

平成 30 年度 統一テスト
(理数基礎学力到達度テスト)
＜問題冊子①＞必答問題

大問 1 (数学①)

試験時間 13:30～14:15

解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません

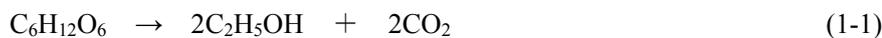
【解答する際の注意】

1. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚 (裏面もあり) を用いること.
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること (マーク式のみの大問もあり).
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は, 問題文の **A1**, **A2**, … にあてはまるものを該当する解答群 (選択肢) から選び, 選択肢の番号①, ②…で答えること. 同じ選択肢が複数回あてはまることもある.
4. 問題に関する質問は, 汚損で読めない等以外は原則認めない.

大問1 (数学①) 必答問題

人類は昔から微生物(菌)の働きを利用してきた。代表的なもののひとつがアルコール発酵であり、例えば、葡萄からワインが、サトウキビからバイオエタノールがつくられるプロセスである。アルコール発酵は、嫌気環境における酵母菌の代謝活動などにより、糖からアルコールが生成される反応である。

いま、バイオエタノールの工業的な生産プロセスの中で、酵母によってグルコース(ブドウ糖)を嫌気発酵してエタノールを生成する、全体として次式で表せる反応を考える。



ここで、円管を用いて流通反応系(流れながら反応が進む系)でエタノールを生産することを考える。図1-1に示すように、水に酵母を一定割合で混合した液を管内に非常に小さい流速で流しておき、円管の途中から高濃度のグルコース水溶液を投入し始める。グルコースは酵母の働きにより次第にエタノールに変換されるため、グルコースとエタノールの濃度は位置によって異なり、また時間とともに変化する。このような流通反応系におけるグルコースとエタノールの濃度に関する以下の各問に答えなさい。手順としては、物質収支に基づく微分方程式を立てて解くことにより濃度分布を求める。

本問では、グルコース投入開始からの時間を t とし、投入位置の円管中央を原点とする固定座標系を用いることとする。また、グルコース水溶液を投入しても流体の体積は変化しない、生成した二酸化炭素は全て液中に溶存している、および、流体は等温等圧に保たれる、と仮定する。

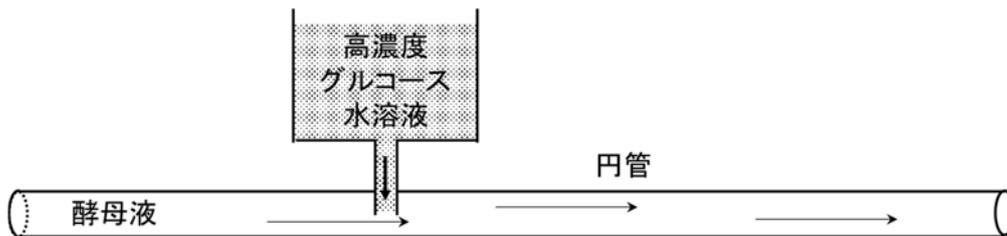


図1-1 流通反応系における発酵反応によるエタノール生成

1. 流体中に複数の化学種が存在する場合の、各化学種の物質収支を考える。

化学種 i の質量が **A1** 変化を正とし、**A2** 変化を負とすると、流体中の微小部分における物質収支は次のようになる。全ての項が、単位体積・単位時間あたりの化学種 i の質量についてのものである。

質量の時間変化

$$= \text{流れによる正味の流入量} + \text{拡散による正味の流入量} + \text{正味の発生量}$$

なお、正味の流入量とは「周りから微小部分への総流入量」から「微小部分から周りへの総流出量」を差し引いたものであり、正味の発生量とは「微小部分における総発生量」から「微小部分における総消失量」を差し引いたものである。

ここで、流体質量に占める化学種 i の質量の割合である質量分率を m_i (次元: **A3**), 流体の密度を ρ (次元: **A4**), 流体の流速を \vec{u} (次元: [長さ][時間]⁻¹), 化学種 i の質量拡散係数を D_i (次元: [長さ]²[時間]⁻¹) とする。これらの変数を使うと、化学種 i の質量濃度 (単位体積中の化学種 i の質量) は **A5** と表される。

