令和 02 年度　統一テスト

（理数基礎学力到達度テスト）

＜問題冊子①＞必答問題

大問１（数学①）

試験時間　45 分間

＊解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません＊

【解答する際の注意】

１．大問１専用の解答用紙１枚（裏面もあり）を用いること．

２．マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること．

３．解答の仕方に特に指示が無い場合は，問題文の空欄 $\boxed{\text{A1}}$, $\boxed{\text{A2}}$, ・・・にあてはまるものを該当する解答群（選択肢）から選び，選択肢の番号①，②・・・で答えること．同じ選択肢が複数回あてはまることもある．

４．空欄の中には通常の式では不要な「1」「−1」「0」が当てはまることがある．その場合も，式が成り立つために必要なものとして選択し，解答すること．

５．問題に関する質問は，汚損で読めない等以外は原則認めない．

東北大学　工学部

大問１（数学①）必答問題

ビル，トンネル，橋など，鉄筋コンクリート構造物（図 1-1 左に模式図）は，社会インフラに欠かせない．鉄筋コンクリート構造物の強度と耐久性は高いが，もちろん経年劣化はしていく．しかしながら，適切な修繕を施すことで劣化の進行を遅らせることは可能である．劣化の原因としては，周辺環境に含まれる物質と反応する化学的作用，繰返し載荷や大きな温度変化などの物理的作用，その他にも多くの要因がある．ここでは，化学的作用に起因する一連の劣化の一つである，鉄の酸化により鉄筋が錆びることを取り上げる．

コンクリートは細かい空隙が数多く存在する多孔質体であり，空隙中に空気と水を含んでいる．周辺環境中の物質がコンクリートの空隙を通って侵入して化学反応することでコンクリートの内部環境が変化し，ある条件に達すると鉄筋が錆び始める．

本問では，最も簡単なモデルとして中心軸に鉄筋が 1 本だけ入っている鉄筋コンクリート円柱（図 1-1 右）を考える．この円柱が大気中に置かれているとし，また，コンクリートは均質であると仮定する．このモデルを用いて，まずコンクリート内部の物質の挙動を支配する微分方程式を立て，それから，鉄筋が錆びていく間のコンクリート内部の酸素の挙動を議論する．

