

2026年度（令和08年度）統一テスト

（理数基礎学力到達度テスト）

<問題冊子②>選択問題

大問2（数学②） 大問3（数学③）
大問4（物理学①） 大問5（物理学②）
大問6（化学①） 大問7（化学②） 大問8（化学③）

試験時間 2時間15分

解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません

【問題を選択する際の注意】

1. 以下の問題選択ルールに従い、大問7問のうち4問に解答すること。
 - a) 物理学、化学からそれぞれ1問は解答すること。
 - b) 化学を3問とも選択することはできない。

2. したがって、選択問題の解答パターンは下記の4つのみとなる。

数学2問－物理学1問－化学1問	数学1問－物理学2問－化学1問
数学1問－物理学1問－化学2問	数学0問－物理学2問－化学2問

【解答する際の注意】

1. 大問1問につき解答用紙1枚（裏面もあり）を用いること。
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること（マーク式のみの大問もあり）。
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は、問題文の **A1**， **A2**，・・・にあてはまるものを該当する解答群（選択肢）から選び、選択肢の番号①，②・・・で答えること。同じ選択肢が複数回あてはまることもある。
4. 空欄の中には通常の式では不要な「1」「-1」「0」が当てはまることがある。その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること。
5. 問題に関する質問は、汚損で読めない等以外は原則認めない。

大問2 (数学 ②)

1. 連立1次方程式の解法に関する以下の問に答えなさい.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ において, 行列式 $|A|$ と余因子行列 \tilde{A} を求め 解答用紙裏面の

記述解答欄 1 に書きなさい. これより逆行列 A^{-1} が得られるので, 連立1次方程式

$Ax=b$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ の解は $x = \boxed{\text{A1}}$, $y = \boxed{\text{A2}}$, $z = \boxed{\text{A3}}$ と求められる.

(2) \mathbb{R}^4 の5つのベクトルを $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $c_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ \alpha \\ -4 \end{bmatrix}$,

$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ とする (α : 実数). 列ベクトル表示した $(4, 4)$ 型行列の $C = [c_1, c_2, c_3, c_4]$

を用いた連立1次方程式 $Cx=d$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ において, $\text{rank } C$ と $\text{rank } [C | d]$ は

各々係数行列の階数と拡大係数行列の階数を表すものとする. ここで, 掃き出し法を使って計算した結果に基づくと, 以下のことが示される.

(i) $\alpha = \boxed{\text{A4}}$ のときは $\text{rank } C < \text{rank } [C | d] = \boxed{\text{A5}}$ となり, $Cx=d$ は $\boxed{\text{A6}}$.

(ii) $\alpha = \boxed{\text{A7}}$ のときは $\text{rank } C \boxed{\text{A8}}$ $\text{rank } [C | d] = 3$ となり, $Cx=d$ は $\boxed{\text{A9}}$.

(iii) $\alpha \neq \boxed{\text{A7}}$ かつ $\alpha \neq \boxed{\text{A4}}$ のときは $\text{rank } C \boxed{\text{AX}}$ $\text{rank } [C | d] = \boxed{\text{B1}}$ となり, $Cx=d$ は $\boxed{\text{B2}}$. よって, 例えば $\alpha = 4$ の場合には $x = \boxed{\text{B3}}$, $y = \boxed{\text{B4}}$, $z = \boxed{\text{B5}}$, $w = \boxed{\text{B6}}$ となる. このとき, c_1, c_2, c_3, c_4 は $\boxed{\text{B7}}$ であり, \mathbb{R}^4 の $\boxed{\text{B8}}$ となる.

A1 ~ **A3** および **B3** ~ **B6** の解答群 (t: 任意定数) _____

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$ ⑥ $-\frac{9}{8}$
⑦ $-\frac{5}{6}$ ⑧ $-\frac{4}{5}$ ⑨ 4 ⑩ 7 ⑪ 9 ⑫ -9
⑬ -5 ⑭ -3 ⑮ -2 ⑯ 0 ⑰ $\frac{11}{8} + t$ ⑱ t
⑲ $-\frac{9}{8}t$ ⑳ $-\frac{4}{5} + t$
-

A4 **A5** **A7** **B1** の解答群 _____

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6
⑦ 7 ⑧ 8 ⑨ 9 ⑩ 10 ⑪ -1 ⑫ -2
⑬ -3 ⑭ -4 ⑮ -5 ⑯ -6 ⑰ -7 ⑱ -8
⑲ -9 ⑳ 0
-

A8 **AX** の解答群 _____

- ① \in ② \cap ③ \cup ④ \oplus ⑤ = ⑥ \neq ⑦ < ⑧ >
-

A6 **A9** **B2** **B7** **B8** の解答群 _____

- ① ただ1つの解をもつ ② 自明な解のみをもつ ③ 特殊解をもつ
④ 無数の解をもつ ⑤ 解をもたない ⑥ 1次結合 ⑦ 1次従属
⑧ 1次独立 ⑨ 1次写像 ⑩ 座標 ⑪ 次元
⑫ 基底 ⑬ 直和
-

2. 線形写像に関する以下の問に答えなさい。

- (1) n, m, l 次元ベクトル空間における線形写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l$ をそれぞれ $f(\mathbf{x}) = F\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$), $g(\mathbf{x}') = G\mathbf{x}'$ ($\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^m$) と定めると, F は **B9** 型行列, G は **BX** 型行列である. ここで, 合成写像 $g \circ f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^l$ を考えると, $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = g(\mathbf{C1}) = \mathbf{C2}(\mathbf{C1}) = (\mathbf{C3})\mathbf{x}$ と表され, **C4** 型行列の **C3** は合成写像の表現行列と呼ばれる.

$$\text{具体的に } f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}, \text{ また } g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1' + x_2' \\ x_1' - 3x_2' \end{bmatrix} \text{ と与えた場合には, } (g \circ f)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{C5} \mathbf{C6} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{C7} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ となり, 表現行列は } \mathbf{C8} \text{ と求められる.}$$

- (2) 上記の $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ における F の階数を求めると,

$\dim(\text{Im } f) \mathbf{C9} \text{ rank } F = \mathbf{CX}$ を得るので, $\text{Im } f$ の基底の 1 つの組は選択肢の番号の若い順に $\{\mathbf{D1}, \mathbf{D2}\}$ となる. よって, f の像は **D1** と **D2** で定まる **D3** である. 一方, 核空間 $\text{Ker } f = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ については, 次

$$\text{元定理より } \dim(\text{Ker } f) = \mathbf{D4} \text{ となり, } \mathbf{x} \text{ は } t \text{ を任意定数として, } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} (t \in \mathbf{R}) \text{ と求められる. よって, } f \text{ の核はベクトル } \mathbf{D5} \text{ で生成される部分}$$

空間, すなわち, **D6** である.

B9 ~ **C4** の解答群 _____

- ① (l, l) ② (l, m) ③ (m, l) ④ (m, m) ⑤ (l, n)
 ⑥ (n, l) ⑦ (n, n) ⑧ (m, n) ⑨ (n, m) ⑩ F
 ⑪ F^{-1} ⑫ G ⑬ FG ⑭ $F^{-1}G$ ⑮ GF
 ⑯ $G^{-1}F$ ⑰ Fx ⑱ $F^{-1}x$ ⑲ Gx ⑳ $G^{-1}x$

C5 ~ **C8** の解答群 _____

- ① $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 4 & -7 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$ ⑤ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
 ⑥ $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 4 & 5 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$ ⑦ $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 11 & -7 & 14 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -7 & 5 & 14 \end{bmatrix}$
 ⑩ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

C9 **CX** **D3** **D4** **D6** の解答群 _____

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ -1 ⑥ -2 ⑦ -3
 ⑧ -4 ⑨ 0 ⑩ < ⑪ > ⑫ = ⑬ ≠ ⑭ ∈
 ⑮ \mathbf{R}^2 内の原点を通る直線 ⑯ \mathbf{R}^2 内の原点を通る平面
 ⑰ \mathbf{R}^2 内の原点を通らない平面 ⑱ \mathbf{R}^3 内の原点を通る直線
 ⑲ \mathbf{R}^3 内の原点を通らない直線 ⑳ \mathbf{R}^3 内の原点を通る平面

D1 **D2** **D5** の解答群 _____

- ① $\begin{bmatrix} -8 \\ 14 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ⑤ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑥ $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$
 ⑦ $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ⑩ $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ⑪ $\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}$ ⑫ $\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$
 ⑬ $\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ ⑭ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ ⑮ $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑯ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ⑰ $\begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix}$ ⑱ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. グラフ理論と隣接行列に関する以下の間に答えなさい.

頂点の集合 V と 2 つの頂点を結ぶ辺の集合 S から成るグラフ (V, S) において, 1 つの頂点から他の頂点へ幾つかの辺を通る経路を歩道といい, そこで通過した辺の個数を重複を許して数えたものを歩道の長さと呼ぶ. 頂点の数が n であるグラフ (V, S) の隣接行列は, n 次正方行列 $H = [h_{ij}]$ (h_{ij} は頂点 v_i と v_j を結ぶ辺の数) で定義され, h_{ij} **D7** h_{ji} と表せる. ここで, その固有値と対応する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ と表記する. 前者の集合 $\text{Spec}(V, S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ をグラフ (V, S) のスペクトル, $\text{Tr}(H) = h_{11} + \dots + h_{nn}$ を行列 H のトレースとそれぞれ呼ぶ. また, グラフ内のすべての異なる頂点から始まり, 終点までたどる長さ k の閉じた歩道の総数 $M_k(V, S)$ をそのグラフの第 k モーメントと呼ぶ.