(1) 流体中の微小部分における周りからの正味の流入量を考える。

単位時間あたりに単位面積を通過する量を流束という。流れによるものを移流流束、拡散によるものを拡散流束と呼ぶ。

質量分率 m_i で流体中に存在する化学種 i が、**A6** に移動するため、流れ場 (流速分布を表すベクトル場) \vec{u} による化学種 i の質量の移流流束 \vec{I}_i は、 $\vec{I}_i = \vec{u} \rho m_i$ で与えられる。

一方、拡散は濃度差により生じる移動である。質量濃度場 (質量濃度分布を表すスカラー場) ρm_i の勾配による化学種 i の質量の拡散流束 \vec{J}_i は、**A7** に化学種が移動するため、 $\vec{J}_i = -D_i \text{grad } \rho m_i$ のように濃度勾配に比例し、比例係数 D_i を質量拡散係数という。化学種 i の質量の移流流束 \vec{I}_i と拡散流束 \vec{J}_i の次元は **A8** である。

流束による単位時間あたりの単位体積からの正味の流出量がベクトル場である流束場の発散で表されることから、正味の流入量は流束場の発散に負号を付けたものである。

-
- ①流れと同方向 ②流れと逆方向 ③濃度勾配と同方向 ④濃度勾配と逆方向
⑤増加する ⑥減少する ⑦無次元 ⑧[質量][長さ]⁻² ⑨[質量][長さ]⁻³
⑩[質量][長さ]⁻²[時間]⁻¹ ⑪[長さ][時間]⁻¹ ⑫[長さ]²[時間]⁻¹ ⑬[長さ][時間]⁻²
⑭ m_i ⑮ $\vec{u} m_i$ ⑯ ρm_i ⑰ $D_i m_i$ ⑱ m_i / \vec{u} ⑲ m_i / ρ ⑳ m_i / D_i

(2) 流体中の微小部分における正味の発生量について考える。

発生量は反応による化学種 i の生成速度 (単位体積・単位時間あたりの生成質量) R_i である。式(1-1)で表されるアルコール発酵は、糖濃度が低い範囲では反応速度 (アルコールの生成速度) が糖濃度に比例する 1 次反応であるとする。このときの比例係数を反応速度定数と呼ぶ。式(1-1)の反応速度定数を k' とすると、エタノールのモル生成速度は次式で表される。

$$\frac{d}{dt} [C_2H_5OH] = k' [C_6H_{12}O_6] \quad (1-2)$$

ここで、式中の [] はモル濃度を表す。反応速度定数 k' は、反応の次数により次元が異なるが、1 次反応の場合の次元は [時間] $^{-1}$ である。グルコース 1 モルが反応してエタノールと二酸化炭素が **A9** モルずつ生成するため、モル濃度で考えるとグルコースの反応速度はエタノールの **AX** 速度の **B1** 倍であるので次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} [C_6H_{12}O_6] = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [C_2H_5OH] \quad (1-3)$$

式(1-2)と式(1-3)よりグルコースのモル濃度の時間変化は次式で表される。

$$\frac{d}{dt} [C_6H_{12}O_6] = -\frac{1}{2} k' [C_6H_{12}O_6] \quad (1-4)$$

これらの式より、エタノールの **AX** 速度もグルコースの反応速度もグルコース濃度 **B2** ことがわかる。モル基準の反応速度定数 k' を質量基準の生成速度定数 k_i に変換する。モル濃度は **B3** を **B4** のモル質量で除したものであるため、化学種 i として G : glucose と E : ethanol を考えると、式(1-2)と式(1-4)は次のように書き換えられる。ここで各元素の原子のモル質量を $H = 1 \text{ g mol}^{-1}$, $C = 12 \text{ g mol}^{-1}$, $O = 16 \text{ g mol}^{-1}$ とする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho m_E}{46} \right) = k' \left(\frac{\rho m_G}{180} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho m_G}{180} \right) = -\frac{1}{2} k' \left(\frac{\rho m_G}{180} \right)$$

これらを整理すると、化学種 i の生成速度 R_i は $R_i = k_i \rho m_G$ で表わされる。ただし、

$$k_E = \frac{46}{180} k' (> 0), \quad k_G = -\frac{1}{2} k' (< 0) \text{ である。}$$

- ① 1/4 ② 1/2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4 ⑥ 生成 ⑦ 消失 ⑧ 密度
 ⑨ 質量分率 ⑩ 質量濃度 ⑪ モル分率 ⑫ モル濃度 ⑬ 原子 ⑭ 分子
 ⑮ に比例する ⑯ に反比例する
 ⑰ の 2 乗に比例する ⑱ の 1/2 乗に比例する

(3) 物質収支式を得る.

小問(1), (2)から, 化学種 i の物質収支式は次式で表すことができる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_i) = -\operatorname{div}(\bar{u}\rho m_i) - \operatorname{div}(-D_i \operatorname{grad} \rho m_i) + k_i \rho m_G \quad (1-5)$$

ここで, 従属変数 $m_i, \rho, \bar{u}, D_i, k_i$ は, 各々, 空間と時間の独立変数を持つ4変数関数なので, 式(1-5)は4つの独立変数を持つ複雑な偏微分方程式である. どのような空間成分表示による微分方程式になるかは, 座標系の取り方に依存する.

2. 具体的な独立変数を用いて微分方程式を表わす.

(1) 円管に適する座標系におけるベクトルとスカラーの微分を考える.

管内を流体が流れる場合は, 流れる方向を正として管の軸を z 軸にとり, 管断面が方形であれば直角座標系を用いて空間の独立変数を x, y, z とし, 本問のように円形であれば円柱座標系を用いて空間の独立変数を r, θ, z とするのが都合がよい. 座標系の取り方が異なると, 式(1-5)の右辺に出てくる勾配や発散の表示形式が異なる.

スカラー場 f の勾配とベクトル場 \vec{A} の発散は, 直角座標系では次式で表される.

$$\nabla f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

これらを直角座標から円柱座標へ変数変換する. z 軸は同一なので (x, y) と (r, θ) を変換する. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ であるので, (r, θ) の (x, y) に関する偏微分は次式となる.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \boxed{\text{B5}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \boxed{\text{B6}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \theta$$

また, 図 1-2 から分かるように, 直角座標系と円柱座標系の単位ベクトルの関係は次式で表される.

$$\vec{e}_x = \boxed{\text{B7}} \vec{e}_r + \boxed{\text{B8}} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_y = \boxed{\text{B9}} \vec{e}_r + \boxed{\text{B9}} \vec{e}_\theta$$

一方, 連鎖律を用いると直角座標による偏微分演算子は円柱座標による偏微分演算子により次式で表される.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

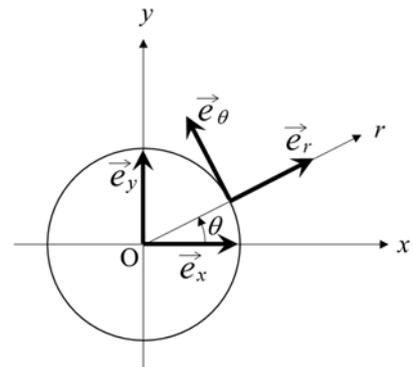


図 1-2 両座標系の単位ベクトル

また, ベクトル \vec{A} は次式のようにどちらの座標系の単位ベクトルを用いても表せる.

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta$$

以上の関係式を利用すると, スカラー場 f の勾配とベクトル場 \vec{A} の発散は, 円柱座標系では次のように表される (z 軸も考慮して示す).

$$\nabla f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-6)$$

-
- ① $\cos \theta$ ② $\sin \theta$ ③ $-\cos \theta$ ④ $-\sin \theta$ ⑤ $1/\cos \theta$ ⑥ $1/\sin \theta$
 ⑦ $-1/\cos \theta$ ⑧ $-1/\sin \theta$ ⑨ $r \cos \theta$ ⑩ $r \sin \theta$ ⑪ $-r \cos \theta$ ⑫ $-r \sin \theta$
 ⑬ $(1/r) \cos \theta$ ⑭ $(1/r) \sin \theta$ ⑮ $-(1/r) \cos \theta$ ⑯ $-(1/r) \sin \theta$

(2) 微分方程式を単純化する.

式(1-6)を用いて, 円柱座標系で式(1-5)の物質収支式を表示すると, 次のような非常に複雑な偏微分方程式になる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_i) = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \{r(\bar{u} \rho m_i)_r\}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{u} \rho m_i)_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (\bar{u} \rho m_i)_z}{\partial z} \right] - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(-D_i \frac{\partial (\rho m_i)}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ -D_i \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho m_i)}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -D_i \frac{\partial (\rho m_i)}{\partial z} \right\} \right] + k_i \rho m_G$$

この式の解析解を求めることは事実上不可能であり, 数値計算により近似解を求めることも難しい. そのため, 解析対象である流通反応系を近似し得るいくつかの仮定を設けて微分方程式を単純化する.

まず, 従属変数の数を減らす. 流体の密度 ρ , 質量拡散係数 D_i , 生成速度定数 k_i が **C1** に依らず一様で **C2** に依らず一定であると仮定する. また, 流速 \bar{u} が **C3** の成分のみを持ち **C4** に依らず一様であると仮定し, 一様な流れの速さを u とおく. これらの仮定より化学種 i の物質収支式は次のように少し簡単になる.

$$\rho \frac{\partial m_i}{\partial t} = -\rho u \frac{\partial m_i}{\partial z} + \rho D_i \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial m_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial m_i}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial m_i}{\partial z} \right) \right\} + k_i \rho m_G$$

次に, 独立変数の数を減らす. 各化学種の濃度が円管の軸を中心に対称であるとする **C5** には依らない. 更に, **C6** には各化学種の濃度は一様であると仮定すると **C7** には依らない. よって, 2つの独立変数を持つ次式を得る.

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = -u \frac{\partial m_i}{\partial z} + D_i \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} + k_i m_G$$

この偏微分方程式を満足する濃度関数 $m_i = m_i(z, t)$ を求めることができれば, 円管軸方向の濃度分布の時間変化を知ることが可能だが, ここまで単純化できる場合でも解析解を求めることは難しく, そのような場合は数値計算により近似解を求めることになる. ここでは, 十分に時間が経って濃度場が定常である (物質の移動や反応・生成はあるが各点の濃度の時間変化は無い) ときを考えることにし, 以下の2階の常微分方程式を得る.

$$D_i \frac{d^2 m_i}{dz^2} - u \frac{dm_i}{dz} + k_i m_G = 0 \quad (1-7)$$

-
- ①位置 (r, θ, z) ②位置 (r, θ) ③位置 (θ, z) ④位置 (r, z) ⑤位置 (r)
 ⑥位置 (θ) ⑦位置 (z) ⑧時間 (t) ⑨円管軸方向 ⑩円管径方向
 ⑪円管周方向

3. グルコースおよびエタノールの濃度に関する微分方程式を解く。

式(1-7)をグルコースおよびエタノールについて具体的に書くと次式となる。以降、関数 m_i の1階の空間微分を m'_i と表わすこともある。

$$\text{グルコース} : D_G \frac{d^2 m_G}{dz^2} - u \frac{dm_G}{dz} + k_G m_G = 0 \quad (1-8)$$

$$\text{エタノール} : D_E \frac{d^2 m_E}{dz^2} - u \frac{dm_E}{dz} = -k_E m_G \quad (1-9)$$

なお、グルコース投入位置 ($z=0$) においては、グルコース濃度が所定濃度 m_{G0} (定数) に保たれるように、投入量が制御されているとする。

(1) グルコース濃度に関する微分方程式(1-8)を解いて濃度分布の式を求める。

$m_G(z) = \text{C8}$ とした特性方程式 $\lambda^2 - \frac{u}{D_G} \lambda + \frac{k_G}{D_G} = 0$ の解は $\lambda = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4k_G D_G}}{2D_G}$ となる。グルコース濃度は反応が進むことで C9 ため、常に $0 < u^2 < u^2 - 4k_G D_G$ である。よって、式(1-9)の一般解は次式となる。ここで、以降の計算を簡単にするため $v = \sqrt{u^2 - 4k_G D_G}$ とおく。

$$m_G(z) = c_1 \exp\left(\frac{u+v}{2D_G} z\right) + c_2 \exp\left(\frac{u-v}{2D_G} z\right) \quad (c_1 \text{ と } c_2 \text{ は定数})$$