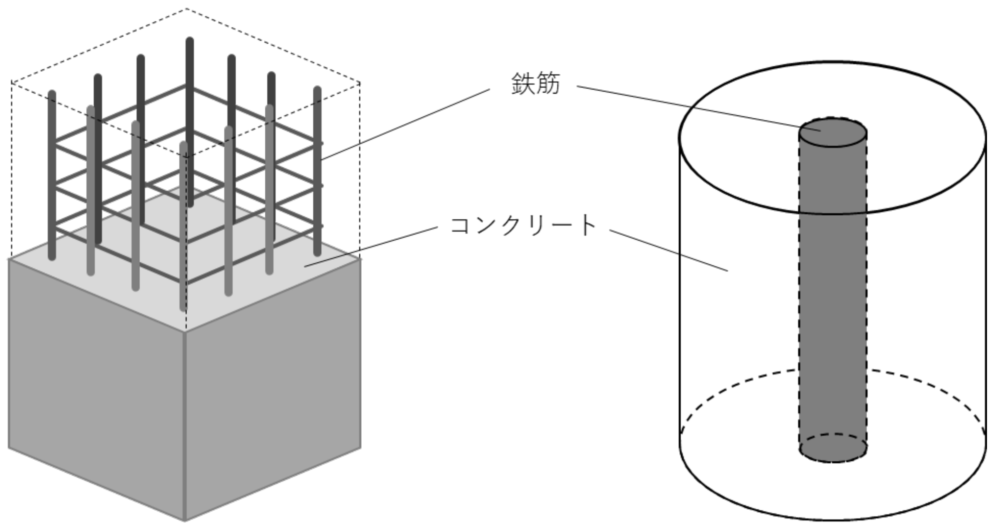

図 1-1　鉄筋コンクリートの模式図（左）と円柱モデル（右）

1. コンクリート円筒の内部における物質収支を考え，物質の挙動を支配する微分方程式を導く．

(1) 座標系と微小扇形要素を設定する．

図 1-2 のように，鉄筋コンクリート円柱に対して，空間の独立変数を r，θ，z とする円柱座標系をとり，各軸方向の基本ベクトルを $\vec{e}_r$，$\vec{e}_\theta$，$\vec{e}_z$ とおく．円柱内部の微小扇形要素を考える．この要素の中心を位置 (r,θ,z) とし，Δr，$\Delta\theta$，Δz は図 1-2 の通りとする．このとき，微小要素の境界面の面積を ΔS_{r-}，ΔS_{r+}，$\Delta S_{\theta-}$，$\Delta S_{\theta+}$，ΔS_{z-}，ΔS_{z+}，微小要素の体積を ΔV とおくと，次のように表される．

r 軸と直交する境界面の面積	$\Delta S_{r-} = (\boxed{\text{A1}})\Delta\theta\Delta z$	（内側の円弧面）
	$\Delta S_{r+} = (\boxed{\text{A2}})\Delta\theta\Delta z$	（外側の円弧面）
θ 軸と直交する境界面の面積	$\Delta S_{\theta-} = (\boxed{\text{A3}})\Delta r\Delta z$	（右側の側面）
	$\Delta S_{\theta+} = (\boxed{\text{A4}})\Delta r\Delta z$	（左側の側面）
z 軸と直交する境界面の面積	$\Delta S_{z-} = (\boxed{\text{A5}})\Delta r\Delta\theta$	（下面）
	$\Delta S_{z+} = (\boxed{\text{A6}})\Delta r\Delta\theta$	（上面）
体積	$\Delta V = (\boxed{\text{A7}})\Delta r\Delta\theta\Delta z$	

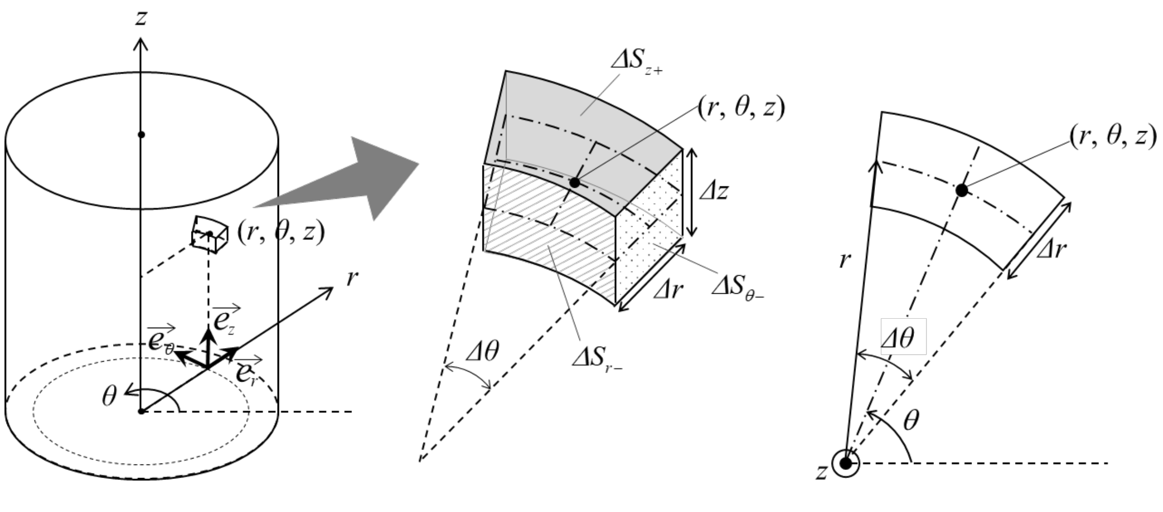

図 1-2　円柱座標系、基本ベクトル、微小扇形要素

---

① $r-\Delta r/2$	② $r+\Delta r/2$	③ $r-\Delta r$	④ $r+\Delta r$	⑤ r
⑥ $\theta-\Delta\theta/2$	⑦ $\theta+\Delta\theta/2$	⑧ $\theta-\Delta\theta$	⑨ $\theta+\Delta\theta$	⑩ θ
⑪ $z-\Delta z/2$	⑫ $z+\Delta z/2$	⑬ $z-\Delta z$	⑭ $z+\Delta z$	⑮ z
⑯ $-1/2$	⑰ $1/2$	⑱ -1	⑲ 1	⑳ 0

(2) 扇形微小要素における物質収支を考える．

本問では，空隙中の気体と液体の流動は無い，化学反応によるコンクリートの固気液比の変化はない，と仮定する．また，拡散（濃度差により生じる移動）については，気相中に比較して液相中の拡散が非常に小さいことから気相中の拡散のみを考えることにする．

したがって，微小要素における物質量の時間変化は，気相中の拡散による正味の流入量と化学反応による正味の生成量によって決まり，モル基準では次式で表される．コンクリートの場合，二酸化炭素や酸素などについて考えることになるが，各物質に関して成り立つ式である．

$$\frac{\partial m(r,\theta,z,t)}{\partial t}\phi\Delta V = -\iiint_{\Delta V} \operatorname{div}\vec{J}(r,\theta,z,t)\,dV + R(r,\theta,z,t)\phi\Delta V \qquad (1\text{-}1)$$

t ：任意の時刻

ϕ ：コンクリートの有効拡散気相率（拡散可能な気相の体積割合）

m ：コンクリート気相中のモル濃度

R ：化学反応による気相の単位体積あたりのモル生成速度

$\vec{J}$ ：コンクリート中のモル拡散流束

（流束とは単位時間あたりに単位面積を通過する量のこと）

(3) 円柱座標系における拡散流束場の発散 $\operatorname{div}\vec{J}$ を定義から求める．

ベクトル場の発散は，任意の点における単位時間・単位体積あたりの正味の流出量と定義される．よって，任意の微小体積からの単位時間あたりの正味の流出量を求めてから，最後に体積をゼロに近づける極限をとることで導かれる．

ベクトル場における有界領域からの正味の流出量は，その領域の境界面を通して流出する量の総和であり，ベクトル場の境界面上での面積分で与えられる．したがって，ベクトル場 $\vec{J} = J_r\vec{e}_r + J_\theta\vec{e}_\theta + J_z\vec{e}_z$ の発散は次式で定義される．

$$\operatorname{div}\vec{J} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}\vec{n}\cdot\vec{J}\,dS}{\Delta V} \qquad (1\text{-}2)$$

ここで，ΔS は境界面の面積，$\vec{n}$ は境界面の外向きの単位法線ベクトルである．各境界面の面積は問(1)の通りである．各境界面の外向きの単位法線ベクトルを $\vec{n}_{r-}$，$\vec{n}_{r+}$，$\vec{n}_{\theta-}$，$\vec{n}_{\theta+}$，$\vec{n}_{z-}$，$\vec{n}_{z+}$ とおく．例えば，$\vec{n}_{\theta-} = (\boxed{\text{A8}})\vec{e}_r + (\boxed{\text{A9}})\vec{e}_\theta + (\boxed{\text{AX}})\vec{e}_z$ である．単位法線ベクトルと拡散流束ベクトルの内積をとるということは，拡散流束ベクトルの成分のうち単位法線ベクトルと同じ方向の成分を考えていることに等しい．

各面における拡散流束 $\vec{J}$ が面の中心座標における関数値で代表されるとすると，発散の式(1-2)中の面積分の部分は，3 つの方向に分けて以下のように求められる．

θ 方向の正味の流出量

$$= \iint_{\Delta S_{\theta-}} \vec{n}_{\theta-} \cdot \vec{J}(r, \theta - \Delta\theta/2, z, t) dS_{\theta-} + \iint_{\Delta S_{\theta+}} \vec{n}_{\theta+} \cdot \vec{J}(r, \theta + \Delta\theta/2, z, t) dS_{\theta+}$$

$$= (\boxed{\text{B1}}) J_\theta(r, \theta - \Delta\theta/2, z, t) \Delta S_{\theta-} + (\boxed{\text{B2}}) J_\theta(r, \theta + \Delta\theta/2, z, t) \Delta S_{\theta+}$$

ここで，$J_\theta(r, \theta - \Delta\theta/2, z, t)$ を θ についてテイラー展開して 1 次微小量まで残すと，

$$J_\theta(r, \theta - \Delta\theta/2, z, t) = J_\theta(r, \theta, z, t) + (\boxed{\text{B3}}) \frac{\partial J_\theta(r, \theta, z, t)}{\partial \theta}$$

を得る．同じように $J_\theta(r, \theta + \Delta\theta/2, z, t)$ も近似する．これらの近似式と，問(1)で求めた境界面の面積 $\Delta S_{\theta-}$， $\Delta S_{\theta+}$ および体積 ΔV に関する式を用いると，次式を得る．

θ 方向の正味の流出量

$$= \Delta V \left\{ (\boxed{\text{B4}}) \frac{\partial J_\theta(r, \theta, z, t)}{\partial \theta} + (\boxed{\text{B5}}) J_\theta(r, \theta, z, t) \right\} \tag{1-3}$$

r 方向と z 方向についても，θ 方向と同様に求められる．

$$r \text{ 方向の正味の流出量} \quad = \Delta V \left\{ \frac{\partial J_r(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} J_r(r, \theta, z, t) \right\} \tag{1-4}$$

$$z \text{ 方向の正味の流出量} \quad = \Delta V \left\{ \frac{\partial J_z(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right\} \tag{1-5}$$

式(1-3)～(1-5)の和が微小扇形要素からの正味の流出量であるので，式(1-2)に代入すると，円柱座標系におけるベクトル場 $\vec{J}$ の発散を得る．

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\boxed{\text{B6}})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\boxed{\text{B7}})}{\partial \theta} + \frac{\partial(J_z)}{\partial z} \tag{1-6}$$

ここで，コンクリート中の有効拡散係数を D（次元：[長さ]^2[時間]$^{-1}$）とすると，拡散流束は $\vec{J} = -D \cdot \operatorname{grad} m$ で与えられるため，円柱座標系におけるスカラー場の勾配の表式を考慮すると，次式で表される．

$$\vec{J} = \left(-D \frac{\partial m}{\partial r}\right) \vec{e}_r + \left(-D \frac{1}{r} \frac{\partial m}{\partial \theta}\right) \vec{e}_\theta + \left(-D \frac{\partial m}{\partial z}\right) \vec{e}_z \tag{1-7}$$

式(1-7)を式(1-6)に代入する．有効拡散係数 D を定数とすると，拡散流束場の発散は次式のように求められる．

$$\operatorname{div} \vec{J} = -D \left\{ \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m}{\partial r} + (\boxed{\text{B8}}) \frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2} + (\boxed{\text{B9}}) \frac{\partial m}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \right\} \tag{1-8}$$

----

① $-\Delta\theta/2$	② $\Delta\theta/2$	③ $-\Delta\theta$	④ $\Delta\theta$	⑤ r	⑥ $1/r$	⑦ r^2	⑧ $1/r^2$
⑨ $-J_r$	⑩ J_r	⑪ $-J_\theta$	⑫ J_θ	⑬ $-rJ_r$	⑭ rJ_r	⑮ $-rJ_\theta$	⑯ rJ_θ
⑰ $-D$	⑱ -1	⑲ 1	⑳ 0				

(4) 物質の挙動の支配方程式を得る．

式(1-1)の拡散流束の項において，拡散流束 $\vec{J}$ が微小扇形要素の中心座標における関数値で代表されるとすると $\iiint_{\Delta V} dV = \Delta V$ である。したがって，物質収支の式(1-1)は次のように整理される．

$$\phi \frac{\partial m(r,\theta,z,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{J}(r,\theta,z,t) + \phi R(r,\theta,z,t) \tag{1-9}$$

式(1-8)を式(1-9)に代入すると，物質の挙動を支配する微分方程式を得る．

$$\phi \frac{\partial m}{\partial t} = D\left\{\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial m}{\partial r} + (\boxed{\text{B8}})\frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2} + (\boxed{\text{B9}})\frac{\partial m}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\right\} + \phi R \tag{1-10}$$

ここで濃度が，θ 方向には軸対称であるとすると $\boxed{\text{BX}}$ であり，z 方向には一様であるとすると $\boxed{\text{C1}}$ である．よって，物質の挙動を支配する微分方程式は，式(1-10)から式(1-11)のように単純化される．また，拡散流束も式(1-12)のように簡単に表される．

$$\phi \frac{\partial m(r,t)}{\partial t} = D\left\{\frac{\partial^2 m(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial m(r,t)}{\partial r}\right\} + \phi R(r,t) \tag{1-11}$$

$$\vec{J}(r,t) = -D\frac{\partial m(r,t)}{\partial r}\vec{e}_r \tag{1-12}$$

得られた偏微分方程式(1-11)を各物質について解くことで，各物質の濃度分布や拡散流束分布の時間変化を知ることができる．

----

① $m(t)=0$ ② $m(r)=0$ ③ $m(\theta)=0$ ④ $m(z)=0$

⑤ $\partial m/\partial t=0$ ⑥ $\partial m/\partial r=0$ ⑦ $\partial m/\partial \theta=0$ ⑧ $\partial m/\partial z=0$

⑨ $\vec{e}_r=0$ ⑩ $\vec{e}_\theta=0$ ⑪ $\vec{e}_z=0$

(空白ページ)

2. 鉄筋が錆びていく間のコンクリート内部の酸素の挙動を考える．

酸素が供給されることで鉄筋が錆びていくので，式(1-11)を酸素に関する支配方程式にする．まず，酸素はコンクリート構成物質と反応しないので，式(1-11)において $\boxed{\text{C2}}$ の項はゼロである．鉄筋表面に到達した酸素は全て瞬時に鉄の酸化に消費されるとする．また，鉄筋が錆び始めると直ぐに，コンクリート中の酸素の挙動は定常（物質の移動はあるが各点の濃度の時間変化は無い）になると仮定する．したがって，式(1-11)の $\boxed{\text{C3}}$ の項をゼロとすることができる．以降，m をコンクリート気相中の酸素のモル濃度，D をコンクリート中の酸素の有効拡散係数，$\vec{J}$ をコンクリート内部の酸素のモル拡散流束とする．

(1) 式(1-11)から得られる酸素濃度の微分方程式を考える．

定常の場合，偏微分方程式(1-11)から次の 2 階の常微分方程式を得る．

$$\frac{d^2 m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dm(r)}{dr} = 0 \tag{1-13}$$

ここで，$dm(r)/dr = p(r)$ とおくと，次のように微分方程式の階数を下げることができる．

$$\frac{dp(r)}{dr} + \frac{1}{r}p(r) = 0 \tag{1-14}$$

この式を変数分離法で解くと，式(1-14)の一般解として $p(r) = c_1 \boxed{\text{C4}}$（$c_1$：定数）を得る．よって，次の微分方程式を得る．

$$\frac{dm(r)}{dr} = c_1 \boxed{\text{C4}} \tag{1-15}$$

これを解くことで，式(1-13)の一般解として次式を得る．

$$m(r) = c_1 \boxed{\text{C5}} + c_2 \qquad (c_1,\ c_2\ ：定数) \tag{1-16}$$

(2) 拡散流束の式(1-12)から得られる微分方程式の解を考える．

定常の場合，式(1-12)から酸素の拡散流束は単純に $\vec{J} = -D\dfrac{dm(r)}{dr}\vec{e}_r$ と表される．ここで，図 1-3 のように，z 方向に単位長さを持つコンクリート円柱を考える．位置 r の円柱面を単位時間あたりに通過して出ていく酸素量 $Q(r)$は，流束と通過する面積の積で表されるので，次式となる．

$$Q(r) = \boxed{\text{C6}}\left(-D\frac{dm(r)}{dr}\right)$$

これは位置 r に依らず一定となるので，$Q(r)$を定数とおける．これを変形して得られる微分方程式の形は式(1-15)と同じとなり，問(1)と同様に $m(r) = c_1 \boxed{\text{C5}} + c_2$ を得る．

(3) 境界条件を考慮して酸素濃度の関数を得る．

鉄筋表面を $r=r_0$，コンクリート表面を $r=r_s$，大気中の酸素濃度を m_s とする．定数を求めるために境界条件を考える．コンクリート表面は大気と接触しているので，$\boxed{\text{C7}}$ である．一方，鉄筋表面に到達した酸素は瞬時に鉄の酸化で消費されると仮定しているので，$\boxed{\text{C8}}$ である．これらの境界条件より定数が得られ，酸素のモル濃度およびモル拡散流束の関数は次式のようになる．

酸素濃度：
$$m(r)=\frac{\boxed{\text{C9}}}{\boxed{\text{CX}}}\log_e(r/r_0) \tag{1-17}$$

酸素拡散流束：
$$\vec{J}=\frac{\boxed{\text{D1}}}{r\,\boxed{\text{CX}}}\vec{e}_r \tag{1-18}$$

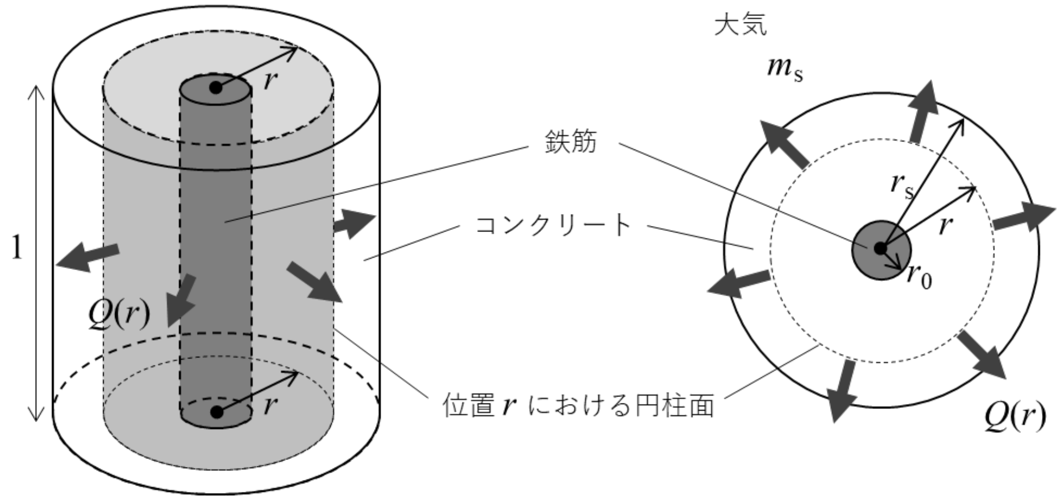

図 1-3 コンクリート内部の位置 r の円柱面を通過して出ていく酸素

---

① $2\pi r$ ② πr^2 ③ $(1/r)$ ④ $(1/r^2)$ ⑤ r

⑥ $\log_e r$ ⑦ $\log_e(r_s/r_0)$ ⑧ $\log_e r_s$ ⑨ $\log_e r_0$

⑩ $(-m_s)$ ⑪ m_s ⑫ $(-Dm_s)$ ⑬ Dm_s

⑭ $m(r_0)=0$ ⑮ $m(r_0)=-\infty$ ⑯ $m(r_s)=m_s$ ⑰ $m(+\infty)=m_s$

⑱ 時間変化 ⑲ 拡散による流入 ⑳ 化学反応による生成

3. 鉄筋が錆びていく間のコンクリート内部の酸素の挙動を，具体的な数字で調べる．

(1) 具体的な数字を入れて，酸素の濃度と拡散流束の関数を得る．

直径 20 mm の鉄筋に厚み 50 mm のコンクリートを被せていて，常温・大気圧における定数や係数が下記のように与えられるとする．

鉄筋表面の位置： $r_0 = 1.0\times10^{-2}$ m

コンクリート表面の位置： $r_{\mathrm{s}} = 6.0\times10^{-2}$ m

大気中の酸素濃度： $m_{\mathrm{s}} = 9.0$ mol/m^3 (20 vol.%)

コンクリート中の酸素の有効拡散係数： $D = 2.0\times10^{-8}$ m^2/s

これらを式(1-17)と(1-18)に代入すると，酸素の濃度と拡散流束の分布を表す関数を次式のように得る．

（参考：対数関数の概数値　$\log_e 2 = 0.7$， $\log_e 3 = 1.1$， $\log_e 5 = 1.6$， $\log_e 7 = 1.9$．）

酸素濃度： $$m(r) \simeq \boxed{\text{D2}}\ \log_e \frac{r}{1.0\times10^{-2}}$$

酸素拡散流束： $$\vec{J} \simeq -\frac{1.0\times\boxed{\text{D3}}}{r}\vec{e}_r$$

(2) コンクリート内部の酸素拡散流束の大きさと向きを調べる．

解答用紙裏面の記述欄 1 に図 1-4 が印刷されているので, 酸素拡散流束の大きさのグラフを描きなさい．また，記述欄 2 に図 1-5 が印刷されているので，酸素の拡散流束のベクトル図を描きなさい．位置 $r = 0.02$，0.04，0.06 m，かつ，$\theta = 0$，$\pi/4$，$\pi/2$ の 9 箇所に，ベクトルの相対的な大きさを反映させた矢印を描くこと．

これらの図より，鉄筋が錆びていく間，コンクリート内部では，酸素は $\boxed{\text{D4}}$ から $\boxed{\text{D5}}$ に向かって移動しており，拡散流束の大きさは $\boxed{\text{D6}}$ ことが分かる．

適切なモデルを立てて条件を設定することで，鉄筋が錆びて健全な鉄の部分が細っていく速度を予測することができる．また，鉄が錆びることにより鉄筋自体は体積膨張するため，いずれはコンクリートのひび割れに繋がる．よって，できるだけ鉄筋が錆び始める内部環境に至らないように，鉄筋コンクリートが晒される環境を考慮して設計および維持・管理をすることが重要になる．

---

① コンクリート表面　② 鉄筋表面

③ 3.0　④ 4.0　⑤ 5.0　⑥ 6.0　⑦ 7.0　⑧ 8.0　⑨ 9.0

⑩ 外側ほど大きい　⑪ 内側ほど大きい　⑫ 外側でも内側でも同じである

⑬ 10^{-3}　⑭ 10^{-4}　⑮ 10^{-5}　⑯ 10^{-6}　⑰ 10^{-7}　⑱ 10^{-8}　⑲ 10^{-9}

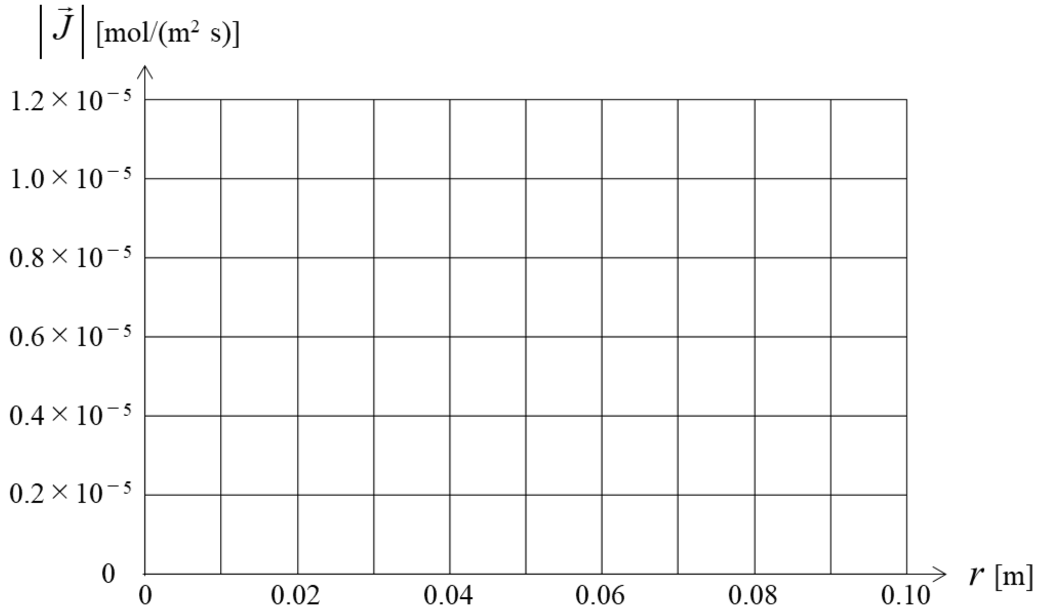

図 1-4　コンクリート内部の酸素の拡散流束の大きさの分布

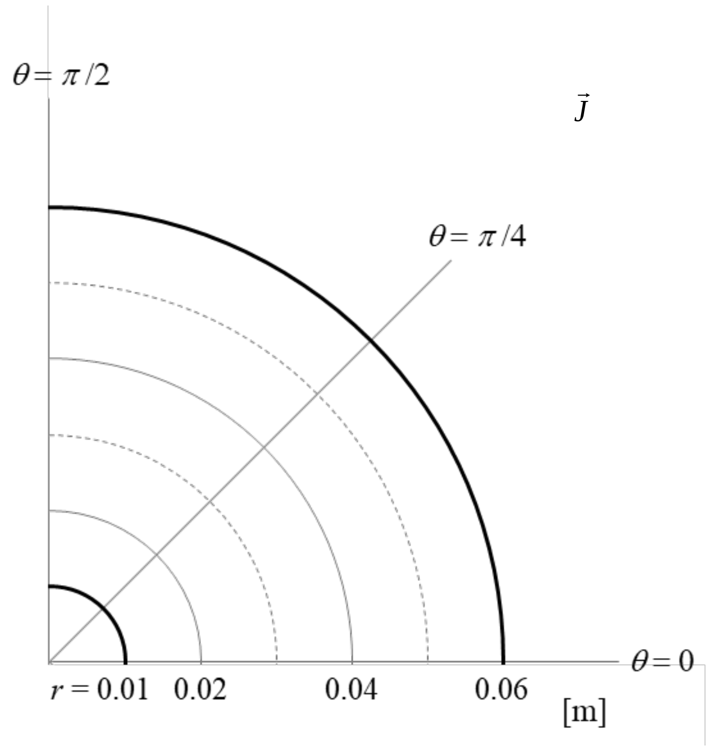

図 1-5　コンクリート内部の酸素の拡散流束の分布（ベクトル図）

＜学生のみなさんへ＞

　統一テストの大問１は工学的総合問題です。みなさんは、大学に入ってすぐに学科の専門科目を学びたいのだと思いますが、専門科目を学ぶためには高校までに学ぶ内容に加えて、さらに高度な数学・物理学・化学が必要です。大問１の工学的総合問題は、大学で学ぶ理数系基礎科目の内容が工学の中でどのように使われるのかを、簡単な例を用いて段階的に示しています。式が具体的に何を表わしているかを、是非意識するようにしましょう。

＊統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP　http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/

問合せメールアドレス　eng-edu@grp.tohoku.ac.jp