- (1) H は n 次の **D8** であるので **D9** であり, その **DX** を並べた変換行列 P を用いると, H の k 乗について

$$P^{-1}H^kP = \begin{bmatrix} \mathbf{E1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{E2} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ が成り立つ.}$$

ここで, トレースは $\text{Tr}(P^{-1}HP) = \text{Tr}(H)$ を満たすので, $\text{Tr}(H^k) = \mathbf{E3}$ ($k = 1, 2, \dots$) となる.

一方, $\text{Tr}(H^k)$ は各頂点 v_i を出発する長さ k の閉じた歩道の総数を $i = 1, 2, \dots, n$ のすべてに亘って足し加えたものであるので, $\text{Tr}(H^k) = \mathbf{E4}$ の関係がある.

- (2) $H = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ で与えられるとき, そのグラフを 解答用紙裏面の記述解答欄 2

に書きなさい.

- (3) 上記 (2) の H の固有値を求めると共に, その固有値の中の **どれか 1 つ** に対する固有ベクトルを求め, 解答用紙裏面の記述解答欄 3 に書きなさい.

- (4) H のグラフのスペクトルは $\text{Spec}(V, S) = \{\mathbf{E5}\}$ であり, 第 k モーメントは $M_k(V, S) = \mathbf{E6}$ ($k = 1, 2, \dots$) である.

D7 ~ **DX** の解答群 _____

- ① $>$ ② $<$ ③ \in ④ $=$ ⑤ \neq ⑥ \cap
⑦ 回転行列 ⑧ 交代行列 ⑨ 随伴行列 ⑩ 実対称行列
⑪ 直交化可能 ⑫ 三角化不可能 ⑬ 対角化可能 ⑭ 対角化不可能
⑮ ジョルダン標準形へ変換不可能 ⑯ 基本ベクトル ⑰ 複素ベクトル
⑱ 一次従属ベクトル ⑲ n 次元数ベクトル ⑳ 固有ベクトル
-

E1 ~ **E4** の解答群 _____

- ① h_{11}^k ② h_{nn}^k ③ h_{kk} ④ h_{kk}^n ⑤ λ_1^k
⑥ λ_n^k ⑦ λ_k ⑧ λ_k^n ⑨ $\|\mathbf{u}_1\|^k$ ⑩ $\|\mathbf{u}_n\|^k$
⑪ $\text{Spec}(V, S)$ ⑫ $M_k(V, S)$ ⑬ $h_{11}^k + h_{22}^k + \cdots + h_{nn}^k$
⑭ $h_{kk} + h_{kk}^2 + \cdots + h_{kk}^n$ ⑮ $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$ ⑯ $\lambda_k + \lambda_k^2 + \cdots + \lambda_k^n$
⑰ $\|\mathbf{u}_1\|^k + \|\mathbf{u}_2\|^k + \cdots + \|\mathbf{u}_n\|^k$ ⑱ $\|\mathbf{u}_k\| + \|\mathbf{u}_k\|^2 + \cdots + \|\mathbf{u}_k\|^n$
⑲ $M_1(V, S) + M_2(V, S) + \cdots + M_k(V, S)$ ⑳ $M_1(V, S)M_2(V, S) \cdots M_k(V, S)$
-

E5 **E6** の解答群 _____

- ① $-4, -1, 2$ ② $-3, 0, 2$ ③ $-2, 0, 3$ ④ $-1, -2, 4$
⑤ $-1, 2, 4$ ⑥ $2, 0, 3$ ⑦ $(-4)^k + (-1)^k + 2^k$ ⑧ $(-3)^k + 2^k$
⑨ $(-2)^k + 3^k$ ⑩ $(-1)^k + (-2)^k + 4^k$ ⑪ $(-1)^k + 2^k + 4^k$ ⑫ $2^k + 3^k$
-

大問3 (数学 ③)

次の各問に答えなさい。

1. (1) 関数の極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ を求める。

中心 O 、半径 $OA = OB = 1$ の円を描き、中心角 $AOB = x$ (単位: ラジアン) の扇形 OAB を考える。ただし、 $0 < x < \pi/2$ とする。点 A における弧 AB の接線と直線 OB の交点を C とする。解答用紙裏面の記述解答欄 1 に扇形 OAB 、三角形 OAB 、三角形 AOC 、直線 AC 、 BC を点 O 、 A 、 B 、 C 、角 x とともに描け。

扇形 OAB の面積 = $\boxed{\text{A1}}$ 、三角形 OAB の面積 = $\boxed{\text{A2}}$ 、三角形 AOC の面積 = $\boxed{\text{A3}}$ である。これらの大小関係は

$$\boxed{\text{A4}} \text{ の面積} < \boxed{\text{A5}} \text{ の面積} < \boxed{\text{A6}} \text{ の面積}$$

であるから次の不等式が成り立つ。

$$\boxed{\text{A7}} < \boxed{\text{A8}} < \boxed{\text{A9}}$$

$\boxed{\text{A7}}$ で各項を割ると次式を得る。

$$1 < \boxed{\text{AX}} < \boxed{\text{B1}}$$

不等式の逆数を取ると

$$1 > \boxed{\text{B2}} > \boxed{\text{B3}}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \boxed{\text{B3}} = 1$ であるからはさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ここで x と $\sin x$ は奇関数であるので $(\sin x)/x$ は偶関数であり

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

結局,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) 次の極限值を求めよ.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \boxed{\text{B4}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\boxed{\text{B5}}} = \boxed{\text{B6}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ を求める.

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \boxed{\text{B7}} \text{ であるので } x \neq 0 \text{ ならば}$$

$$\boxed{\text{B8}} \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \boxed{\text{B9}}$$

ここで $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \boxed{\text{BX}}$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\text{C1}}$$

$\boxed{\text{A1}} \sim \boxed{\text{A3}} \quad \boxed{\text{A7}} \sim \boxed{\text{C1}}$ の選択肢

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|------------------------|------------------------|----------------------|
| ① 1 | ② 0 | ③ $\frac{1}{2}$ | ④ x | ⑤ $-x$ |
| ⑥ $ x $ | ⑦ $- x $ | ⑧ $\frac{1}{2}x$ | ⑨ $1 + \sin x$ | ⑩ $1 - \sin x$ |
| ⑪ $1 + \cos x$ | ⑫ $1 - \cos x$ | ⑬ $\frac{1}{2} \sin x$ | ⑭ $\frac{1}{2} \tan x$ | ⑮ $\cos x$ |
| ⑯ $\frac{\sin x}{x}$ | ⑰ $\frac{\cos x}{x}$ | ⑱ $\frac{x}{\sin x}$ | ⑲ $\frac{x}{\cos x}$ | ⑳ $\frac{1}{\cos x}$ |

$\boxed{\text{A4}} \sim \boxed{\text{A6}}$ の選択肢

- ① 三角形 AOB ② 三角形 AOC ③ 三角形 ABC ④ 扇形 AOB

2. (1) $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で **C2**
なぜならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \text{C3} & (h > 0) \\ \text{C4} & (h < 0) \end{cases}$$

- (2) 点 a の近くで定義された関数に対して, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ のとき $f(x), g(x)$ は無限小であるといい, $f(x), g(x)$ とともに無限小で $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ のとき, $f(x)$ は $g(x)$ よりも高位の無限小であるといい, $f(x) = o(g(x))$ と書く. ここで「 o 」を Landau の記号という.

平面上の領域 D で定義された関数 $f(x, y)$ が点 $(a, b) \in D$ で全微分可能であるとは, $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき, ある定数 A, B が存在し次式が成り立つときである.

$$f(x, y) - f(a, b) = A(x - a) + B(y - b) + o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right)$$

関数 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能ならば $f(x, y)$ は x, y に関して偏微分可能であり $A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$ である. また, $f(x, y)$ が点 (a, b) を含む領域において x, y に関して偏微分可能であり, f_x, f_y が (a, b) で連続ならば $f(x, y)$ は (a, b) で全微分可能である. また, 曲面 $S : z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ において S の接平面

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

が存在する.

- i. 次の関数の原点 $(0, 0)$ における偏微分可能性と全微分可能性を考える.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$f_x(0, 0) = \text{C5}, f_y(0, 0) = \text{C6} \text{ であるので原点 } (0, 0) \text{ で } \text{C7} .$$

$f(x, y)$ が全微分可能であるとする

$$f(x, y) - f(0, 0) = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

ここで

$$P(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y$$

とおくと上式は $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} P(x, y) = 0$ と書ける. しかし $y = x$ ($(x, y) \neq (0, 0)$)

上で $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} P(x, y) \text{C8}$ であるので原点において **C9** .

ii. 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数 $y = \tan^{-1} x$ を $x = \tan y$ の逆関数とする. 逆関数の微分から $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \boxed{\text{CX}}$ である. 曲面 $z = f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 上の点 $(x, y) = (1, \sqrt{3})$ における接平面を求める.