定数は境界条件により求めることができる。まず、題意より $m_G(0) = m_{G0}$ である。また、グルコースは反応する化学種であることから、十分に遠方では流体中に存在しなくなる。よって、 CX が与えられる。グルコース投入位置よりも上流 ($z \leq 0$) の場合と下流 ($z \geq 0$) の場合に分けて考えると、各々の場合の境界条件より各々の場合の定数 c_1 と c_2 を得るので、グルコースの濃度分布は次式で表される。

$$\text{上流側} : m_G(z) = m_{G0} \exp\left(\frac{u+v}{2D_G} z\right) \quad (1-10)$$

$$\text{下流側} : m_G(z) = m_{G0} \exp\left(\frac{u-v}{2D_G} z\right) \quad (1-11)$$

- ① λ ② λz ③ $e^{\lambda z}$ ④ 増加する ⑤ 減少する ⑥ 変わらない
 ⑦ $m_G(+\infty) = 0$ ⑧ $m_G(-\infty) = 0$ ⑨ $m_G(\pm\infty) = 0$ ⑩ $m'_G(+\infty) = 0$ ⑪ $m'_G(-\infty) = 0$ ⑫ $m'_G(\pm\infty) = 0$
 ⑬ $m_G(0) = 0$ ⑭ $m_G(0) = m_{G0}$ ⑮ $m_G(0) = 2m_{G0}$ ⑯ $m'_G(0) = 0$ ⑰ $m'_G(0) = m_{G0} u / D_G$

(2) エタノール濃度に関する微分方程式(1-9)を解いて濃度分布の式を求める。

式(1-9)は2階の非斉次常微分方程式であるが、次式のように書くこともできる。

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{dm_E}{dz} - \frac{u}{D_E} m_E \right) = -\frac{k_E}{D_E} m_G$$

よって、次のように1階の非斉次常微分方程式に階数を下げることができる。

$$\frac{dm_E}{dz} - \frac{u}{D_E} m_E = -\frac{k_E}{D_E} \int m_G dz$$

グルコース投入位置よりも上流側および下流側について、各々、定数変化法を用いて微分方程式を解くと、 $c_3 \sim c_6$ を定数として次のように一般解を得る。

$$\text{上流側: } m_E(z) = -\frac{m_{G0} k_E}{D_E} \frac{2D_G}{u+v} \frac{1}{\frac{u+v}{2D_G} z - \frac{u}{D_E}} \exp\left(\frac{u+v}{2D_G} z\right) + c_3 \exp\left(\frac{u}{D_E} z\right) + c_4 \quad (1-12)$$

$$\text{下流側: } m_E(z) = -\frac{m_{G0} k_E}{D_E} \frac{2D_G}{u-v} \frac{1}{\frac{u-v}{2D_G} z - \frac{u}{D_E}} \exp\left(\frac{u-v}{2D_G} z\right) + c_5 \exp\left(\frac{u}{D_E} z\right) + c_6 \quad (1-13)$$

定数を求めるために境界条件を考える。グルコース投入位置よりも上流に存在するエタノールは、流れに **D1** 拡散してくるものと上流側に存在するグルコースから生成されるものだけであり、十分に遠方では流体中に存在しなくなるので **D2** である。グルコース投入位置よりも下流では、エタノールは流れに **D3** 運ばれるため十分に遠方であっても流体中に存在する。十分遠方における濃度は一定となるので **D4** である。定常状態ではエタノールの生成量はグルコース投入量で定まるので、下流側の十分遠方における一定濃度を $m_E(+\infty) = (2 \times 46 / 180) m_{G0}$ とする。また、グルコース投入位置において、エタノール濃度の値は1つなので **D5** である。これらの境界条件より、4つの定数を次のように求めることができる。

$$c_3 = \text{D6} + \frac{m_{G0} k_E}{D_E} \left(\frac{2D_G}{u+v} \frac{1}{\frac{u+v}{2D_G} - \frac{u}{D_E}} - \frac{2D_G}{u-v} \frac{1}{\frac{u-v}{2D_G} - \frac{u}{D_E}} \right), \quad c_4 = \text{D7},$$

$$c_5 = \text{D8}, \quad c_6 = \text{D9}$$

- ① 乗って ② 逆らって ③ 関係なく ④ 0 ⑤ 1 ⑥ -1
 ⑦ $m_E(+\infty) = 0$ ⑧ $m_E(-\infty) = 0$ ⑨ $m_E(\pm\infty) = 0$ ⑩ $m'_E(+\infty) = 0$ ⑪ $m'_E(-\infty) = 0$ ⑫ $m'_E(\pm\infty) = 0$
 ⑬ $m_E(-0) = m_E(+0)$ ⑭ $m'_E(-0) = m'_E(+0)$ ⑮ $m'_E(-0) = m'_G(-0)$ ⑯ $m'_E(+0) = m'_G(+0)$
 ⑰ $\frac{2 \times 46}{180} m_{G0}$ ⑱ $\frac{46}{2 \times 180} m_{G0}$ ⑲ $-\frac{2 \times 46}{180} m_{G0}$ ⑳ $-\frac{46}{2 \times 180} m_{G0}$

4. 具体的な数字を入れてグルコースおよびエタノールの濃度分布の特徴を調べ、それらのグラフを描きなさい。

25°C, 0.101 MPa (1 気圧) の温度・圧力条件下で、実験室規模の流通反応系におけるエタノール生成を試みる。直径 1.0×10^{-2} m の円管に流速 $u = 1.0 \times 10^{-6}$ m s⁻¹ で流体を流す (極めて小さい流速であるが制御できるとする)。拡散は分子拡散のみとして下記にある水に対する分子拡散係数を用い、エタノール発酵の反応速度定数から下記のように各々の生成速度定数を得る。これらは、25°C, 0.101 MPa における値である。

投入位置におけるグルコース濃度 (質量分率) : $m_{G0} = 0.10$ (10 wt.%)

質量基準の分子拡散係数 : $D_G = 6.8 \times 10^{-10}$ m² s⁻¹ , $D_E = 1.0 \times 10^{-9}$ m² s⁻¹

質量基準の生成速度定数 : $k_G = -2.0 \times 10^{-5}$ s⁻¹ , $k_E = 1.0 \times 10^{-5}$ s⁻¹

これらの値を式(1-10)~(1-13)に代入すると、グルコースおよびエタノールの濃度 (質量分率) の分布は次式で表される。

$$\text{グルコース濃度 : 上流側 : } m_G(z) = 0.10e^{1.5 \times 10^3 z}$$

$$\text{下流側 : } m_G(z) = 0.10e^{-2.0 \times 10^1 z}$$

$$\text{エタノール濃度 : 上流側 : } m_E(z) = -1.40 \times 10^{-3} e^{1.5 \times 10^3 z} + 1.72 \times 10^{-3} e^{1.0 \times 10^3 z}$$

$$\text{下流側 : } m_E(z) = -5.08 \times 10^{-2} e^{-2.0 \times 10^1 z} + 5.11 \times 10^{-2}$$

- (1) グルコース濃度 $m_G(z)$ とエタノール濃度 $m_E(z)$ の式が、どのような位置変化の特徴を表わしているかを考える。なお、計算に必要なならば、次の概数値を用いなさい。

参考 : 対数関数の値 (概数) $\log_e 2 = 0.7$, $\log_e 3 = 1.1$, $\log_e 5 = 1.6$, $\log_e 7 = 1.9$.

グルコースは投入位置からの距離が大きくなるにつれて濃度が小さくなる。ただし、指数関数の指数部分の係数の絶対値が、上流側が下流側よりも 2 桁も大きいことから分かるように、濃度の減少は **DX** の方が急激である。例えば $m_G = 1.0 \times 10^{-4}$ (0.01 wt.%) のように、投入濃度に比べればゼロに等しいと言える程度にまで濃度が小さくなる距離は、上流側は概ね **E1** m, 下流側は概ね **E2** m である。

エタノールは、グルコース投入位置ではゼロではないが濃度は非常に小さく、 $m_E = 3 \times 10^{-4}$ (0.03 wt.%) である。上流側では $m_E = 1.0 \times 10^{-4}$ (0.01 wt.%) まで濃度が小さくなる距離は概ね 2.5×10^{-3} m である。これらのエタノール濃度は、投入位置のグルコース濃度 0.10 (10 wt.%) から考えると無視してよい大きさであり、上流側にはエタノールはほとんど

ど存在しない。エタノール濃度は下流側では単調増加し、投入位置から概ね E3 m の位置でグルコース濃度を上回るようになり、その後は $m_E = 5.1 \times 10^{-2}$ (5.1 wt.%) に漸近する。

-
- | | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| ① 1.5×10^{-3} | ② 2.5×10^{-3} | ③ 3.5×10^{-3} | ④ 4.5×10^{-3} | ⑤ 5.5×10^{-3} |
| ⑥ 1.5×10^{-2} | ⑦ 2.5×10^{-2} | ⑧ 3.5×10^{-2} | ⑨ 4.5×10^{-2} | ⑩ 5.5×10^{-2} |
| ⑪ 1.5×10^{-1} | ⑫ 2.5×10^{-1} | ⑬ 3.5×10^{-1} | ⑭ 4.5×10^{-1} | ⑮ 5.5×10^{-1} |
| ⑯ 上流側 | ⑰ 下流側 | ⑱ 投入位置 | ⑲ より急激 | ⑳ より緩やか |
-

(2) 解答用紙裏面の記述欄 1 に図 1-3 のようなエタノール濃度分布 $m_E(z)$ のグラフが印刷されているので、同じ図上にグルコース濃度分布 $m_G(z)$ のグラフの概略を描きなさい。

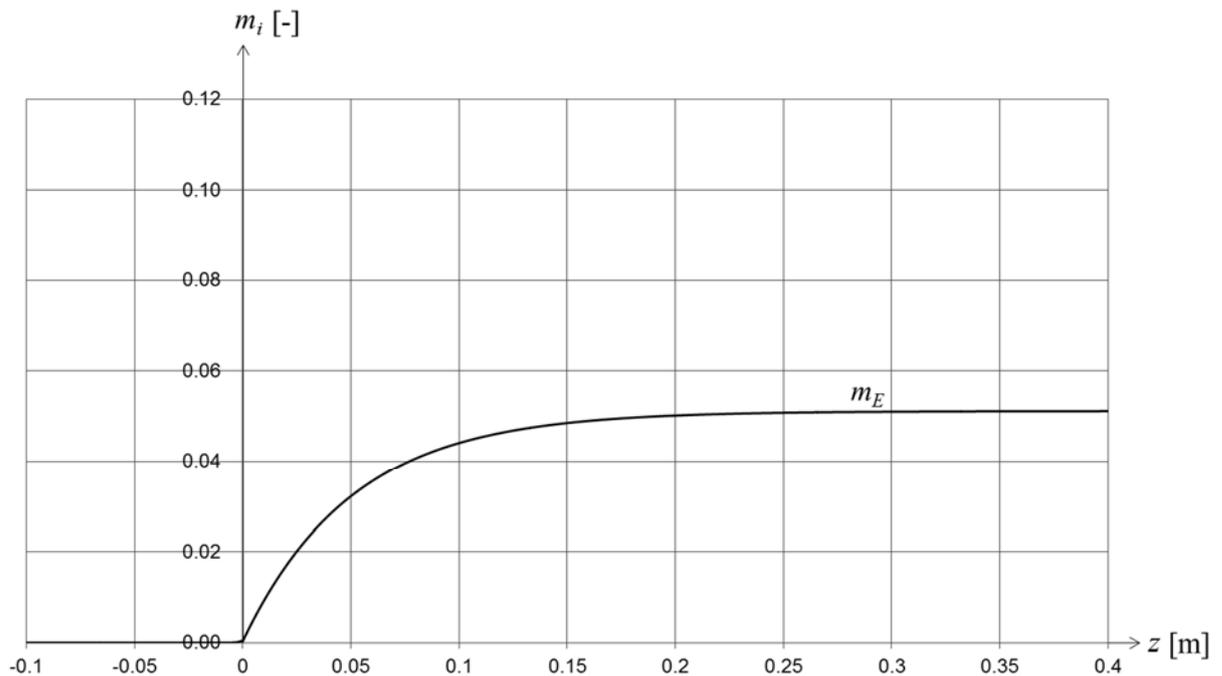


図 1-3 エタノール濃度 (質量分率) の分布

<学生のみなさんへ>

統一テストの大問1は工学的統合問題です。みなさんは、大学に入ってからすぐに学科の専門科目を学びたいのだと思いますが、専門科目を学ぶためには高校までに学ぶ内容に加えて、さらに高度な数学・物理学・化学が必要です。大問1の工学的統合問題は、大学で学ぶ理数系基礎科目の内容が工学の中でどのように使われるのかを、簡単な例を用いて段階的に示しています。式が具体的に何を表わしているかを、是非意識するようにしましょう。

*統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp