)$　⑦ $7 + \frac{1}{2}(\log C + \text{p}K_a)$

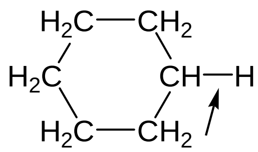
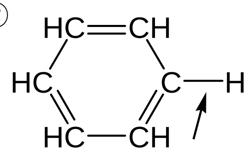
⑧ $7 + \frac{1}{2}(\log C - \text{p}K_a)$　⑨ $7 + \frac{1}{2}(\text{p}K_a - \log C)$　⑩ $7 - \frac{1}{2}(\log C + \text{p}K_a)$

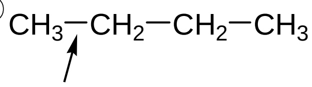
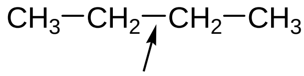
大問８（化学③）

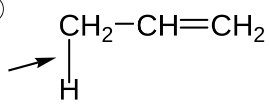
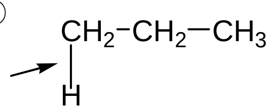
1. (1)～(5)に示した化合物について，矢印で示した結合の均一結合解離エネルギー（結合が均一に開裂して２つのラジカルになるときに必要なエネルギー）が大きい方を選べ.

(1) ①  ②  A1

(2) ①  ②  A2

(3) ①  ②  A3

(4) ①  ②  A4

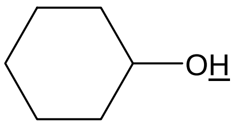
(5) ①  ②  A5

2. (1)～(5)に示した化合物について，下線を引いた水素原子がプロトンとして解離しやすい方を選べ.

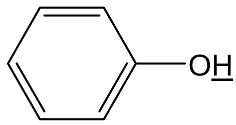
(1) ① $C\underline{H}_4$ ② $CH_3O\underline{H}$ $\boxed{\text{A6}}$

(2) ① $CH_3COO\underline{H}$ ② $CCl_3COO\underline{H}$ $\boxed{\text{A7}}$

(3) ①



②



$\boxed{\text{A8}}$

(4) ① $CH_2{=}C\underline{H}_2$ ② $CH{\equiv}C\underline{H}$ $\boxed{\text{A9}}$

(5) ① $C\underline{H}_3-\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{C}-CH_3$ ② $C\underline{H}_3-\underset{\underset{\displaystyle OH}{|}}{CH}-CH_3$ $\boxed{\text{AX}}$

3. シクロアルカンの環状構造を構成する炭素原子は，鎖状飽和炭化水素の場合と比較してひずんだ構造をとっていることが知られている．このひずみによるエンタルピー変化は，環を構成する炭素の数に非常に大きな影響を受ける．標準燃焼エンタルピー（$\Delta H°$）から，このひずみによるエンタルピー変化を推算する．

(1) プロパン（C_3H_8）, *n*-ブタン（C_4H_{10}）, *n*-ペンタン（C_5H_{12}）の$\Delta H°$は，それぞれ－530.6，－687.4，－845.2 kcal mol^{-1} である．これらを用いて CH_2 あたりの$\Delta H°$を見積もるとどの程度になるか．最も適切な数値を下の①～⑥のうちから 1 つ選べ．

$\boxed{\text{B1}}$ kcal mol^{-1}

①+176.8　② +171.2　③ +157.3　④ －157.3　⑤ －171.2　⑥ －176.8

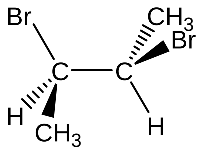
(2) シクロプロパン（C_3H_6），シクロブタン（C_4H_8），シクロヘキサン（C_6H_{12}）の$\Delta H°$は，それぞれ－499.8，－655.9，－944.5 kcal mol^{-1} である．ひずみによるエンタルピー変化がゼロと仮定した場合, C_nH_{2n} の$\Delta H°$は, (1)で求めた CH_2 あたりの$\Delta H°$の n 倍になると考えられる．これらを用いて，シクロプロパン，シクロブタン，シクロヘキサン，それぞれの CH_2 あたりのひずみによるエンタルピー変化を見積もり，最も適切な数値を下の①～⑪のうちから 1 つずつ選べ．

シクロプロパンの場合　$\boxed{\text{B2}}$ kcal mol^{-1}
シクロブタンの場合　$\boxed{\text{B3}}$ kcal mol^{-1}
シクロヘキサンの場合　$\boxed{\text{B4}}$ kcal mol^{-1}

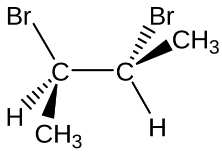
① +27.9　② +26.7　③ +9.3　④ +6.7　⑤ +1.4　⑥ 0.0
⑦ －1.4　⑧ －6.7　⑨ －9.3　⑩ －26.7　⑪ －27.9

4. 2-ブテンへの Br_2 の求電子付加反応とその生成物に関する次の設問 (1), (2) に答えよ.

(1) 次の化合物について，適切な名称を①～⑤からそれぞれ 1 つずつ選べ.

A 

B5

B 

B6

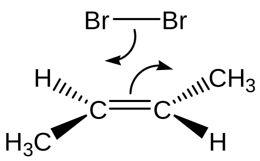
① (*2R*, *3R*)-2,3-ジブロモブタン　② (*2S*, *3S*)-2,3-ジブロモブタン

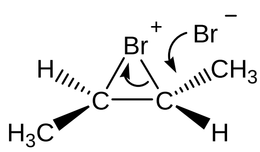
③ (*2R*, *3S*)-2,3-ジブロモブタン　④ (*2S*, *3R*)-2,3-ジブロモブタン

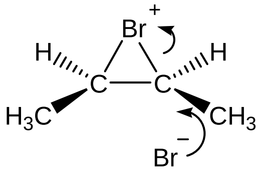
⑤ *meso*-2,3-ジブロモブタン

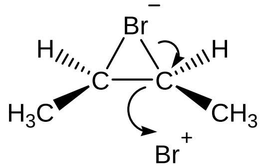
(2) (1)の化合物 A は, 2-ブテンへの Br_2 の求電子付加反応の生成物の 1 つである. 反応機構が最も適切なものを①～④から選べ.

B7

① 

② 

③ 

④ 

5. 以下の文章の空欄 $\boxed{\text{B8}}$ ～ $\boxed{\text{C5}}$ に当てはまる語句として最も適切なものを，選択肢からそれぞれ１つずつ選べ．

アルデヒドとケトンはカルボニル基をもち，カルボニル基がアルケンの二重結合と異なる点は，$\boxed{\text{B8}}$ が $\boxed{\text{B9}}$ に比べて電気陰性なため，$\boxed{\text{B9}}$ が δ＋に，$\boxed{\text{B8}}$ が δ－に分極していることと，$\boxed{\text{B8}}$ 上には 2 つの $\boxed{\text{BX}}$ が存在することである．このために，カルボニル基の $\boxed{\text{B8}}$ は $\boxed{\text{C1}}$ 的であり，ルイス酸などの攻撃を受ける．一方，$\boxed{\text{B9}}$ は $\boxed{\text{C2}}$ 的であり，$\boxed{\text{C3}}$ などによる攻撃を受ける．アルキル基のみをもつアルデヒドやケトンの求核試薬に対する反応性は，一般的に $\boxed{\text{C4}}$ のほうが高い．その理由として，アルキル基による立体障害とアルキル基の $\boxed{\text{C5}}$ があげられる．

$\boxed{\text{B8}}$, $\boxed{\text{B9}}$
① 水素原子　② 炭素原子　③ 酸素原子　④ 窒素原子

$\boxed{\text{BX}}$
① π電子　② σ電子　③ 不対電子　④ 非共有電子対

$\boxed{\text{C1}}$, $\boxed{\text{C2}}$
① 求電子　② 求核　③ 親水　④ 疎水

$\boxed{\text{C3}}$
① 水素原子　② 水素分子　③ アニオン　④ カチオン

$\boxed{\text{C4}}$
① アルデヒド　② ケトン

$\boxed{\text{C5}}$
① 電子供与性　② 電子求引性　③ 共有結合性　④ 疎水性

＜試験を終えた学生のみなさんへ＞

　統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の 1 年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

＊統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP　http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/

問合せメールアドレス　eng-edu@grp.tohoku.ac.jp