$f_x(x, y) = \boxed{\text{D1}}$, $f_y(x, y) = \boxed{\text{D2}}$ から

$$\boxed{\text{D3}}(x-1) - (y-\sqrt{3}) + (\boxed{\text{D4}})\left(z - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$\boxed{\text{C2}}$ の選択肢

- ① 微分可能である ② 微分可能でない

$\boxed{\text{C3}} \sim \boxed{\text{C6}}$ $\boxed{\text{CX}} \sim \boxed{\text{D4}}$ の選択肢

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ 4
 ⑥ 5 ⑦ 0 ⑧ -1 ⑨ $\frac{1}{1+x^2}$ ⑩ $\frac{x}{1+x^2}$
 ⑪ $\frac{-x}{1+x^2}$ ⑫ $\frac{y}{1+x^2}$ ⑬ $\frac{x}{x^2+y^2}$ ⑭ $\frac{-x}{x^2+y^2}$ ⑮ $\frac{y}{x^2+y^2}$
 ⑯ $\frac{-y}{x^2+y^2}$ ⑰ $\frac{xy}{x^2+y^2}$

$\boxed{\text{C7}} \sim \boxed{\text{C9}}$ の選択肢

- ① 偏微分可能である ② 偏微分可能でない ③ 全微分可能である
 ④ 全微分可能でない ⑤ = 1 ⑥ = 0
 ⑦ $\neq 0$

3. (1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ の共通部分の体積を求めよ.
 2つの曲面 $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ が有界閉領域 D で定義され $f(x, y) \geq g(x, y)$ とする. 2曲面と D 上の柱面で囲まれる部分 V の体積は次式で与えられる.

$$\mu(V) = \iint_D \{f(x, y) - g(x, y)\} dx dy$$

$y \geq 0, z \geq 0$ の体積を $\mu'(V')$ とすると対称性より $\mu(V) = 4\mu'(V')$ である. 領域 D' を

$$D' = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq ax, y \geq 0\}$$

とおくと V' は

$$V' = \left\{ (x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D' \right\}$$

$$\mu(V) = 4 \iiint_{V'} dx dy dz = 4 \iint_{D'} dx dy \int_0^{z_1} dz$$

ただし, $z_1 = \text{D5}$. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と極座標を用いると

$$\mu(V) = 4 \int_0^{\text{D6}} d\theta \int_0^{\text{D7}} \sqrt{a^2 - r^2} r dr$$

$t = a^2 - r^2$ とおくと

$$\mu(V) = \frac{4}{3} \text{D8} \int_0^{\text{D6}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9} \right) \text{D9}$$

ただし, $\int_0^{\text{D6}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3}$

D5 ~ D9 の選択肢				
① π	② $\pi/2$	③ $\pi/4$	④ a	⑤ a^2
⑥ a^3	⑦ ax	⑧ $a^2 x^2$	⑨ $a \sin \theta$	⑩ $a \cos \theta$
⑪ $\sqrt{a^2 - x^2}$	⑫ $\sqrt{a^2 - y^2}$	⑬ $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$		

(2) 領域 D 上の積分の順序を変更せよ.

$$\begin{aligned} \text{i. } & \iint_D f(x,y)dx dy \quad (D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}) \\ & = \int_0^1 dx \int_{y_1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy \int_{x_1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx \end{aligned}$$

ただし, $y_1 = \boxed{\text{DX}}$, $x_1 = \boxed{\text{E1}}$.

$$\begin{aligned} \text{ii. } & \iint_D f(x,y)dx dy \quad (D : y = x^2 \text{ と } x = y^2 \text{ で囲まれた領域}) \\ & = \int_0^1 dx \int_{y_1}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{x_1}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \end{aligned}$$

ただし, $y_1 = \boxed{\text{E2}}$, $x_1 = \boxed{\text{E3}}$.

$$\begin{aligned} \text{iii. } & \iint_D f(x,y)dx dy = \int_0^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \\ & = \int_{-2}^0 dx \int_{y_1}^{x+2} f(x,y)dy + \int_0^2 dx \int_{y_2}^{x+2} f(x,y)dy \end{aligned}$$

ただし, $y_1 = \boxed{\text{E4}}$, $y_2 = \boxed{\text{E5}}$.

解答用紙裏面の記述解答欄 2に問 iii. の領域 D を描け. x 軸と y 軸との交点の値も記入すること.

$\boxed{\text{DX}}$ ~ $\boxed{\text{E5}}$ の選択肢				
① 1	② 0	③ x	④ x^2	⑤ $-x^2$
⑥ y	⑦ y^2	⑧ $-y^2$	⑨ $x^2 + y^2$	⑩ $\sqrt{1-x^2}$
⑪ $-\sqrt{1-x^2}$	⑫ $\sqrt{1-y^2}$	⑬ $-\sqrt{1-y^2}$		

大問4 (物理学 ①)

本問では、 $\frac{dq}{dt}$ を \dot{q} 、 $\frac{d^2q}{dt^2}$ を \ddot{q} などのように、物理量の時間微分をドットで表す。

1. 図 1(a) に示すように、等しい質量 m の物体 0, 物体 1, 物体 2, 物体 3 が滑らかな水平面上で、 x 軸に沿って左から順に並んでいる。物体 1 と物体 2 はバネ定数 k のバネでつながれている。はじめは、図 1(a) のように、物体 0 は速度 v_0 で運動しており、その他の物体は静止し、バネは自然の長さにある。また、物体 2 と物体 3 は接触している。

やがて、時刻 $t = 0$ に、物体 0 は物体 1 に完全非弾性衝突をして、これらの物体は瞬時に合体する。合体して 1 つになった物体を物体 A とよぶことにする。その後しばらくは、物体 2 と物体 3 は接触を保ったまま運動する (図 1(b))。このとき、物体 2 と物体 3 をまとめて 1 つの物体として扱うことができ、それを物体 B とよぶことにする。物体 A と物体 B のそれぞれの重心の位置を x_A , x_B とする (図 1(b))。物体 3 は、ある時刻 t_1 に物体 2 から離れて、ある速度 v_3 の等速度運動を始める (図 1(c))。時刻 t_1 と速度 v_3 を求めたい。

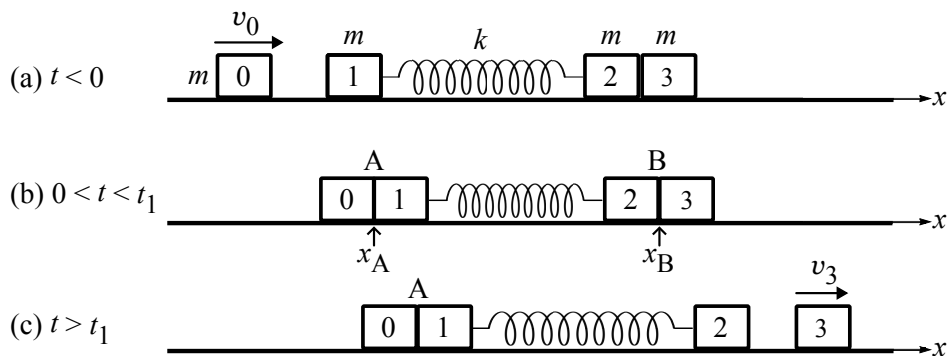


図 1: 質量の等しい 4 つの物体の運動。

(1) 完全非弾性衝突

物体 0 と物体 1 が合体した直後の、物体 A の速度 v_A は、保存則を利用して求めることができ、 $v_A = \boxed{\text{A1}}$ となる。

$\boxed{\text{A1}}$ の解答群

- ① 0 ② v_0 ③ $2v_0$ ④ $\frac{1}{2}v_0$ ⑤ $\sqrt{2}v_0$ ⑥ $\frac{1}{\sqrt{2}}v_0$

(2) $0 < t < t_1$ における運動

物体 0 と物体 1 が合体してから物体 2 と物体 3 が離れるまでの、バネの伸縮運動を調べよう。バネが自然の長さにあるときの物体 A と物体 B の重心間距離

を d_0 とすると、自然の長さを基準にしたバネの伸び u は、 $u = x_B - x_A - d_0$ と表される。

物体 A と物体 B それぞれの運動方程式から、バネの伸び u に対する次の微分方程式を導くことができる。

$$\ddot{u} = -\omega^2 u, \quad \omega = \boxed{\text{A2}} \quad (4-1)$$

また、 $t = 0$ の直後では $u = \boxed{\text{A3}}$ 、 $\dot{u} = \boxed{\text{A4}}$ である。微分方程式 (4-1) の解で、この初期条件を満たすものは次のとおりである。

$$u = \boxed{\text{A5}} \quad (4-2)$$

$\boxed{\text{A2}} \sim \boxed{\text{A5}}$ の解答群

- | | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| ① $\sqrt{\frac{k}{m}}$ | ② $\sqrt{\frac{k}{2m}}$ | ③ $\sqrt{\frac{2k}{m}}$ | ④ $\sqrt{\frac{k}{3m}}$ |
| ⑤ $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ | ⑥ $\sqrt{\frac{2k}{3m}}$ | ⑦ $\sqrt{\frac{3k}{2m}}$ | ⑧ 0 |
| ⑨ d_0 | ⑩ $-d_0$ | ⑪ v_A | ⑫ $-v_A$ |
| ⑬ $\frac{v_A}{\omega} \sin \omega t$ | ⑭ $-\frac{v_A}{\omega} \sin \omega t$ | ⑮ $\frac{v_A}{\omega} \cos \omega t$ | ⑯ $-\frac{v_A}{\omega} \cos \omega t$ |

(3) 物体 2 と物体 3 の分離

物体 2 と物体 3 が接触したまま運動するときには、これらの物体間には互いに押し合う向きの抗力が作用しており、この抗力が 0 になるときに 2 つの物体は離れる。このことから、これら 2 つの物体が分離するのは、 $t > 0$ において初めて $\boxed{\text{A6}}$ となるときであることがわかる。この条件と式 (4-2) を使うと、2 つの物体が分離する時刻を求めることができ、 $t_1 = \boxed{\text{A7}}$ を得る。さらに、この結果に $\boxed{\text{A2}}$ を代入すると、 t_1 を m と k を用いて表すことができる。

$\boxed{\text{A6}} \sim \boxed{\text{A7}}$ の解答群

- | | | | | |
|--------------------|-------------------------|------------------------|--------------------------|-------------------------|
| ① $u = 0$ | ② $u = d_0$ | ③ $u = -d_0$ | ④ $\dot{u} = 0$ | ⑤ $\dot{u} = v_A$ |
| ⑥ $\dot{u} = -v_A$ | ⑦ $\frac{\pi}{2\omega}$ | ⑧ $\frac{\pi}{\omega}$ | ⑨ $\frac{3\pi}{2\omega}$ | ⑩ $\frac{2\pi}{\omega}$ |

(4) 分離後の物体 3 の速度

物体 2 から分離した後の物体 3 の速度 v_3 は、分離直前の物体 B の速度 v_B に等しい。そして、系の運動量とエネルギーのそれぞれが、 $t = 0$ と $t = t_1$ において等しいことを利用して v_B が計算できて、 $v_3 = \boxed{\text{A8}}$ を得る。この結果に $\boxed{\text{A1}}$ を代入すると、 v_0 を用いて v_3 を表すことができる。

$\boxed{\text{A8}}$ の解答群

- | | | | | | |
|-----|---------|----------|--------------------|-----------------|---------------------------|
| ① 0 | ② v_A | ③ $2v_A$ | ④ $\frac{1}{2}v_A$ | ⑤ $\sqrt{2}v_A$ | ⑥ $\frac{1}{\sqrt{2}}v_A$ |
|-----|---------|----------|--------------------|-----------------|---------------------------|

2. 水平面上を x 軸に沿って運動する半径 a 、質量 m の均質な球を考える．この水平面の $x < 0$ の領域は滑らかで、 $x > 0$ の領域は粗い．粗い面と球の間の静止摩擦係数は μ 、動摩擦係数は μ' であり、転がり摩擦は無視できるものとする．重力加速度の大きさを g とする．中心を通る軸の回りの球の慣性モーメント I は次式で与えられる．

$$I = \frac{2}{5}ma^2$$

はじめ、球の中心は $x < 0$ の領域にあり、図 2(a) のように、球は回転することなく一定の速さ v_0 で x 軸の正の向き（図の右向き）に運動している．その後、球の中心が $x = 0$ の点を横切る時刻を $t = 0$ とする．図 2(b) に示すように、 $t > 0$ における球の中心の速度を v 、球が面に接触する点の速度を v' 、中心のまわりの回転角速度を ω とする（この図のように、回転が時計回りのときに $\omega > 0$ とする）．

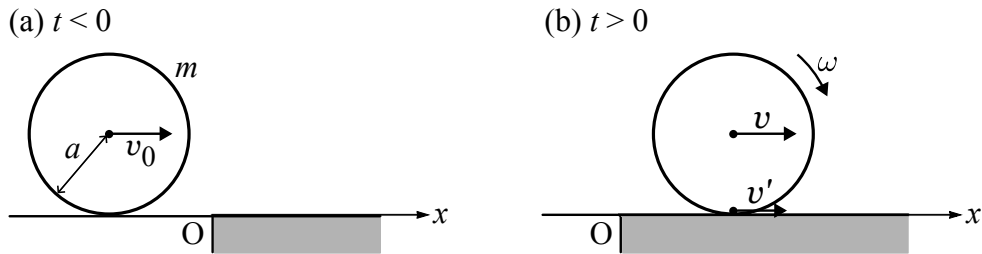


図 2: (a) 滑らかな面の上を粗い面に向かって進む球. (b) 粗い面の上を進む球.

- (1) 並進速度と回転角速度の関係

v と v' と ω の間には、**A9** の関係が成り立つ．

A9 の解答群

- ① $v + v' = a\omega$ ② $v + v' = -a\omega$ ③ $v - v' = a\omega$ ④ $v - v' = -a\omega$

- (2) 運動方程式

球の中心が $x = 0$ の点を通り直後は v' **AX** 0 であるから、球に作用する摩擦力は x 軸の **B1** の向きである．したがって、時間が経っても v' の符号が変化しなければ、 $t > 0$ における球の並進と回転に対する運動方程式は次のように書ける．

$$m\dot{v} = \mathbf{B2}, \quad I\dot{\omega} = \mathbf{B3} \quad (4-3)$$

AX~B1 の解答群

- ① > ② < ③ 正 ④ 負

B2~B3 の解答群

- ① 0 ② $mg\mu$ ③ $mg\mu'$ ④ $-mg\mu$ ⑤ $-mg\mu'$
⑥ $mg\mu a$ ⑦ $mg\mu'a$ ⑧ $-mg\mu a$ ⑨ $-mg\mu'a$ ⑩ $\frac{mg\mu}{a}$
⑪ $\frac{mg\mu'}{a}$ ⑫ $-\frac{mg\mu}{a}$ ⑬ $-\frac{mg\mu'}{a}$

(3) 運動方程式の解

初期条件を考慮して、式(4-3)の2つの運動方程式を解くと次のようになる。

$$v = \boxed{\text{B4}}, \quad \omega = \boxed{\text{B5}}$$

この結果を用いて v' を計算すると、時刻 $t_1 = \boxed{\text{B6}}$ に $v' = 0$ となることがわかる。また、 $0 < t < t_1$ の時間では、 v' は符号を変えることなく、球は滑りながら転がる。

B4~B6 の解答群

- ① v_0 ② $v_0 - g\mu t$ ③ $v_0 - g\mu't$ ④ $v_0 + g\mu t$ ⑤ $v_0 + g\mu't$
⑥ 0 ⑦ $\frac{3g\mu}{2a}t$ ⑧ $\frac{3g\mu'}{2a}t$ ⑨ $\frac{5g\mu}{2a}t$ ⑩ $\frac{5g\mu'}{2a}t$
⑪ $-\frac{3g\mu}{2a}t$ ⑫ $-\frac{3g\mu'}{2a}t$ ⑬ $-\frac{5g\mu}{2a}t$ ⑭ $-\frac{5g\mu'}{2a}t$ ⑮ $\frac{2v_0}{3g\mu}$
⑯ $\frac{2v_0}{3g\mu'}$ ⑰ $\frac{2v_0}{5g\mu}$ ⑱ $\frac{2v_0}{5g\mu'}$ ⑲ $\frac{2v_0}{7g\mu}$ ⑳ $\frac{2v_0}{7g\mu'}$

(4) $t > t_1$ における運動

時刻 t_1 に $v' = 0$ となった後、球は $\boxed{\text{B7}}$ 。

B7 の解答群

- ① 回転することなく、等速度運動をする
② 滑ることなく、転がりながら等速度運動をする
③ 滑りながら転がり続ける
④ 回転することなく滑り、やがて静止する
⑤ 滑ることなく転がり、やがて静止する
⑥ 滑りながら転がり、やがて静止する
⑦ 静止し続ける

大問 5 (物理学②)

本問では、沖を進む津波の伝播速度と高さの静水深依存性について調べる。地球の公転や自転は考慮しなくてよいとし、静止海水面と海底面を曲面ではなく水平面として考える。また、海水を非粘性で質量密度 ρ (一定) の液体として扱う。重力加速度は g である。

図 5-1 のように、静止時の海水面に沿って水平方向に x 軸、鉛直上向きに z 軸をとり、波のない静止時の海水面の z 座標を $z = 0$ とおく。本問では、波長 λ 、振幅 a で x 方向に進む進行波を考える。解析を簡便にするため、波は水平奥行方向 (紙面に垂直な方向) に一様であるとし、空間座標 (x, z) で考える。

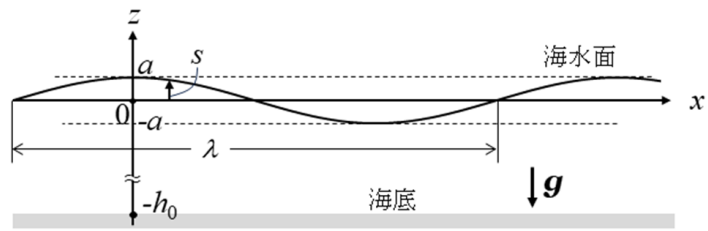


図 5-1

海水の流速 \mathbf{v} は伝播速度に比べて非常に小さいとする。時刻 t 、座標 (x, z) における海水の流速を $\mathbf{v}(x, z, t) = (v_x(x, z, t), v_z(x, z, t))$ とおき、 x 方向の流速 v_x が z 方向に一様である (z 依存性がない) とする。また、時刻 t 、座標 x での海水面の z 方向変位を $s(x, t)$ とおく。静水深を h_0 (海底: $z = -h_0$) とすると、波動時の水深は $h(x, t) = h_0 + s(x, t)$ と表される。津波は、 $\lambda \gg h_0$ かつ $|s(x, t)| \leq a \ll h_0$ となる浅水波として解析される。

1. 海水津波の波動現象

問 1 では x 方向に静水深 h_0 は一定とする。伝播速度に比べて小さな流速 \mathbf{v} を考えるので、流体の運動方程式では対流項を無視できる。水圧を $p(x, z, t)$ とおくと、運動方程式は次式で表せる。ただし、 (x, z, t) を省略する。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (5-1)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (5-2)$$

ここでは $|\partial v_z / \partial t| \ll g$ のときを考えているので、式(5-2)の左辺を 0 で近似できる。

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (5-3)$$

時刻 t における座標 (x, z) の水圧 $p(x, z, t)$ は、式(5-3) を z で積分して得られる。水圧 $p(x, z, t)$ は、海水面 ($z = s$) で大気圧 p_0 であるから、座標 z で次式となる。

$$p = p_0 + \rho g \cdot (\text{A1}) \quad (5-4)$$

海底 $z = -h_0$ では水圧は $p_0 + \rho g(s + h_0)$ になる。

式(5-1) は、式(5-4)から次式となる。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = (\text{A2}) \frac{\partial s}{\partial x} \quad (5-5)$$

次に、図 5-2 のような領域 $[x, x + dx]$ を考える。この領域の z 方向の幅は海底から海面までの $h = h_0 + s$ 、奥行方向の幅は単位長である。 v_x が z 方向に一様であるので、本領域における質量保存は次式になる。

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h v_x)}{\partial x} = 0 \quad (5-6)$$

ここで、 $|s| \ll h_0$ から $h v_x \approx h_0 v_x$ と近似でき、式(5-6)は式(5-7)となる。

$$\frac{\partial s}{\partial t} = (\text{A3}) \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (5-7)$$

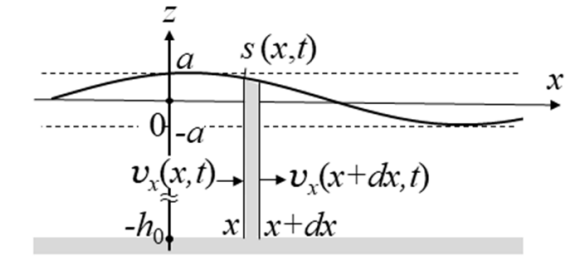


図 5-2

よって、変位 s の波動方程式は、式(5-7)の両辺を時間微分して式(5-5)を代入することで得られる。

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -h_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} = (\text{A4}) \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (5-8)$$

伝播速度 c の進行波を表す関数 $f(x - ct)$ は式(5-8)を満たし、 c は次式で表される。

$$c = \text{A5} \quad (5-9)$$

----- **A1** ~ **A5** の選択肢 -----

- | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------------|-------------|------------|------------------|--------------|
| ① s | ② $s - z$ | ③ $s + z$ | ④ $-\rho g$ | ⑤ ρg | ⑥ $-\rho h_0$ | ⑦ ρh_0 |
| ⑧ $-g$ | ⑨ g | ⑩ \sqrt{g} | ⑪ $-h_0$ | ⑫ h_0 | ⑬ $\sqrt{h_0}$ | |
| ⑭ $-gh_0$ | ⑮ gh_0 | ⑯ $\sqrt{gh_0}$ | ⑰ $-g/h_0$ | ⑱ g/h_0 | ⑲ $\sqrt{g/h_0}$ | |

式(5-8)の解 $s = f(x - ct)$ として、次の三角関数を用いる。

$$s(x, t) = a \cos(k(x - ct)) = a \cos(kx - \omega t) \quad (5-10)$$

ここで、 $k = 2\pi / \lambda$ が波数、 $\omega = 2\pi / T$ が角周波数である。伝播速度 c は、 k と ω を用いると次式で表せる。

$$c = \boxed{\text{A6}} \quad (5-11)$$

座標 $z = 0$ での鉛直方向の流速 $v_z(x, 0, t)$ は s の時間微分であるから、次式となる。

$$v_z(x, 0, t) = \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = (\boxed{\text{A7}}) \sin(kx - \omega t) \quad (5-12)$$

式(5-9)と式(5-11)から $\boxed{\text{A7}}$ を h_0 と k で示せば、 $\boxed{\text{A7}} = \boxed{\text{A8}}$ である。

式(5-7)より、式(5-10)の s を時間微分して h_0 と k で示せば、次式を得る。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{h_0} \frac{\partial s}{\partial t} = -(\boxed{\text{A9}}) \sin(kx - \omega t) \quad (5-13)$$

これを x で積分すれば、時間平均流速を 0 として次の v_x が得られる。

$$v_x = (\boxed{\text{AX}}) \cos(kx - \omega t) \quad (5-14)$$

よって、 v_z の振幅 $\boxed{\text{A8}}$ は v_x の振幅 $\boxed{\text{AX}}$ の kh_0 倍、また、 v_x の振幅 $\boxed{\text{AX}}$ は伝播速度 $c (= \boxed{\text{A5}})$ の $\boxed{\text{B1}}$ 倍となる。これらの関係と浅水波の条件から $|v_z| \ll |v_x| \ll c$ であることがわかる。

----- $\boxed{\text{A6}} \sim \boxed{\text{B1}}$ の選択肢 -----

- ① ka ② k/a ③ ωa ④ ω/a ⑤ ωk ⑥ ω/k ⑦ ωg ⑧ ω/g
 ⑨ ah_0 ⑩ a/h_0 ⑪ agh_0 ⑫ ag/h_0 ⑬ $kagh_0$ ⑭ kag/h_0
 ⑮ $\sqrt{ah_0}$ ⑯ $\sqrt{a/h_0}$ ⑰ $a\sqrt{gh_0}$ ⑱ $a\sqrt{g/h_0}$ ⑲ $ka\sqrt{gh_0}$ ⑳ $ka\sqrt{g/h_0}$

2. 津波の高さの静水深依存性

問2では x 方向に静水深 h_0 がゆるやかに浅くなる場合を考える。ここでは、 x 方向1波長の領域内における波動の力学的エネルギー保存を考える。この領域の z 方向の幅は海底 $z = -h_0$ から水面 $z = s$ までの $h_0 + s$ 、奥行方向の幅は単位長である。また、海水面の平均変位を0、つまり、海水面の座標平均を $z = 0$ とする。

先に、時刻 t における波動の1波長内の重力ポテンシャル $U(t)$ を考える。これは、波動があるときと無いときの重力ポテンシャルの差である。波動があるときの重力ポテンシャル $U_g(t)$ は、 $\rho g z$ を z で積分してから x で積分すると次式となる。

$$U_g(t) = \int_0^\lambda dx \int_{-h_0}^s \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda (s^2 - h_0^2) dx = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda s^2 dx - \frac{1}{2} \rho g h_0^2 \lambda \quad (5-15)$$

一方、波動が無いときの重力ポテンシャル U_{gs} は次式のように求められる。

$$U_{gs} = \int_0^\lambda dx \int_{-h_0}^0 \rho g z dz = -\frac{1}{2} \rho g h_0^2 \lambda \quad (5-16)$$

よって、波動の1波長内の重力ポテンシャル $U(t)$ は、 $U_g(t) - U_{gs}$ に式(5-10)を適用して、次式のように得られる。

$$U(t) = \frac{1}{2} \rho g a^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) dx = \frac{1}{2} \rho g a^2 (\boxed{\text{B2}}) \quad (5-17)$$

これは時刻 t によらず一定 U である。

次に、時刻 t における波動の1波長内の運動エネルギー $K(t)$ を求める。ここで $|v_z| \ll |v_x|$ から v_z による運動エネルギーは無視でき、かつ、 v_x の z 依存性がないので次式となる。

$$K(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda dx \int_{-h_0}^s v_x^2 dz = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda (s + h_0) (\boxed{\text{AX}})^2 \cos^2(kx - \omega t) dx \quad (5-18)$$

式(5-18)中の $s + h_0$ は、 $|s(x,t)| \ll h_0$ より h_0 で近似でき、 $K(t)$ は次式のように得られる。

$$K(t) \approx \boxed{\text{B3}} \quad (5-19)$$

これも時刻 t によらず一定 K である。

よって波動の1波長内の力学的エネルギーは次式で表され、一定である。

$$K + U = \boxed{\text{B4}} \quad (5-20)$$

----- $\boxed{\text{B2}} \sim \boxed{\text{B4}}$ の選択肢 -----

- ① $\lambda/4$ ② $\lambda/2$ ③ λ ④ 2λ ⑤ 4λ ⑥ a^2g ⑦ a^2gh_0 ⑧ a^2g/h_0
 ⑨ $\rho g a^2 \lambda/4$ ⑩ $\rho g a^2 \lambda/2$ ⑪ $\rho g a^2 \lambda$ ⑫ $2\rho g a^2 \lambda$ ⑬ $4\rho g a^2 \lambda$

式(5-20)の波動の力学的エネルギーは静水深が変化しても保存されるため、波長と振幅の関係式を得ることができる。静水深 h_1 では波長 λ_1 で振幅 a_1 、静水深 h_2 では波長 λ_2 で振幅 a_2 とすれば、次式が成り立つ。

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha \quad \alpha = \boxed{\text{B5}} \quad (5-21)$$

1 波長内で静水深 h_0 の変化が小さければ、式(5-9)より伝播速度 c が遅くなる。津波の記録から、波の周期 T は、発生源に依存するものの、 x 方向に静水深が変化しても一定である。つまり、波の角周波数 $\omega = 2\pi / T$ も静水深によらず一定である。 ω が一定であれば、波長 λ は波の伝播速度 c に比例するので、

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^\beta \quad \beta = \boxed{\text{B6}} \quad (5-22)$$

となる。これより、波の高さ（振幅）の静水深依存性は次式となる。

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^\gamma \quad \gamma = \boxed{\text{B7}} \quad (5-23)$$

これより、静水深が 1000 m からその 1/16 倍になると、伝播速度と波長が $\boxed{\text{B8}}$ 倍になり、津波の高さが $\boxed{\text{B9}}$ 倍になる。この静水深の変化領域では、津波の周期 T が 20 分程度であれば、本問で使用した浅水波の条件 $\lambda \gg h_0$ かつ $h_0 \gg a$ を満たす。

----- $\boxed{\text{B5}}$ ~ $\boxed{\text{B9}}$ の選択肢 -----

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8 ⑥ 1/2 ⑦ 1/3 ⑧ 1/4 ⑨ 1/6 ⑩ 1/8
 ⑪ -1 ⑫ -2 ⑬ -3 ⑭ -4 ⑮ -8 ⑯ -1/2 ⑰ -1/3 ⑱ -1/4 ⑲ -1/6 ⑳ -1/8

(参考資料) 本問で用いた津波の記録数値および留意事項を示しておく。

* 沖を進む津波の記録値

静水深 h_0 : 数十 m ~ 数千 m.

周期 T : 数分 ~ 数十分. 周期は発生源に依存し水深変化によらない.

波の高さ(振幅) a : 数十 cm ~ 数 m. 発生源に依存し, 水深 h_0 が減少すると増加する.

伝播速度 c : 数十 m/s ~ 数百 m/s. 水深に依存し, 水深 h_0 が減少すると低下する.

波長 λ : 数十 km ~ 数百 km. 伝播速度に比例する.

* 沖を進む津波は, 浅水波の条件 $\lambda \gg h_0$ かつ $|s(x,t)| \leq a \ll h_0$ をほぼ満たす. 本問では, 静水深 h_0 と周期 T の組合せでこの条件を満たす場合を考える.

* 実際の津波には様々な周期の波が含まれるが, 本問では単一の周期の波 (単一の周波数の波) しか含まれないと仮定した.

* 波動方程式では, 代表時間を周期 T として, 代表長さとして代表速度は, それぞれ同じ水深での波長 λ と伝播速度 λ/T を用いる. 波動があるときの海水の運動方程式では, 代表時間を周期 T , 代表長さを波の高さ(振幅) a , 代表速度を変位速度 a/T とする. 上記の津波の記録を用いると, $v_z(x,0,t) = \partial s / \partial t$ の代表値は $a/T \sim 10^{-2}$ m/s, $\partial v_z / \partial t$ の代表値は $a/T^2 \sim 10^{-4}$ m/s² となるため, 式(5-2)において $|\partial v_z / \partial t| \ll g$ ($= 9.8$ m/s²) と考えてよい.

* 微小量設定 : 海水の流速成分の比較 $|v_z| \ll |v_x|$ は, 浅水波の条件 $\lambda \gg h_0$ と波の波数 $k = 2\pi/\lambda$ より $kh_0 \ll 1$ となることから得られる. 一方, 海水流速の x 成分と伝播速度の比較 $|v_x| \ll c$ は, 浅水波の条件 $a \ll h_0$ から求められる. これより, 海水の流速 \mathbf{v} が伝播速度 c よりも非常に小さいとした仮定が妥当であることがわかる.

大問 6 (化学①)

必要があれば、以下の物理定数値を使うこと。

Planck 定数	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$	電子の質量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
電子の電荷	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$	真空中での光速	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
真空の誘電率	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$	Rydberg 定数	$R = 1.10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

1. 以下の文章を読み設問(1)~(6)に答えよ。

水素原子 (H, 原子番号 $Z = 1$) は、1 個の陽子と 1 個の電子からできている。 A1
 が 1913 年に考案した原子モデルによると、電子は陽子の周りを速度 v で円軌道上を運動し、その時の運動エネルギー (K) は以下となる。

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2$$

電子に働く遠心力が A2 力と等しくなり、電子に作用する合力 (F) がゼロになることで円軌道を維持できる。

H 原子の全エネルギー (E) が運動エネルギー (K) とポテンシャルエネルギー (U) の和、すなわち $E = K + U$ で与えられ、 $K = -U/2$ である。ここで、電子のエネルギーの角運動量 ($m_e r v$) に量子化を導入する。すなわち、角運動量が還元 Planck 定数の整数倍となる ($m_e r v = nh/(2\pi)$) とすると A3 が得られ、この式により原子の半径 (r) が計算できる。この式中の n は正の整数であり、 $n = 1$ として計算した r の値は A4 pm となり、H 原子の r に相当する。

この単純なモデルにより、原子状水素のスペクトルを合理的に説明でき、そのスペクトル線の波長 λ は Rydberg が 1888 年に提案した以下の経験式により解釈できる。

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

ここで、 $\tilde{\nu}$ はそれぞれのスペクトル線の波数であり、 n_1 および n_2 は正の整数である。例えば、 $n_1 = 2$ および $n_2 = 3$ とすると、Balmer 系列のスペクトル線 (λ_B) の最長波長が A5 nm と計算できる。これは電磁波の A6 領域である。一方、Lyman 系列のスペクトル線の最長波長 ($\lambda_L = 121.6 \text{ nm}$) を計算するには、 n_1 および n_2 の値の組み合わせとして (n_1, n_2) = A7 を使用する必要がある。

(1) 空欄 **A1** , **A2** に適切なものを以下の選択肢から選べ.

- ① Dirac ② Coulomb ③ Heisenberg ④ Yukawa
⑤ Pauli ⑥ Newton ⑦ Bohr ⑧ Schrödinger

(2) 空欄 **A3** に適切な文字式を以下の選択肢から選べ.

① $r = \frac{nh\epsilon_0}{\pi em_e}$ ② $r = \frac{n^3 h^3 \epsilon_0}{\pi e^3 m_e}$ ③ $r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi e^2 m_e}$
④ $r = \frac{n^2 h^2 3\epsilon_0}{2\pi e^2 m_e}$ ⑤ $r = \frac{(n^2 h^2 \epsilon_0)^2}{\pi e^2 m_e}$ ⑥ $r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{(\pi e^2 m_e)^2}$

(3) 空欄 **A4** に適切な数値を以下の選択肢から選べ.

- ① 5.93×10^{-11} ② 0.329 ③ 10.9
④ 52.9 ⑤ 294 ⑥ 900

(4) 空欄 **A5** に適切な数値を以下の選択肢から選べ.

- ① 6.55×10^{-3} ② 74.6 ③ 134
④ 655 ⑤ 880 ⑥ 9370

(5) 空欄 **A6** に適切な語句を以下の選択肢から選べ.

- ① マイクロ波 ② 可視光 ③ 紫外線
④ ガンマ線 ⑤ X線 ⑥ 赤外線

(6) 空欄 **A7** に入る最も適切な値の組み合わせを以下の選択肢から選べ.

- ① (2, 3) ② (5, 7) ③ (3, 4)
④ (2, 1) ⑤ (1, 2) ⑥ (1, 3)

2. 原子特性に関する以下の文章を読み設問(1)~(6)に答えよ。

1s 軌道の内殻電子とは対照的に、2s および 3s 軌道のよりエネルギーの高い電子は、全核電荷 ($+Ze$) ではなく、より小さな有効核電荷 ($+Z^*e$) の影響下にある。これは **A8** 効果といわれる。図 1 に、Li 原子 ($Z=3$) の 2s 電子について示す。

有効核電荷数 Z^* の値は周期表のほとんどの元素についてまとめられている。したがって、 Z^* の適切な値を使用し、**A9** の式から 1s, 2s, および 2p 軌道の軌道エネルギーを計算することができる。ここで、 n は主量子数である。第 2 周期元素 (Li から Ne) の軌道エネルギーをグラフにプロットすると、Li から Ne へと原子番号が増えるにつれて **AX** 。

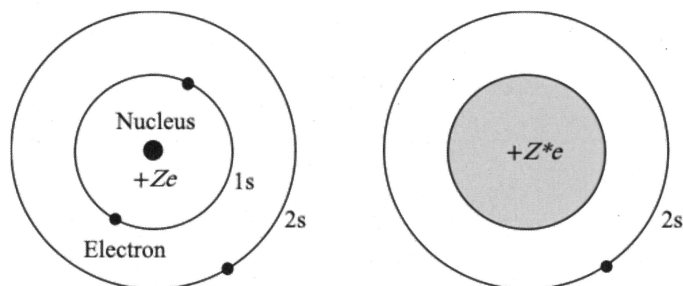


図 1 リチウム原子のモデル (左) と有効核電荷に対応するモデル (右)

表 1 に Li および Na の電子の Z と Z^* の値を示す。この表に示す Z と Z^* の値を使用することで、Li の 1s, 2s 軌道および Na の 1s, 2s, 3s 軌道の **A8** 効果を表す定数 (σ) は、 $\sigma = Z - Z^*$ の式から計算できる。計算された σ の値より、Li の第 1 イオン化エネルギー (I_1) は Na の I_1 と比べて **B1** 。

表 1

	Li	Na
Z	3	11
Z^* (1s)	2.69	10.63
Z^* (2s)	1.28	6.57
Z^* (3s)	-	2.51

化学におけるもう一つの重要な概念は、酸化数である。単体 (例えば Cl_2) の原子の酸化数は **B2** であり、ほとんどの化合物中の水素の酸化数は +1、酸素の酸化数は -2 である。さらに、中性化合物中の全原子の酸化数の合計は **B3** である。したがって、 HCl では Cl の酸化数は **B4** であり、 HClO_3 では **B5** である。この規則に従うと、**B6** の炭素原子の酸化数は +4 が割り当てられる。

(1) 空欄 **A8** に入る最も適切な語句を以下の選択肢から選べ.

- ① 電子 ② 遮蔽 ③ 光電
④ 原子 ⑤ 圧電 ⑥ 核

(2) 空欄 **A9** に適切な文字式を以下の選択肢から選べ.

- ① $E_n = -13.6 \left(\frac{2Z^*}{n} \right)^2$ ② $E_n = -13.6 \left(\frac{Z^*}{n} \right)^3$ ③ $E_n = 13.6 \left(\frac{Z^*}{n} \right)^2$
④ $E_n = -13.6 \left(\frac{Z^*}{n} \right)^2$ ⑤ $E_n = 13.6 \left(\frac{Z^*}{2n} \right)^3$ ⑥ $E_n = 13.6 \left(\frac{Z^*}{n} \right)^{1/2}$

(3) 空欄 **AX** に適切な語句を以下の選択肢から選べ.

- ① 増加する ② 一定となる ③ 減少する

(4) 空欄 **B1** に適切な語句を以下の選択肢から選べ.

- ① 大きい ② 変わらない ③ 小さい

(5) 空欄 **B2** ~ **B5** に入る数値を以下の選択肢から選べ.

- ① +1 ② +2 ③ +3 ④ +4 ⑤ +5 ⑥ +6 ⑦ +7 ⑧ 0 ⑨ -1

(6) 空欄 **B6** に入る分子を以下の選択肢から選べ.

- ① CO ② CO₂ ③ CH₄ ④ CH₃OH

3. 以下の文章を読み設問(1)~(2)に答えよ。

1931年、Paulingは混成軌道の概念に関する独創的な論文を発表した。彼によると、ある元素の価電子軌道を組み合わせることにより、小さな有機分子および無機分子の構造を説明するための混成軌道を形成することができる。炭素 ($Z=6$) の価電子の基底状態配置 ($2s^2 2p^2$) は図2のようになる。この価電子は、図3に示すように、 sp^3 、 sp^2 、および sp として表される3種類の混成軌道を生成する。

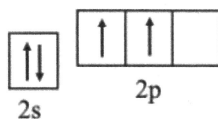


図2 炭素の価電子の基底状態配置 ($2s^2 2p^2$)

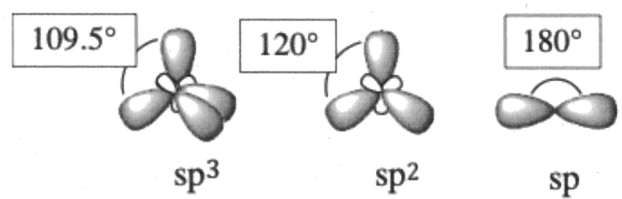
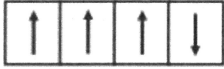
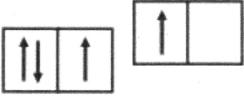
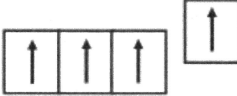
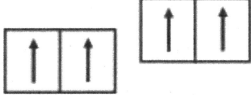
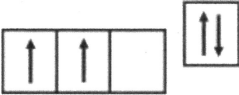
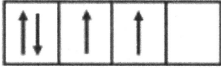
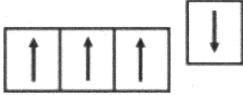
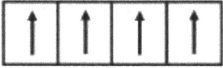
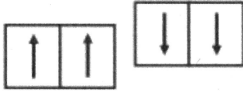


図3 炭素の混成軌道

sp^3 炭素原子は、**B7** の電子配置を持ち **B8** 個の電子を受け入れ、メタンやエタンのように水素や炭素と **B9** 個の共有結合を形成する。 sp^2 炭素原子の場合、電子配置は **BX** であり、**C1** 個の電子を受け入れて、**C2** 個の共有結合を形成する。残りの p 軌道は、エチレンの場合のように、別の炭素原子の p 軌道と重なり合うことによって1つの π 結合を形成する。 sp 炭素原子は **C3** の電子配置となり、電子を **C4** 個受け入れることで、**C5** 個の共有結合を形成する。残り2つの p 軌道は、アセチレンの場合のように、別の炭素原子の p 軌道と重なり合うことによって **C6** 個の π 結合を形成する。ブタジエンには **C7** 個の π 結合があり、これは分子内の **C8** 個の p 軌道の重なり合いから生じる。

(1) 空欄 **B7** , **BX** , および **C3** に適切な電子配置を以下の選択肢より選べ.

- ①  ②  ③ 
- ④  ⑤  ⑥ 
- ⑦  ⑧  ⑨ 

(2) 空欄 **B8** ~ **B9** , **C1** ~ **C2** , および **C4** ~ **C8** に適切な数値を以下の選択肢より選べ.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6

大問 7 (化学②)

次の問 1~3 を読み、空欄 **A1** ~ **C3** に当てはまる最も適切な語句、式または数値の番号を、選択肢からそれぞれ一つずつ選びなさい。

絶対温度、体積、圧力をそれぞれ T , V , P で表す。エンタルピー、エントロピー、Gibbs エネルギーをそれぞれ H , S , G で表す。気体定数を R , ファラデー定数を F , 重力加速度を g とする。 a は物質 (イオンを含む) の活量である。

必要であれば, $R = 8.31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, $F = 9.65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$, $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\ln 0.2 = -1.61$, $\ln 0.21 = -1.56$, $\ln 0.35 = -1.05$, $\ln 0.5 = -0.69$, $\ln 0.8 = -0.22$ を用いること。

1. すべての物質は、状態変数である温度 T と圧力 P により、気相、液相および固相のいずれかの状態をとる。図は H_2O の状態図である。

図中の α , β および γ は順に **A1** の各単相が安定な領域である。線 OA, OB および OC は各二相の境界を示す。O は三相が共存する点であり、三重点と呼ばれる。

これらの領域、線および点においては、状態変数に対する制約が異なる。例えば、領域の内部においては T と P を独立に変化させ得る。このように変化させ得る数を **A2** と呼ぶ。

A2 の値は、上記の領域、線および点に対して **A3**, **A4** および **A5** である。

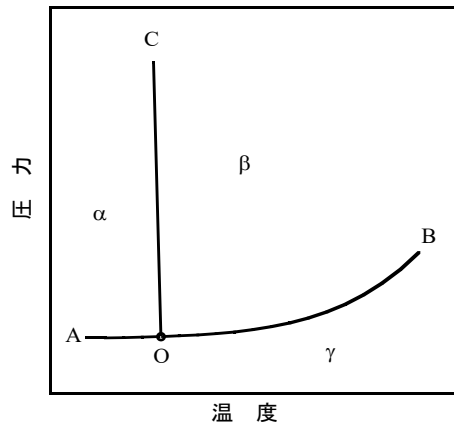


図 H_2O の状態図

平衡状態において、ある相が他相に転移するとき、これに伴う T と P の関係は(1)式で表される。 ΔH および ΔV は相転移に伴うモルエンタルピー変化およびモル体積変化を示す。これを **A6** の式という。

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{T \Delta V} \quad (1)$$

ここで氷の融解に及ぼす圧力の効果を検討してみよう．アイススケートで氷にかかる圧力を考えてみる．

体重 50 kg のスケーターがブレードの幅 5.0 mm のスケート靴を履いたとする．最大の接地圧が発生するのは片足滑走かつブレードの接地長さが 20 mm のときと仮定する．

氷の融解に伴うモルエンタルピー変化およびモル体積変化は、 $+6.01 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ および $-1.64\times 10^{-6} \text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$ である．温度 T は大気圧下での融点 273 K を用いる．

上記の数値から dP/dT は $\boxed{\text{A7}}$ $\text{Pa}\cdot\text{K}^{-1}$ である．一方、ブレードによって生ずる圧力 ΔP は $\boxed{\text{A8}}$ Pa となる．従って、この場合の氷の融点は $\boxed{\text{A9}}$ する．

$\boxed{\text{A1}}$

- ① 固相・液相・気相 ② 液相・固相・気相 ③ 気相・固相・液相 ④ 固相・気相・液相

$\boxed{\text{A2}}$

- ① 頻度因子 ② 状態量 ③ 配位数 ④ 自由度

$\boxed{\text{A3}}$

～

$\boxed{\text{A5}}$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0

$\boxed{\text{A6}}$

- ① Arrhenius ② Dalton ③ Clausius-Clapeyron ④ Gay-Lussac

$\boxed{\text{A7}}$

- ① 1.34×10^7 ② 1.34×10^4 ③ -1.34×10^7 ④ -1.34×10^4

$\boxed{\text{A8}}$

- ① 4.9×10^2 ② 9.8×10^2 ③ 4.9×10^6 ④ 9.8×10^6

$\boxed{\text{A9}}$

- ① 0.37 K 下降 ② 3.7 K 下降 ③ 0.37 K 上昇 ④ 3.7 K 上昇

2. 理想気体とは構成分子の体積および分子間力が無限小の仮想的な気体である。しかし、実在の気体は理想気体とは異なり、様々な性質を持つ。それらの中で理想気体に最も近いものは、**AX** からなる気体である。

隔壁で仕切られた容器の隣接する区画に入っている、等温定圧下の理想気体 A と理想気体 B を考える。A の分子量は B の分子量より大きいものとする。容器中の隔壁を取り去ったとき、**B1**。ここで隔壁は垂直に移動するものとし、熱の発生は正負を問わず無いものとする。

気体が混じり合う現象を考える。経験的に、等温定圧で異なる気体を接触させると混合は自発的に起こるが、均一に混合した気体が自発的に元の成分に分離することはない。このような変化を **B2** と言う。これは混合により系の Gibbs エネルギーが低下し安定化するためである。

混合に際しての Gibbs エネルギー変化 ΔG は、エンタルピー項とエントロピー項からなり、**B3** で表される。反応（この場合は混合）の ΔG が負であれば反応は進行し、 $\Delta G = 0$ に至って反応は停止する。この状態を **B4** と呼ぶ。

温度 300K、大気圧の下での理想気体 C と理想気体 D の混合を考える。0.20 モルの C と 0.80 モルの D を混合すると 1.00 モルの混合気体を得られる。この条件下での理想気体 1.00 モルの体積を V_0 とすると、混合によって **B5** となる。

n モルの気体の圧力や体積を変化させれば **B6** で表されるエントロピー変化が生ずる。理想気体では混合によるエンタルピー変化はないので、Gibbs エネルギー変化 ΔG は **B7** である。

AX

- ① 低圧での低分子量・有極性の分子
- ② 高圧での低分子量・有極性の分子
- ③ 低圧での低分子量・無極性の分子
- ④ 高圧での低分子量・無極性の分子
- ⑤ 低圧での高分子量・有極性の分子
- ⑥ 高圧での高分子量・有極性の分子
- ⑦ 低圧での高分子量・無極性の分子
- ⑧ 高圧での高分子量・無極性の分子

B1

- ① A は B の下部に潜り込み，上下に二層となる
- ② A および B は互いに逆向きに水平に移動しながら混じり合って均一な気体となる
- ③ A は B の下部に潜り込みながら混じり合って均一な気体となる
- ④ A および B は隔壁を取り去る前と同じ位置に留まる

B2

- ① 定圧変化 ② 不可逆変化 ③ 定積変化 ④ 可逆変化

B3

- ① $\Delta G = \Delta H + T\Delta S$ ② $\Delta G = \Delta H + \Delta S/T$ ③ $\Delta G = T\Delta H - \Delta S$
- ④ $\Delta G = T\Delta H + \Delta S$ ⑤ $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ ⑥ $\Delta G = \Delta H + \Delta S/T$

B4

- ① 基底状態 ② 定常状態 ③ 平衡状態 ④ 臨界状態

B5

- ① C の体積は $0.20V_0$ ，D の体積は $0.80V_0$
- ② C の体積は $0.50V_0$ ，D の体積は $0.50V_0$
- ③ C の体積は $0.80V_0$ ，D の体積は $0.20V_0$
- ④ C の体積は $1.00V_0$ ，D の体積は $1.00V_0$

B6 (i, f は各々，変化の 前，後，を示す)

- ① $\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln \frac{P_f}{P_i}$ ② $\Delta S = nR \ln \frac{V_i}{V_f} = nR \ln \frac{P_f}{P_i}$
- ③ $\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln \frac{P_i}{P_f}$ ④ $\Delta S = nR \ln \frac{V_i}{V_f} = nR \ln \frac{P_i}{P_f}$

B7

- ① -1.24 kJ ② -4.14 J ③ 1.24 kJ ④ 4.14 J

3. 燃焼等の化学反応は物質の酸化還元を伴う。酸化還元過程は酸化剤と還元剤の間での電子の授受であるが、通常は原子や分子の間で直接行われるため、電子の移動として意識されることは少ない。この電子の授受を、外部回路（金属等の導電体）を通して行わせ、電子の流れ（電流）を外部に取り出すものが電池であり、逆に外部からの電流で化学反応を行わせれば電解となる。

このように外部回路を通じる電子を反応に関与させる手段が電気化学的手法であり、電子の授受による酸化と還元を行う場所が空間的に分離されている。反応が起こる表面を有する導電体を電極と言う。

そこで、ある電極 1 における(1)式のような反応電子数 n の電気化学反応を考える。



この電極の電位を E_1 とする。このような電位を表す式を Nernst の式と呼び、**B8** で示される。 E° は標準電極電位である。

同様に、電極 2 の電気化学反応(2)式の電位を E_2 とする。



一般に $E_1 \neq E_2$ なので、両電極の外部端子を電圧計に接続すると電圧 $E = E_1 - E_2$ が測定される。 E の正確な測定にあたり、電圧計には **B9** 内部抵抗が要求される。

観測される E は **BX** の反応によるものであり、その反応の Gibbs エネルギー変化 ΔG との間には **C1** の関係がある。 $E > 0$ の場合、上述の電気化学反応において **C2** に進行する。

応用として H_2 - O_2 燃料電池を考える。大気圧下で作動温度を 80°C として、燃料には 100 mol% H_2 、酸化剤には 21 mol% O_2 を含む空気を用い、排気組成を 35 mol% H_2O と仮定すれば、電池の起電力は **C3** となる。ここで、 80°C における $H_2O(g)$ 生成の標準 Gibbs エネルギー変化は $\Delta G^\circ = -226.1 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ である。なお、すべての気体を理想気体とみなす。

B8

① $E_1 = E_1^\circ - \frac{RT}{nF} \ln \frac{a_A}{a_B}$

② $E_1 = E_1^\circ + \frac{RT}{nF} \ln \frac{a_A}{a_B}$

③ $E_1 = E_1^\circ + \frac{nF}{RT} \ln \frac{a_A}{a_B}$

④ $E_1 = E_1^\circ - \frac{nF}{RT} \ln \frac{a_A}{a_B}$

B9

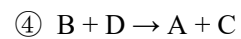
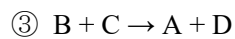
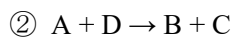
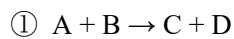
① 低い (理想的にはゼロ)

② 電池の内部抵抗と同程度の

③ 中程度の

④ 高い (理想的には無限大)

BX



C1

① $\Delta G = nFE$

② $\Delta G = E/nF$

③ $\Delta G = -nFE$

④ $\Delta G = -E/nF$

C2

① (1)式は右向き, (2)式は左向き

② (1)式は右向き, (2)式は右向き

③ (1)式は左向き, (2)式は右向き

④ (1)式は左向き, (2)式は左向き

C3

① 1.172 V

② 0.586 V

③ 1.176 V

④ 2.351 V

大問 8 (化学③)

1. 以下の(1)~(4)の分子について、下線部の原子の混成軌道を、①~③のうちからそれぞれ1つ選べ.

(1) NH₃ A1

(2) BH₃ A2

(3) H₃NBH₃ A3

(4) H₃NBH₃ A4

① sp ② sp² ③ sp³

2. 以下の(1)~(3)について、分子の極性の大きい方を選べ. ただし、それぞれの分子は、最も安定な構造をとるとする.

(1) ① *cis*-1,2-ジクロロエテン ② *trans*-1,2-ジクロロエテン
A5

(2) ① *cis*-1,4-ジクロロシクロヘキサン ② *trans*-1,4-ジクロロシクロヘキサン
A6

(3) ① *cis*-1,2-ジクロロシクロヘキサン ② *cis*-1,2-ジクロロシクロプロパン
A7

3. 分子の酸性について、以下の(1)~(3)に答えよ.

(1) 下線部の H の酸性が最も強いものを①~③のうちから選べ.

A8

- ① $\text{CH}_3\text{COO}\underline{\text{H}}$ ② $\text{CF}_3\text{COO}\underline{\text{H}}$ ③ $\text{CF}_3\text{CH}_2\text{COO}\underline{\text{H}}$

(2) 下線部の H の酸性が最も強いものを①~③のうちから選べ.

A9

- ① $\text{C}_2\underline{\text{H}}_2$ ② $\text{C}_2\underline{\text{H}}_4$ ③ $\text{C}_2\underline{\text{H}}_6$

(3) 等モルの $\text{CH}_2(\text{CHO})_2$ と $t\text{-BuONa}$ を水に溶かした場合について考える. 以下に示す反応の進行が想定されるが、この反応の平衡はどちら側に偏っているか、①~②のうちから選べ. $\text{CH}_2(\text{CHO})_2$ および $t\text{-BuOH}$ の $\text{p}K_a$ は、それぞれ 5.0 および 18.0 である.



AX

- ① 反応物側 ② 生成物側

4. 以下(1)~(4)に示した分子について、下線部の水素原子を含む C-H 結合のホモリシスに必要なエネルギーが小さい方を①~②のうちから選べ.

(1) ① $\text{CH}_3\text{CH}_2\underline{\text{C}}\text{H}_3$ ② $\text{CH}_3\underline{\text{C}}\text{H}_2\text{CH}_3$

B1

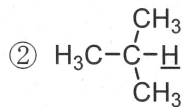
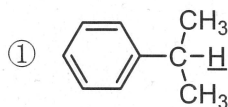
(2) ① $\text{CH}_2=\underline{\text{C}}\text{H}_2$ ② $\text{CH}_3\underline{\text{C}}\text{H}_3$

B2

(3) ① $\text{CH}_3\text{CH}_2\underline{\text{C}}\text{H}_3$ ② $\text{CH}_3\underline{\text{C}}\text{H}=\text{CH}_2$

B3

(4)

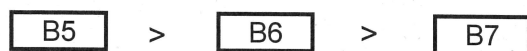


B4

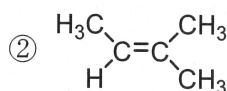
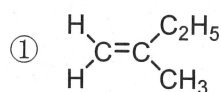
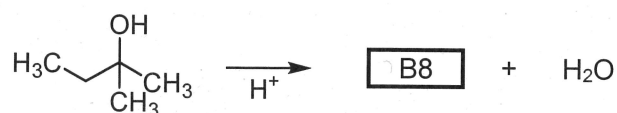
5. 以下の有機化学反応にかかわる(1)~(5)に答えよ.

(1) 以下の①~③のブタンへの水素化反応について、発熱量の大きな順番に並べよ.

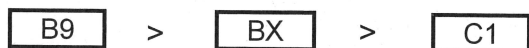
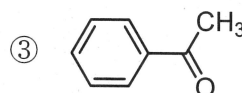
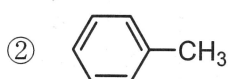
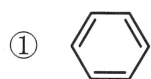
① 1-ブテン ② *trans*-2-ブテン ③ *cis*-2-ブテン



(2) 以下の反応の主生成物を①~②のうちから選べ.

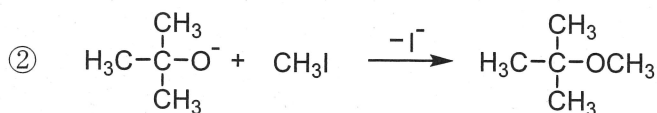
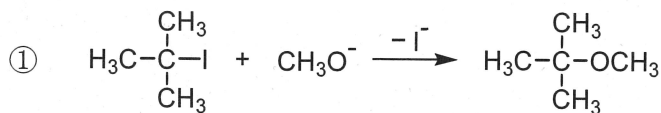


(3) 以下の分子について、芳香族求電子置換反応における反応性が高い順番に並べよ.



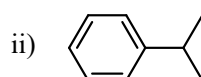
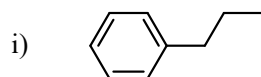
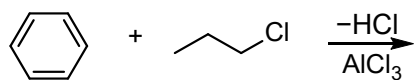
(4) 以下の Williamson のエーテル合成の反応物として、①~②のどちらが適切か選べ.

C2



(5) 以下に示す反応の生成物は, i) と ii) の混合物となる. ii) の生成機構について, 適切な説明を ①~③のうちから 1 つ選べ.

C3



- ① AlCl_3 の作用による生成物 i) の異性化で, 生成物 ii) が得られる.
- ② 1 級のカルボアニオン中間体が 2 級のカルボアニオン中間体に異性化してから反応するため, 生成物 ii) が得られる.
- ③ 1 級のカルボカチオン中間体が 2 級のカルボカチオン中間体に異性化してから反応するため, 生成物 ii) が得られる.

<試験を終えた学生のみなさんへ>

統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の1年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

*統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp