

2025年度（令和07年度）統一テスト

（理数基礎学力到達度テスト）

<問題冊子②>選択問題

大問2（数学②） 大問3（数学③）
大問4（物理学①） 大問5（物理学②）
大問6（化学①） 大問7（化学②） 大問8（化学③）

試験時間 2時間15分

解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません

【問題を選択する際の注意】

1. 以下の問題選択ルールに従い、大問7問のうち4問に解答すること。
 - a) 物理学、化学からそれぞれ1問は解答すること。
 - b) 化学を3問とも選択することはできない。

2. したがって、選択問題の解答パターンは下記の4つのみとなる。

数学2問－物理学1問－化学1問	数学1問－物理学2問－化学1問
数学1問－物理学1問－化学2問	数学0問－物理学2問－化学2問

【解答する際の注意】

1. 大問1問につき解答用紙1枚（裏面もあり）を用いること。
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること（マーク式のみの大問もあり）。
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は、問題文の **A1**， **A2**，・・・にあてはまるものを該当する解答群（選択肢）から選び、選択肢の番号①，②・・・で答えること。同じ選択肢が複数回あてはまることもある。
4. 空欄の中には通常の式では不要な「1」「-1」「0」が当てはまることがある。その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること。
5. 問題に関する質問は、汚損で読めない等以外は原則認めない。

大問2 (数学 ②)

1. 連立1次方程式とベクトル空間に関する以下の間に答えなさい。

(1) \mathbf{R}^n の標準基底を $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ とし, $A = [a_{ij}]$ を n 次正則行列とする. 連立1次方程式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{e}_i \text{ の解 } \mathbf{x}_i (i = 1, \dots, n) \text{ と, 任意の列ベクトル } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ に対する } A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

の解との間の関係式は以下に示される.

$$\begin{aligned} A(b_1\mathbf{x}_1 + \dots + b_n\mathbf{x}_n) &= b_1 \boxed{\text{A1}} + \dots + b_n \boxed{\text{A2}} = b_1 \boxed{\text{A3}} + \dots + b_n \boxed{\text{A4}} \\ &= \boxed{\text{A5}} \text{ より, } A \text{ は正則であるので, } b_1\mathbf{x}_1 + \dots + b_n\mathbf{x}_n \text{ は } A\mathbf{x}=\boxed{\text{A6}} \text{ の } \boxed{\text{A7}} \\ &\text{である.} \end{aligned}$$

(2) 具体的に, \mathbf{R}^4 の4つのベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -\alpha^2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 =$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ (}\alpha \text{: 実数) を列ベクトル表示した } 4 \times 4 \text{ 行列を } A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] \text{ とする.}$$

ここで, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ の解を求めると, $\alpha \neq \boxed{\text{A8}}$ のときは $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

は $\boxed{\text{A9}}$ をもつ. 例えば, $\alpha = 0$ すなわち $\mathbf{b}=\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の場合は $\mathbf{x}_1 = \boxed{\text{AX}}$

である. $\mathbf{b}=\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ の場合も同様に求められ, それぞれ $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{-2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ となる. したがって, } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ の場合には (1) の}$$

結果を用いると、 $x = \boxed{\text{B1}}$ のように簡単に求めることができる。

- (3) 上記(2)の α を含む A を用いた同次連立1次方程式 $Ax=0$ の解空間 (R^4 の部分空間) において、 $\dim W$ はその次元を表し、 $\text{rank } A$ と $\text{rank } [A | 0]$ は各々係数行列の階数と拡大係数行列の階数を表すものとする。ここにおいて、 $\alpha = \boxed{\text{B2}}$ のときは $Ax=0$ は $\boxed{\text{B3}}$ をもち、 a_1, a_2, a_3, a_4 は $\boxed{\text{B4}}$ であり、また $\text{rank } A = \boxed{\text{B5}}$ 、 $\text{rank } [A | 0] = \boxed{\text{B6}} < 4$ 、 $\dim W = \boxed{\text{B7}}$ であり、さらに解空間の基底の組は $\{\boxed{\text{B8}}, \boxed{\text{B9}}\}$ である。

$\boxed{\text{A1}} \sim \boxed{\text{A6}}$ の解答群 _____

- ① e_1 ② e_i ③ e_n ④ x_i ⑤ b ⑥ Ae_1 ⑦ Ae_n
 ⑧ Ab ⑨ Aa_{11} ⑩ $a_{11}x_1$ ⑪ Ax_1 ⑫ Aa_{nn} ⑬ $a_{nn}x_n$ ⑭ Ax_n

$\boxed{\text{A7}}, \boxed{\text{A9}}, \boxed{\text{B3}}, \boxed{\text{B4}}$ の解答群 _____

- ① 自明な解 ② ただ1つの解 ③ 無数の解 ④ 特殊解
 ⑤ 1次写像 ⑥ 1次従属 ⑦ 1次独立 ⑧ 1次結合

$\boxed{\text{A8}}, \boxed{\text{B2}}$ および $\boxed{\text{B5}} \sim \boxed{\text{B7}}$ の解答群 _____

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ -1 ⑥ -2 ⑦ -3 ⑧ -4 ⑨ 0
 ⑩ ± 1 ⑪ ± 2 ⑫ ± 3 ⑬ ± 4 ⑭ $<$ ⑮ $>$ ⑯ \neq ⑰ $=$ ⑱ \in

$\boxed{\text{AX}}, \boxed{\text{B1}}, \boxed{\text{B8}}, \boxed{\text{B9}}$ の解答群 _____

- ① $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑤ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ⑥ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 ⑦ $\begin{bmatrix} -29 \\ 9 \\ 19 \\ 57 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} -6 \\ \frac{15}{8} \\ \frac{5}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} -4 \\ \frac{5}{8} \\ \frac{15}{4} \\ -6 \end{bmatrix}$ ⑩ $\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{15}{8} \\ 6 \end{bmatrix}$ ⑪ $\begin{bmatrix} 19 \\ 35 \\ -29 \\ 5 \end{bmatrix}$ ⑫ $\begin{bmatrix} 57 \\ -19 \\ 9 \\ 29 \end{bmatrix}$

2. 行列式, 余因子行列, 逆行列および線形写像に関する以下の問に答えなさい.

(1) \mathbf{R}^3 の3つの列ベクトル $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の成分を並べた行

列を $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3]$ とする. この逆行列 C^{-1} を求めるのに必要な 行列式 $|C|$ と 余因子行列 \tilde{C} を計算し, その過程と結果を 解答用紙裏面の記述解答欄 1 に書きなさい.

(2) 線形写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$ におけるその行列表示

$f = Fx = \begin{bmatrix} \text{BX} & \text{C1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ より, f の行列 $F = \begin{bmatrix} \text{BX} & \text{C1} \end{bmatrix}$ を得る. こ

の場合, f の像の次元は $\dim(\text{Im } f) = \text{C2}$, その基底の組は $\{\text{C3}, \text{C4}\}$ と求められる.

(3) \mathbf{R}^2 と \mathbf{R}^3 の基底をそれぞれ $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$, $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ とすると, 両基底間の関係は f の行列 F を用いて $[f(\mathbf{p}_1), f(\mathbf{p}_2)] = F[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]Q$ と表すことができる. この C5 行列 Q を, 線形写像 f の表現行列という.

ここで, 上記(2)の f を用いて, \mathbf{R}^2 の基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ を $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, \mathbf{R}^3 の

基底 $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ を上記(1)の $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ として与えた場合の表現行列 Q は

$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = [\text{C6}]$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = [\text{C7}]$ となるので, $Q = [\text{C8} \text{ C9}]$

と求められる.

BX **C1** および **C6** ~ **C9** の解答群 _____

- | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|---|----|---|----|---|-----|---|----|
| | -20 | | -12 | | -8 | | -7 | | -4 | | -4 |
| ① | -12 | ② | 6 | ③ | -4 | ④ | -4 | ⑤ | -2 | ⑥ | 2 |
| | 6 | | -20 | | 6 | | 2 | | -3 | | -7 |
| | -4 | | -3 | | -2 | | -2 | | -1 | | 1 |
| ⑦ | 6 | ⑧ | -1 | ⑨ | 1 | ⑩ | 3 | ⑪ | 2 | ⑫ | -2 |
| | -8 | | 2 | | 3 | | -4 | | -3 | | 3 |
| | 2 | | 2 | | 3 | | 3 | | 6 | | 6 |
| ⑬ | -7 | ⑭ | -3 | ⑮ | -4 | ⑯ | 1 | ⑰ | -20 | ⑱ | -8 |
| | -4 | | -1 | | -2 | | -2 | | -12 | | -4 |
-

C2 **C5** の解答群 _____

- | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|----|
| ① | 1 | ② | 2 | ③ | 3 | ④ | 4 | ⑤ | 5 | ⑥ | 6 | ⑦ | -1 |
| ⑧ | -2 | ⑨ | -3 | ⑩ | -4 | ⑪ | -5 | ⑫ | -6 | ⑬ | 0 | | |
| ⑭ | 1×2 | ⑮ | 2×1 | ⑯ | 2×2 | ⑰ | 3×1 | ⑱ | 3×2 | ⑳ | 3×3 | | |
-

C3 **C4** の解答群 _____

- | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|--|---|---|---|--|---|---|---|--|
| ① | $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ | ② | $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ | ③ | $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ | ④ | $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ | ⑤ | $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ | ⑥ | $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ |
|---|---|---|--|---|---|---|--|---|---|---|--|
-

3. 固有値, 固有ベクトルとその応用に関する以下の問に答えなさい.

固有値 λ をもつ実正方行列を $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると, 固有値は選択肢の番号の若い順に $\lambda = \boxed{\text{CX}}$, $\boxed{\text{D1}}$ となる. $\lambda = \boxed{\text{CX}}$ のときは固有ベクトルの1つが

$\boxed{\text{D2}}$ と求められ, $\boxed{\text{D1}}$ のときは, 選択肢の番号の若い順に $\boxed{\text{D3}}$ と $\boxed{\text{D4}}$ が固有ベクトルとして求められる. これらの固有ベクトルを選択肢の番号の若い順に並べた変換行列を $P = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D2}} & \boxed{\text{D3}} & \boxed{\text{D4}} \end{bmatrix}$ とすれば, G は

$$\boxed{\text{D5}} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D6}} & \boxed{\text{D7}} & \boxed{\text{D8}} \\ 0 & \boxed{\text{D9}} & \boxed{\text{DX}} \\ \boxed{\text{E1}} & 0 & \boxed{\text{E2}} \end{bmatrix} \text{ のように変形される.}$$

次に, この結果を微分方程式の解法に適用する. 時間 t の未知関数 $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ およびその t についての導関数 \dot{y}_1 , \dot{y}_2 , \dot{y}_3 が定める連立1階線形微分方程式

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ \dot{y}_2 = -y_2 + 2y_3 \\ \dot{y}_3 = y_2 \end{cases} \text{ において, } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} \text{ とすると } \dot{\mathbf{y}} = \boxed{\text{E3}} \mathbf{y} \text{ と表}$$

せる.

ここで, $\mathbf{y} = P\mathbf{z}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ とおけば $\dot{\mathbf{z}} = \boxed{\text{D5}} \mathbf{z}$ となり, \mathbf{z} を求めることができるの

で, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{E4}} \\ \boxed{\text{E5}} \\ \boxed{\text{E6}} \end{bmatrix}$ が得られる (c_1, c_2, c_3 は任意定数).

□CX □D1 および □D6 ~ □E2 の解答群 _____

- | | | | | |
|-----------|------------|-----------|-----------|------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ -1 |
| ⑥ -2 | ⑦ -3 | ⑧ -4 | ⑨ 0 | ⑩ 1 (重解) |
| ⑪ 1 (3重解) | ⑫ 2 (重解) | ⑬ 2 (3重解) | ⑭ 4 (重解) | ⑮ 4 (3重解) |
| ⑯ -1 (重解) | ⑰ -1 (3重解) | ⑱ -3 (重解) | ⑲ -4 (重解) | ⑳ -4 (3重解) |

□D2 ~ □D4 の解答群 _____

- | | | | | | | |
|-----|-----|------|-----|-----|------|----|
| | -2 | -2 | 2 | -1 | -1 | 1 |
| ① 0 | ② 1 | ③ -2 | ④ 1 | ⑤ 2 | ⑥ -2 | |
| | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | -2 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ⑦ 0 | ⑧ 0 | ⑨ 1 | ⑩ 0 | ⑪ 1 | ⑫ 1 | |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

□D5 □E3 の解答群 (${}^tG, {}^tP: G, P$ の転置行列) _____

- | | | | | |
|---------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------|--------------|
| ① G | ② \tilde{G} | ③ G^{-1} | ④ tG | ⑤ GP |
| ⑥ $G^{-1}P$ | ⑦ GP^{-1} | ⑧ $G^{-1}PG$ | ⑨ GPG^{-1} | ⑩ tPGP |
| ⑪ $PG({}^tP)$ | ⑫ $(\tilde{P})^{-1}G\tilde{P}$ | ⑬ $\tilde{P}G(\tilde{P})^{-1}$ | ⑭ $P^{-1}GP$ | ⑮ PGP^{-1} |

□E4 ~ □E6 の解答群 _____

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| ① $-2c_1e^{-2t} + c_3e^t$ | ② $-2c_1e^{-3t} + c_3e^{2t}$ | ③ $-2c_1e^{2t} + c_3e^{-t}$ |
| ④ $-2c_1e^{4t} + c_3e^{-t}$ | ⑤ $c_1e^{-2t} + c_3e^{-t}$ | ⑥ $c_1e^{-2t} + c_3e^t$ |
| ⑦ $c_1e^{-3t} + c_3e^{2t}$ | ⑧ $c_1e^{4t} + c_3e^{-t}$ | ⑨ $2c_1e^{-2t} + c_2e^t$ |
| ⑩ $2c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$ | ⑪ $2c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$ | ⑫ $2c_1e^{4t} + c_2e^{-t}$ |

大問3 (数学 ③)

次の各問に答えなさい。

1. $f(x)$ が開区間 I において n 回微分可能とすると、 I の点 a を固定すると、 $x \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する (テイラーの定理) . $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n = 0$

が成り立つならば無限級数に展開できる (テイラー展開) . また、2変数関数 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ の近傍で無限回微分可能とする. このとき点 $(0, 0)$ 近傍の任意の点 (x, y) に対するテイラー展開は次式のように書ける.

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0, 0)$$

ここで

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial y^k},$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \quad (k = 1, \dots, n)$$

以下の関数の $x = 0$ または $(x, y) = (0, 0)$ におけるテイラー展開を求めよ.

(1) $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boxed{\text{A1}} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

(2) $y = \sin^{-1} x \quad (-\pi/2 < y < \pi/2)$

$x = \sin y$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\boxed{\text{A2}}}$$

α を定数とすると

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\boxed{\text{A3}}}{2!} x^2 + \frac{\boxed{\text{A4}}}{3!} x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

ここで x を $-x^2$ で置き換え $\alpha = -1/2$ とおくと

$$\frac{1}{\boxed{\text{A2}}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{\boxed{\text{A5}}}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 \cdots$$

$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\boxed{\text{A2}}}$ であるので項別積分すると

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\boxed{\text{A2}}} dx = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{\boxed{\text{A6}}}{112} x^7 + \cdots$$

A1 ~ **A6** の選択肢

- | | | | |
|-----------------------|-------------------------------|------------------------------------|------------------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 5 | ④ 0 |
| ⑤ -1 | ⑥ -2 | ⑦ -5 | ⑧ $1 \cdot 3$ |
| ⑨ $1 \cdot 3 \cdot 5$ | ⑩ $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ | ⑪ $(-1)^{n+1}$ | ⑫ $(-1)^n$ |
| ⑬ $1 - x^2$ | ⑭ $1 - x$ | ⑮ $\sqrt{1 - x^2}$ | ⑯ $\sqrt{1 - x}$ |
| ⑰ $\alpha - 1$ | ⑱ $\alpha(\alpha - 1)$ | ⑲ $\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)$ | ⑳ $\alpha(\alpha - 2)$ |
-

(3) $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$

ここで, f_x, f_y, f_{xx} 等は関数 $f(x, y)$ の x や y に関する偏導関数である.

$$f_x = 2x \text{ [A7]}, f_y = \text{ [A7]},$$

$$f_{xx} = 2 \text{ [A7]} - 4x^2 \text{ [A8]}, f_{xy} = -2x \text{ [A8]}, f_{yy} = - \text{ [A8]}$$

$$f_{xxx} = -12x \text{ [A9]} - 8x^3 \text{ [AX]}, f_{xxy} = -2 \text{ [A9]} - 4x^2 \text{ [AX]},$$

$$f_{xyy} = -2x \text{ [AX]}, f_{yyy} = - \text{ [AX]},$$

$$f_{xxxx} = (-12 + 16x^4) \text{ [B1]} - 48x^2 \text{ [B2]},$$

$$f_{xxxxy} = -12x \text{ [B2]} + 8x^3 \text{ [B1]}, f_{xxyyy} = -2 \text{ [B2]} + 4x^2 \text{ [B1]},$$

$$f_{xyyyy} = 2x \text{ [B1]}, f_{yyyyy} = \text{ [B1]}$$

よって

$$f_y(0, 0) = \text{ [B3]}, f_{xx}(0, 0) = \text{ [B4]}, f_{yyy}(0, 0) = \text{ [B5]}, f_{xxyy}(0, 0) = \text{ [B6]}$$

他の 4 次までの偏導関数は 0 であるので次式を得る.

$$\sin(x^2 + y) = y + x^2 + (\text{ [B7] })y^3 + (\text{ [B8] })x^2y^2 + \dots$$

A7 ~ **B8** の選択肢

- | | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 5 | ④ 0 |
| ⑤ -1 | ⑥ -2 | ⑦ -5 | ⑧ $\cos(x^2 + y)$ |
| ⑨ $\sin(x^2 + y)$ | ⑩ $\tan(x^2 + y)$ | ⑪ $\frac{1}{3!}$ | ⑫ $-\frac{1}{3!}$ |
| ⑬ $\frac{5}{3!}$ | ⑭ $\frac{12}{4!}$ | ⑮ $-\frac{12}{4!}$ | |
-

2. 以下の広義積分を求めよ. 積分値が存在しないときは「収束しない」を選択すること.
 なお, 重積分では座標平面上の集合 D において D に含まれる 区域の任意の近似増加列 $\{D_n\}$ に対して関数 $f(x, y)$ が各 D_n において重積分可能 であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$ が $\{D_n\}$ によらない一定の α に収束するとき, α を f の D における 広義重積分といい $\iint_D f(x, y) dx dy$ で表す.

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \boxed{\text{B9}}$$

$$(2) \int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$$

$$\text{右辺第 1 項} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \boxed{\text{BX}}$$

$$\text{右辺第 2 項} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \boxed{\text{C1}}$$

$$\text{よって } \int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = \boxed{\text{BX}} + \boxed{\text{C1}}$$

$$(3) \iint_D \frac{1}{(x-y)^\beta} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y < x \leq 1\} \quad (0 < \beta < 1)$$

領域 D の近似増加列 D_n を次のようにとる.

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} \right\}$$

解答用紙裏面の記述解答欄 1 に領域 D と D_n の概略を描きなさい.

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{1}{(x-y)^\beta} dx dy &= \int_{1/n}^1 \left\{ \int_0^{x-1/n} \frac{1}{(x-y)^\beta} dy \right\} dx \\ &= \int_{1/n}^1 \left[-\frac{(x-y)^{\boxed{\text{C2}}}}{\boxed{\text{C2}}} \right]_{y=0}^{y=x-1/n} dx = \int_{1/n}^1 \frac{1}{\boxed{\text{C2}}} \left\{ x^{\boxed{\text{C2}}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\boxed{\text{C2}}} \right\} dx \end{aligned}$$

よって

$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^\beta} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x-y)^\beta} dx dy = \frac{1}{(\boxed{\text{C2}})(\boxed{\text{C3}})}$$

(4) $\iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x > 0, y \geq 0\}$ ($a > 0$)

積分領域 D の近似増加列として

$$D_n = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq y \leq nx\}$$

をとり、極座標に変換すると

$$D_n = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \tan^{-1} n\}$$

となる。解答用紙裏面の記述解答欄 2 に領域 D と D_n の概略を描きなさい。このとき

$$\begin{aligned} \iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} (\boxed{\text{C4}}) \cdot (\boxed{\text{C5}}) dr d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tan^{-1} n} (\boxed{\text{C4}}) d\theta \int_0^a (\boxed{\text{C5}}) dr \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (\boxed{\text{C6}}) (\tan^{-1} n)^2 = \frac{\pi^2}{16} (\boxed{\text{C6}}) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B9}}$ ~ $\boxed{\text{C6}}$ の選択肢

-
- | | | | | |
|---------------|------------------|-----------|---------------|---------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 5 | ⑤ -1 |
| ⑥ $3\sqrt{3}$ | ⑦ $3\sqrt[3]{2}$ | ⑧ β | ⑨ $\beta - 1$ | ⑩ $\beta - 2$ |
| ⑪ $1 - \beta$ | ⑫ $2 - \beta$ | ⑬ 収束しない | ⑭ r | ⑮ r^2 |
| ⑯ θ | ⑰ a | ⑱ a^2 | | |
-

3. $g(x, y) = 0$ の拘束条件のもとで関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をもつとする. λ を変数として $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ とおくと $F_x(a, b, \alpha) = F_y(a, b, \alpha) = F_\lambda(a, b, \alpha) = 0$ を満たす α が存在する. F_x, F_y, F_λ はそれぞれ x, y, λ に関する偏導関数である. 以下の各問に答えよ.

- (1) 原点から双曲線 $x^2 + 3xy + y^2 - 5 = 0$ までの最短距離を求める. 拘束条件 $g(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 5 = 0$ のもとで点 (x, y) と原点との距離 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の最小値を求める.

ここでは $h(x, y) = x^2 + y^2$ の最小値を求める.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 3xy + y^2 - 5) \text{ とおくと}$$

$$F_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda(2x + 3y) = 0$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda(2y + 3x) = 0$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 3xy + y^2 - 5 = 0$$

$F_x(x, y, \lambda) = 0, F_y(x, y, \lambda) = 0$ の 2 式より $y = \boxed{\text{C7}}$ を得る.

$y = x$ のとき $F_\lambda = g(x, y) = 0$ より $(x, y) = (\boxed{\text{C8}}, 1)$ または $(x, y) = (\boxed{\text{C9}}, -1)$ を得る. このとき $h(\boxed{\text{CX}}, 1) = h(\boxed{\text{D1}}, -1) = 2$.

$y = -x$ のとき $F_\lambda = g(x, y) = 0$ を満たさないので最短距離をとらない. よって, $f(x, y)$ の最小値として $f(\boxed{\text{D2}}, 1) = f(\boxed{\text{D3}}, -1) = \boxed{\text{D4}}$ が求まる.

解答用紙裏面の記述解答欄 3 に $|x| < 3, |y| < 3$ の範囲で曲線 $g(x, y) = 0$ のグラフの概略と最小値をとる点 (x, y) も記しなさい. 曲線が x 軸および y 軸と交わる点も明記すること.

- (2) 点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 2$ の周上を動く時の xy の極値を求める. 拘束条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値を求めればよい.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2) \text{ とおくと}$$

$$F_x(x, y, \lambda) = (\boxed{\text{D5}}) + 2\lambda(\boxed{\text{D6}}) = 0$$

$$F_y(x, y, \lambda) = (\boxed{\text{D6}}) + 2\lambda(\boxed{\text{D5}}) = 0$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$F_x(x, y, \lambda) = 0, F_y(x, y, \lambda) = 0$ の 2 式より $\lambda = \pm 1/2$ を得る. よって極値をとる点の候補は $x = y = \pm 1$ または $x = -y = \pm 1$. $f(x, y)$ の極値を求めるために $g(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ を用いて $f(x, y)$ を x の関数として表す.

ここで $p(x) = f(x, \varphi(x)) = x\varphi(x)$ とおくと

$$p'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x), \quad p''(x) = 2\varphi'(x) + x\varphi''(x)$$

$$g(x, \varphi(x)) = x^2 + (\varphi(x))^2 - 2 = 0 \text{ より}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}, \quad \varphi''(x) = -\frac{\varphi(x) - x\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}$$

$x = y = \pm 1$, $x = -y = \pm 1$ の点を $P_1(x, y) \sim P_4(x, y)$ で表す.

点 $P_1(1, 1)$ において

$$\varphi'(1) = -1, \varphi''(1) = -2 \text{ より}$$

$$p(1) = 1, p'(1) = 0, p''(1) = \boxed{\text{D7}}$$

点 $P_2(1, -1)$ において

$$\varphi'(1) = 1, \varphi''(1) = 2 \text{ より}$$

$$p(1) = -1, p'(1) = 0, p''(1) = \boxed{\text{D8}}$$

点 $P_3(-1, 1)$ において

$$\varphi'(-1) = 1, \varphi''(-1) = -2 \text{ より}$$

$$p(-1) = -1, p'(-1) = 0, p''(-1) = \boxed{\text{D8}}$$

点 $P_4(-1, -1)$ において

$$\varphi'(-1) = -1, \varphi''(-1) = 2 \text{ より}$$

$$p(-1) = 1, p'(-1) = 0, p''(-1) = \boxed{\text{D7}}$$

よって $g(x, y) = 0$ の条件下で $f(x, y)$ は P_1, P_4 で極大値 $\boxed{\text{D9}}$, P_2, P_3 で極小値 $\boxed{\text{DX}}$ をとる.

$\boxed{\text{C7}}$ ~ $\boxed{\text{DX}}$ の選択肢

- | | | | | |
|--------|-----------|--------------|---------------|--------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| ⑥ 0 | ⑦ -1 | ⑧ -2 | ⑨ -3 | ⑩ -4 |
| ⑪ -5 | ⑫ x | ⑬ $-x$ | ⑭ $\pm x$ | ⑮ y |
| ⑯ $-y$ | ⑰ $\pm y$ | ⑱ $\sqrt{2}$ | ⑲ $-\sqrt{2}$ | ⑳ $\sqrt{3}$ |
-

大問4 (物理学 ①)

本問では、ベクトルを \mathbf{A} などのように太字で表し、2つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} の内積 (スカラー積) を $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 外積 (ベクトル積) を $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ と表す. また、物理量の時間微分をドットで表す. たとえば dq/dt を \dot{q} , d^2q/dt^2 を \ddot{q} などのように表す.

図1のように、水平なテーブルに開けた小さな穴に、長さ l のひもを通し、その両端に質量 m の質点 A と、同じ質量の質点 B を取り付ける. 質点 A はテーブルの表面上を動き、質点 B は穴を通る鉛直線に沿って上下に動くことができる. テーブル面と質点の接触およびひもと穴の縁の接触は滑らかであり、この力学系のエネルギーは保存するものとする.

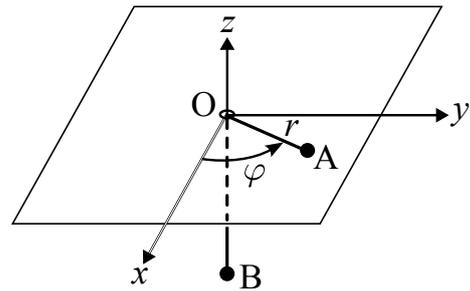


図1

重力加速度の大きさを g , ひもから質点に作用する張力の大きさを T として、以下の問いに答えよ.

1. 座標の設定

図1のように、穴の位置を原点 O として、鉛直上向きに z 軸をとり、テーブルの表面上に x 軸と y 軸をとる. また、 O から A までの距離を r , x 軸と線分 OA のなす角を φ とする. 質点 A の座標 x_A, y_A, z_A および、質点 B の座標 x_B, y_B, z_B は、 r と φ を用いて次のように表される.

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi, \quad z_A = 0, \quad x_B = 0, \quad y_B = 0, \quad z_B = r - l$$

したがって、質点 A の速度の成分は次のように表される.

$$\dot{x}_A = \boxed{\text{A1}}, \quad \dot{y}_A = \boxed{\text{A2}}, \quad \dot{z}_A = 0$$

$\boxed{\text{A1}} \sim \boxed{\text{A2}}$ の解答群

-
- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|--|--|
| ① $\dot{r} \cos \varphi$ | ② $\dot{r} \sin \varphi$ | ③ $\dot{r} \cos \varphi + r\dot{\varphi} \sin \varphi$ | ④ $\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi$ |
| ⑤ $-\dot{r} \cos \varphi$ | ⑥ $-\dot{r} \sin \varphi$ | ⑦ $\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi$ | ⑧ $\dot{r} \sin \varphi - r\dot{\varphi} \cos \varphi$ |
| ⑨ $r\dot{\varphi} \cos \varphi$ | ⑩ $r\dot{\varphi} \sin \varphi$ | ⑪ $-r\dot{\varphi} \cos \varphi$ | ⑫ $-r\dot{\varphi} \sin \varphi$ |
-

2. 質点 A の等速円運動

質点 A が半径 a で速さが v_a の等速円運動する場合を考える。このとき、 a と v_a を用いて向心加速度の大きさを表すと、**A3** である。また、ひもから質点 A に作用する張力の大きさは $T =$ **A4** である。したがって、運動方程式より次の関係が得られる。

$$v_a = \text{A5} \quad (4-1)$$

A3～**A5** の解答群

-
- | | | | | |
|---------------------|------------|---------------|-------------------|---------------------|
| ① av_a | ② av_a^2 | ③ a^2v_a | ④ $\frac{v_a}{a}$ | ⑤ $\frac{v_a^2}{a}$ |
| ⑥ $\frac{v_a}{a^2}$ | ⑦ g | ⑧ $2g$ | ⑨ mg | ⑩ $2mg$ |
| ⑪ ga | ⑫ $2ga$ | ⑬ \sqrt{ga} | ⑭ $\sqrt{2ga}$ | ⑮ 0 |
-

3. 角運動量保存則

以下では、OA 間の距離 r が変化するような運動を調べる。そのとき、保存則が役に立つ。この系のエネルギーが保存することはすでに述べた。さらに、質点 A の角運動量が保存することが以下のようにしてわかる。質点 A の位置ベクトルを \mathbf{r} とし、この質点に作用する力を \mathbf{F} とすると、原点 O に関する \mathbf{F} のトルクは **A6** で定義される。いま、 \mathbf{r} と同じ向きの単位ベクトルを \mathbf{e}_r とすると、 $\mathbf{F} =$ **A7** であるから、**A6** を計算すると 0 となる。よって、原点 O に関する質点 A の角運動量 \mathbf{L} は保存する。ここで、 \mathbf{L} の直交座標成分 L_x, L_y, L_z を、 r と φ を用いて表すと次のようになる。

$$L_x = \text{A8}, \quad L_y = 0, \quad L_z = \text{A9} \quad (4-2)$$

A6～**A9** の解答群

-
- | | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| ① mge_r | ② $-mge_r$ | ③ Te_r | ④ $-Te_r$ |
| ⑤ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ | ⑥ $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ | ⑦ $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ | ⑧ $m\dot{r}$ |
| ⑨ $mr\dot{\varphi}$ | ⑩ $mr\dot{\varphi}^2$ | ⑪ $mr^2\dot{\varphi}$ | ⑫ $m\dot{r} \sin \varphi$ |
| ⑬ $m\dot{r} \cos \varphi$ | ⑭ $mr\dot{\varphi} \sin \varphi$ | ⑮ $mr\dot{\varphi} \cos \varphi$ | ⑯ $mr\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$ |
| ⑰ $mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$ | ⑱ $mr^2\dot{\varphi} \sin \varphi$ | ⑲ $mr^2\dot{\varphi} \cos \varphi$ | ⑳ 0 |
-

4. 保存則の応用

ここから先は、次のような初期条件の運動に限定して考える。質点 B をつかんで、動かないように固定し、質点 A に適当な力を加えて、半径 a 、速さ v_0 の等速円運動をさせる。このとき、 v_0 は式 (4-1) の v_a よりも小さいものとする。また、運動の向きは、 $\dot{\varphi} > 0$ となるようにする。その後、A が x 軸の正の側を横切る瞬間（時刻 $t = 0$ とする）に、B から静かに手を放す。このあと、質点 A は図 2 に示すような軌跡を描きながら運動する。角度 φ は単調に増加するが、原点から A

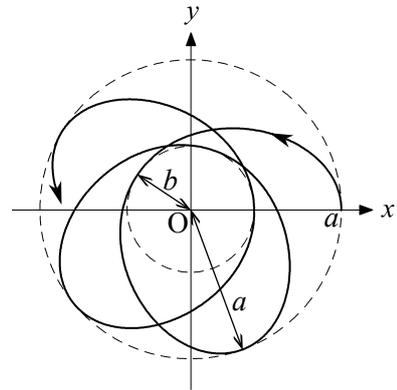


図 2

までの距離 r は始めのうちは減少し、最小値 b に達した後は、 $b \leq r \leq a$ の範囲で周期的に増減を繰り返す。したがって、質点 B は鉛直線上で振動する。

この運動における r の最小値 b と、 $r = b$ における質点 A の速さ v_1 を保存則を使って求めよう。重力によるポテンシャルエネルギーの基準点を原点 O に選ぶと、 $t = 0$ におけるこの系のエネルギーの値は **AX** である。また、この時刻での質点 A の角運動量の大きさは **B1** である。同様に、 $r = b$ のときのエネルギーの値と角運動量の大きさは b や v_1 を用いて表すことができる。

そうすると、エネルギー保存則からは、

$$v_1^2 - v_0^2 = \mathbf{B2} \quad (4-3)$$

という関係が得られ、角運動量保存則からは、次の関係が得られる。

$$\frac{b}{a} = \mathbf{B3} \quad (4-4)$$

AX ~ **B3** の解答群

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| ① $\frac{1}{2}mv_0^2$ | ② $\frac{1}{2}mv_0^2 + mga$ | ③ $\frac{1}{2}mv_0^2 - mga$ |
| ④ $\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(a - l)$ | ⑤ $\frac{1}{2}mv_0^2 - mg(a - l)$ | ⑥ mv_0 |
| ⑦ mav_0 | ⑧ mav_0^2 | ⑨ ma^2v_0 |
| ⑩ $g(a - b)$ | ⑪ $g(b - a)$ | ⑫ $2g(a - b)$ |
| ⑬ $2g(b - a)$ | ⑭ $\frac{v_0}{v_1}$ | ⑮ $\frac{v_1}{v_0}$ |
| ⑯ $\sqrt{\frac{v_0}{v_1}}$ | ⑰ $\sqrt{\frac{v_1}{v_0}}$ | ⑱ 0 |

式 (4-3) と式 (4-4) から b を消去すると, v_1 に対する方程式が得られる. それを解くと次のようになる.

$$v_1 = \frac{v_0}{2} \left(\boxed{\text{B4}} \right)$$

そして, この結果を式 (4-4) に代入すると, b がわかる.

B4 の解答群

① $\sqrt{1 + \frac{8ga}{v_0^2}} + 1$ ② $\sqrt{1 + \frac{8ga}{v_0^2}} - 1$ ③ $\sqrt{1 + \frac{8v_0^2}{ga}} + 1$ ④ $\sqrt{1 + \frac{8v_0^2}{ga}} - 1$

5. 運動方程式

図 2 に示したような運動を、運動方程式を使って調べよう。質点 A の運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ において、加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ の動径成分（位置ベクトル \mathbf{r} 方向の成分）は **B5** と表されるので、この質点に対する運動方程式の動径成分は、

$$m(\text{B5}) = \text{B6}$$

で与えられる。また、質点 B の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \text{B7}$$

で与えられる。これら 2 つの運動方程式から T を消去すると、次の方程式が得られる。

$$\text{B8} = 0 \tag{4-5}$$

ここで、 $t = 0$ における角運動量の大きさが **B1** であることと、式 (4-2) を利用すると、角運動量保存則により、 $\dot{\varphi}$ と r の関係

$$\dot{\varphi} = \text{B9} \tag{4-6}$$

が得られる。この式を式 (4-5) に代入すると、 r に対する次の微分方程式が得られる。

$$2\ddot{r} - \frac{a^2 v_0^2}{r^3} + g = 0 \tag{4-7}$$

B5～**B9** の解答群

-
- | | | | |
|--------------------------------------|---|------------------------------------|--|
| ① $\ddot{r} - r\dot{\varphi}$ | ② $\ddot{r} - r^2\dot{\varphi}$ | ③ $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ | ④ $\ddot{r} - \frac{\dot{\varphi}^2}{r}$ |
| ⑤ T | ⑥ $-T$ | ⑦ mg | ⑧ $-mg$ |
| ⑨ $T - mg$ | ⑩ $mg - T$ | ⑪ $2\ddot{r} - r\dot{\varphi} + g$ | ⑫ $2\ddot{r} - r^2\dot{\varphi} + g$ |
| ⑬ $2\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + g$ | ⑭ $2\ddot{r} - \frac{\dot{\varphi}^2}{r} + g$ | ⑮ $\frac{a^2 v_0^2}{r^4}$ | ⑯ $\frac{a^2 v_0^2}{r^5}$ |
| ⑰ $\frac{av_0}{r^2}$ | ⑱ $\frac{av_0}{r}$ | | |
-

6. 微小振動

r に対する微分方程式 (4-7) を解くのは難しい. ここでは, v_0 が v_a よりわずかに小さい場合について, この方程式を近似的に解くことにしよう. そのために, 小さなパラメータ ε を導入して, v_0 を次のように表す.

$$v_0 = (1 - \varepsilon)v_a \quad (4-8)$$

そして, ε の 2 次以上の微小量を見捨てる, という近似をおこなう. このとき, b の値は $(1 - 4\varepsilon/3)a$ と近似できる. また, r の値は $b \leq r \leq a$ の範囲で振動するので, a と r の差は ε の 1 次の微小量であることがわかる. そこで, 変数 r の代わりに, 次の式を満たす変数 u を導入する.

$$r = a - \varepsilon u$$

この式と式 (4-8) を方程式 (4-7) に代入して, v_a に式 (4-1) を代入する. そして, ε の 2 次以上の微小量を見捨てる, 次のようになる.

$$\ddot{u} = \boxed{\text{BX}} + g \quad (4-9)$$

この式は単振動の運動方程式に帰着させることができ, その振動の角振動数は

$$\Omega = \boxed{\text{C1}}$$

であることがわかる.

次に, r の値が a から b まで減少して, 再び a に戻るまでに, 角度 φ がどれだけ増加するかを調べる (図 3 参照). 式 (4-6) において, $v_0 \approx v_a$, $r \approx a$ と近似すると, $\dot{\varphi} \approx \boxed{\text{C2}}$ となるので, 振動の一周期の間に, φ は

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\Omega} \boxed{\text{C2}} \approx 294^\circ$$

だけ増加する.

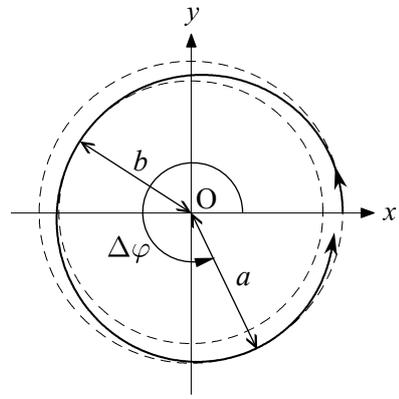


図 3

$\boxed{\text{BX}} \sim \boxed{\text{C2}}$ の解答群

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ① $-\frac{g}{a}u$ | ② $-\frac{g}{2a}u$ | ③ $-\frac{3g}{2a}u$ | ④ $-\frac{2g}{3a}u$ |
| ⑤ a | ⑥ $2a$ | ⑦ $\frac{3}{2}a$ | ⑧ $\frac{2}{3}a$ |
| ⑨ $\sqrt{\frac{g}{a}}$ | ⑩ $\sqrt{\frac{g}{2a}}$ | ⑪ $\sqrt{\frac{3g}{2a}}$ | ⑫ $\sqrt{\frac{2g}{3a}}$ |

大問 5 (物理学②)

大気における雲の形成や雨滴の落下速度に、大気の密度、圧力、水蒸気濃度等が及ぼす影響を調べる。

1. 大気圧の高さ依存性

ここでは大気の気体部分を理想気体として考える。大気のア平均モル質量は構成する気体成分の比率によるが、ここでは M [kg/mol] と記す。大気のアモル体積を V [m³/mol] とすると、大気のア密度 ρ [kg/m³] は $\rho = M/V$ である。理想気体 1 モルのア状態方程式より、密度 ρ は大気圧力 p に比例する次式で表される。 R は気体定数で 8.31 J/(mol·K)、 T は絶対温度[K]である。

$$\rho = (\text{A1})p \quad (5-1)$$

海面から鉛直上向きに z 軸を置いて、海面で $z=0$ とする。海面における気温を T_0 、気圧を p_0 [atm] (1 atm = 1.013×10⁵ Pa) とする。また、重力加速度 g は対流圏内で一定 (9.8 m/s²) としてよい。

高さ約 11000 m までの対流圏内の気温 T [K] は、これまでの測定により次の式で表せる。

$$T(z) = T_0 - \alpha z \quad (\alpha = 0.0065 \text{ K/m}) \quad (5-2)$$

つまり、100 m 高くなるたびに気温が 0.65 度低くなる。

図 5.1 で高さ $[z, z+dz]$ の微小域にある単位断面ア積の円柱状大気を考える。大気のア圧力 p と密度 ρ は z に依存する。微小域 $[z, z+dz]$ の上下面のア圧力差 $dp = p(z+dz) - p(z)$ は次式となる。

$$dp = -\text{A2} dz \quad (5-3)$$

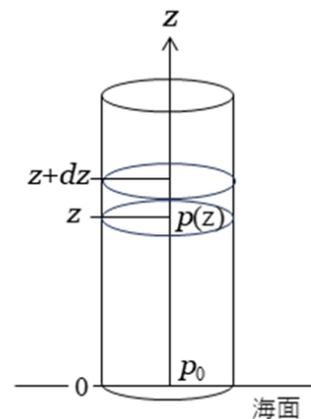


図 5.1

ここで大気のア平均モル質量 M は、大気のア気体成分のアモル分率が高さによらないとして、一定と考える。式(5-3)に、高さ z の大気密度 $\rho(z)$ が大気のア圧力に比例する式(5-1)を代入すると、

$$dp/p = -\text{A3} dz \quad (5-4)$$

が成り立つ。ここに式(5-2)の T の z 依存性を入れてこの式を積分すれば次式となる。

$$\ln p(z) = \boxed{\text{A4}} \cdot \ln(T_0 - \alpha z) + C_1 \quad (C_1: \text{積分定数}) \quad (5-5)$$

$p_0 = p(0)$ なので, $C_1 = \ln(\boxed{\text{A5}})$ である. よって高さ z の気圧 $p(z)$ は,

$$p(z) = p_0 \cdot \boxed{\text{A6}} \quad (5-6)$$

となる. 式(5-2)を用いて式(5-6)の z を消去すると, 海面との高度差による温度比 T/T_0 と圧力比 p/p_0 の関係

$$p/p_0 = (\boxed{\text{A7}})^{Mg/\alpha R} \quad (5-7)$$

が得られる. T_0 が 293 K では, 気圧低下が高さ 100 m で 1.2 %, 1000 m で 11.1 %となる.

- $\boxed{\text{A1}} \sim \boxed{\text{A7}}$ の選択肢 -----
- ① RT ② MRT ③ M/RT ④ ρ/g ⑤ ρgz ⑥ ρg ⑦ RT/Mg ⑧ Mg/RT ⑨ Mg/R
 ⑩ $Mg/\alpha R$ ⑪ $\alpha R/Mg$ ⑫ $p_0 T_0^{-Mg/R}$ ⑬ $p_0 T_0^{-Mg/\alpha R}$ ⑭ $p_0 T_0^{Mg/\alpha R}$ ⑮ $(1 - \alpha z)^{-Mg/\alpha R}$
 ⑯ $(1 - \alpha z)^{Mg/\alpha R}$ ⑰ $(1 - \alpha z/T_0)^{Mg/\alpha R}$ ⑱ $1 - T/T_0$ ⑲ T/T_0 ⑳ $1 + T/T_0$

2. 雲の高さ

温度 T 、気圧 p の大気において、水蒸気と水滴の間の相転移は、水蒸気分圧 p_w とその温度における飽和水蒸気分圧 p_{ws} との大小関係により決まる。図 5.2 は、 p_w と p_{ws} の温度依存性を示している。ここでは水蒸気モル分率 c_w が空中では一定とすると、水蒸気分圧 p_w は **A8** と表される。飽和水蒸気分圧 p_{ws} の実測値は摂氏気温 θ [$^{\circ}\text{C}$] ($= T - 273.15$) に依存し、図 5.2 の実線となる。また、 c_w が 0.01, 0.02, 0.03 の場合の p_w を破線で示す。

p_w と p_{ws} の大小関係が **A9** となると水蒸気が水滴になり雲となる。例えば 20°C の大気では、飽和水蒸気分圧 $p_{ws} = 0.023 \text{ atm}$ である。また、 $c_w = 0.02$ の場合、 $p_w = p_{ws}$ となる気温は 16.8°C である。その気温になる高さ z は、式(5-2)より、 $z = \text{AX}$ m となる。

一方、雲にある小さな水滴は重力でゆっくり落下して、**B1** となる領域に入れば水蒸気に戻り透明となる。そこが雲の下側になる。さらに高い水蒸気濃度で生じた水滴が落下する間に他の水滴と衝突合体すれば大きな水滴となる。大きな水滴は落下速度が大きいので、**B1** となる雲の下側領域でも落下し雨になる。

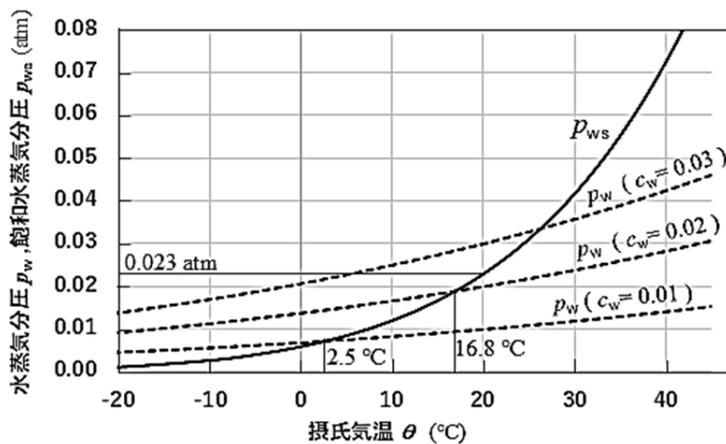


図 5.2

3. 水滴の落下速度

次に、空気中での水滴の落下速度 \boldsymbol{v} を求めよう。水滴が外気（空気）から受ける抵抗力を考え、空気の動きを流体力学で調べる。空気の粘度を η 、空気の密度を $\rho (= 1.206 \text{ kg/m}^3)$ 、水滴の密度を $\rho_w (= 1000 \text{ kg/m}^3)$ とする。水滴を球と考え、その半径を r とする。

(1) ナヴィエ・ストークス方程式とレイノルズ数 Re

ほとんど動いていない空気中を球状水滴が速さ \boldsymbol{v} で落下するとき、空気の運動が発生するため水滴運動に抵抗力が作用する。空気の速度ベクトル \boldsymbol{v}_f と空気の単位体積に作用する外力 \boldsymbol{F} と空気圧 p の関係は、次のナヴィエ・ストークス方程式で表される。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_f \cdot \nabla) \boldsymbol{v}_f = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{v}_f$$

対流加速度項 $(\boldsymbol{v}_f \cdot \nabla) \boldsymbol{v}_f$ と粘性項 $(\eta/\rho) \nabla^2 \boldsymbol{v}_f$ のそれぞれの代表的な大きさ（代表値）の比をレイノルズ数 Re とよぶ。代表値の求め方は次の通りである。空気の速度 \boldsymbol{v}_f の代表値としては水滴と空気の相対速度 \boldsymbol{v} を用いる。球体の場合、空間微分演算子 ∇ を球直径 $l (= 2r)$ の逆数 $1/l$ で置き換え、2次空間微分 ∇^2 を $1/l^2$ で置き換えて代表値とする。それぞれ \boldsymbol{v}^2/l と $\eta \boldsymbol{v} / \rho l^2$ であるから、 Re の式は次式である。

$$Re = \frac{\text{対流加速度項の代表値}}{\text{粘性項の代表値}} = \boxed{\text{B2}} \quad (5-8)$$

----- A8 ~ B2 の選択肢 -----

① c_w ② c_w/p ③ $c_w p$ ④ $p_w < p_{ws}$ ⑤ $p_w > p_{ws}$ ⑥ 310 ⑦ 440 ⑧ 490

⑨ $\rho v l \eta$ ⑩ $\rho v l / \eta$ ⑪ $v l / \rho \eta$

(2) 水滴が小さい場合

水滴半径 r が小さくレイノルズ数 Re が 1 よりずっと小さい ($Re \ll 1$) 場合は、水滴の落下速度 v 、半径 r 、空気粘度 η に比例するストークスの粘性抵抗力が水滴に作用する重力と釣り合う。

$$(4\pi/3)r^3\rho_w g = 6\pi(\text{B3})v \quad (5-9)$$

これより速度 v の式は、

$$v = (\text{B4})r^2 \quad (5-10)$$

となり、速度 v は半径 r の 2 乗に比例する。よって Re は、式(5-8)より半径 r の B5 乗に比例する。式(5-10)は $Re < 1$ でも参考として使えるが、 $Re \ll 1$ でなければ精度が不十分である。

例として、直径 $50 \mu\text{m}$ あるいは $25 \mu\text{m}$ の水滴の落下速度 v がストークスの粘性抵抗力の条件 $Re \ll 1$ を満たすかどうかを調べる。空気の粘度 η は 1 atm , 20°C 付近で、 $18.0 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ である。直径 $50 \mu\text{m}$ の水滴では、 $v = 0.0756 \text{ m/s}$, $Re = 0.253$ となり、条件 $Re \ll 1$ を満たさないことがわかる。一方、直径 $25 \mu\text{m}$ の水滴では、 $v = \text{B6} \text{ m/s}$, $Re = \text{B7}$ となる。つまり、直径 $25 \mu\text{m}$ 以下の水滴であれば、ストークスの粘性抵抗力の適用条件である $Re \ll 1$ を満たし、この v と Re の値を受け入れられる。このサイズでは、ゆっくりと落下するから、気温の高い大気に入れば水蒸気に戻り透明になる。

----- B3 ~ B7 の選択肢 -----

- ① $\rho v l \eta$ ② $\rho v l / \eta$ ③ $v l / \rho \eta$ ④ ρr ⑤ $\rho \eta r$ ⑥ ηr ⑦ $\rho_w g / 9 \eta$
⑧ $2\rho_w g / 5 \eta$ ⑨ $2\rho_w g / 9 \eta$ ⑩ 0 ⑪ 1 ⑫ 2 ⑬ 3 ⑭ 0.015 ⑮ 0.15
⑯ 0.019 ⑰ 0.19 ⑱ 0.022 ⑲ 0.032 ⑳ 0.32

(3) 水滴が大きい場合

次に、水滴直径が 0.5 mm の雨の場合を考える。気象ではこのサイズ以下を霧雨とよぶ。この直径の水滴では Re が 1 よりずっと大きくなり、抵抗力の式が変わると予想される。その場合、密度 ρ の空気中で水滴が空気から受ける抵抗力は v^2 に比例するとして、抵抗力が重力と釣り合う次式を仮定する。

$$(4\pi/3)r^3\rho_w g = \pi r^2 C_D \rho v^2/2 \quad (5-11)$$

C_D は空気中を運動する物体の形状抵抗係数であり、 πr^2 は運動する球状水滴が空気に衝突する断面積である。 $Y = \log_{10} C_D$ および $X = \log_{10} Re$ を用いると、実測結果が図 5.3 の実線で表される。

$10^3 < Re < 10^5$ の範囲では、定数近似して $C_D = 0.44$ となる。式(5-11)に $C_D = 0.44$ を代入すれば、水滴速度は次式となる。

$$v = \left[\frac{8}{0.44 \times 3} \right]^{1/2} \cdot \text{B8} \quad (5-12)$$

水滴速度 v は半径 r の **B9** 乗に比例し、 Re は半径 r の **BX** 乗に比例する。

式(5-12)を用いると、直径 0.5 mm の霧雨粒の場合、 $v = 3.5$ m/s、 $Re = 117$ となるので、適用条件 $10^3 < Re < 10^5$ を満たさない。よって、この結果を使えない。

$1 < Re < 10^3$ の範囲では次のように近似できる（図 5.3 の破線）。

$$Y = 0.11 X^2 - 0.938 X + 1.465 \quad (Y = \log_{10} C_D, X = \log_{10} Re) \quad (5-13)$$

式(5-11)と式(5-13)から、速度 v に依存する Y を用いて次式となる。

$$(4/3)r\rho_w g = \text{C1} \cdot \rho v^2/2 \quad (5-14)$$

これより直径 0.5 mm の霧雨粒の速度を計算すると、 $v = 2.04$ m/s、 $Re = \text{C2}$ となるので、適用条件 $1 < Re < 10^3$ を満たす。

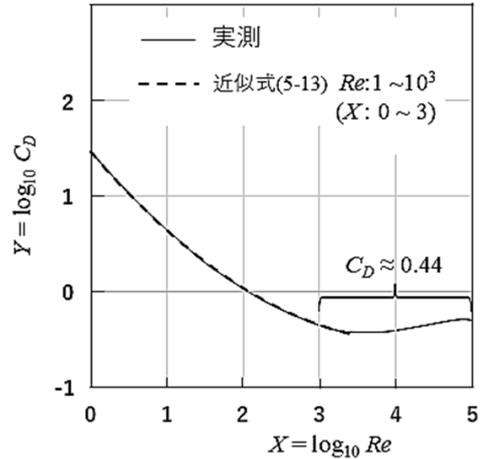


図 5.3

----- **B8** ~ **C2** の選択肢 -----

- ① ρv^2 ② $\rho v^2/2$ ③ $2\rho v^2$ ④ $r^2\rho_w g/\rho$ ⑤ $r\rho_w g/\rho$ ⑥ $\rho_w g/\rho$ ⑦ $1/2$ ⑧ 1
 ⑨ $3/2$ ⑩ 2 ⑪ $5/2$ ⑫ 3 ⑬ Y ⑭ $\log_{10} Y$ ⑮ 10^Y ⑯ 120 ⑰ 68 ⑱ 46

大問 6 (化学①)

必要があれば、以下の物理定数値を使うこと。

Planck 定数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	電子の質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
電子の電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$	真空中での光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

1. 以下の文章を読み設問(1)～(5)に答えよ。

ある波長 (λ) の電磁 (Electromagnetic : EM) 放射線を金属表面に向けると、表面から電子が放出される。 **A1** と呼ばれるこの現象は、1887年に Heinrich Hertz (ドイツの物理学者) によって発見され、その後 (1905年)、Albert Einstein によって以下のように定式化された。

$$E_p = h\nu - W$$

すなわち、光電子の運動エネルギー (E_p) は、EM放射のエネルギー ($h\nu$) と **A2** (W) との差に等しい。ここで、 ν はEM放射の周波数である。さまざまな金属の W 値は、研究者によって実験的に決定されている。

$W = 2.75 \text{ eV}$ のナトリウム (Na) の表面を考えてみよう。EM放射の最大波長 (λ_{\max}) は、 $E_p = 0$ として計算できる。したがって、Na の場合、 $\lambda_{\max} = \text{A3}$ m となり、**A4** 領域に相当する。 $\lambda = \lambda_{\max}$ の電磁波が 1 個の Na 原子に照射された場合、Planck の式 ($E = h\nu$) から得られる放射線のエネルギーは第一イオン化ポテンシャル ($I_1 = 5.14 \text{ eV}$) より低いため、外殻の $3s^1$ 電子は **A5** 。

また、Na 表面から取り出された光電子が電場 $\Delta\phi$ により加速されるとすると、運動量は $p = m_e v = (2m_e e \Delta\phi)^{1/2}$ で与えられる。ここで、 m_e は電子の質量、 v は速度、 e は電子の電荷である。この時の光電子の de Broglie 波長 (λ_{dB}) は、 $\lambda_{\text{dB}} = \text{A6}$ と
いう式から求めることができる。

(1) 空欄 **A1** , **A2** に適切なものを以下の①～⑥のうちから1つ選べ.

- ① 圧電効果 ② 光電効果 ③ 焦電効果
④ 表面エネルギー ⑤ 仕事方程式 ⑥ 仕事関数

(2) 空欄 **A3** に適切なものを以下の①～⑥のうちから1つ選べ.

- ① 9.0×10^{-14} ② 2.0×10^{-11} ③ 4.5×10^{-7}
④ 6.0×10^{-2} ⑤ 8.0×10^5 ⑥ 5.0×10^7

(3) 空欄 **A4** に適切なものを以下の①～⑥のうちから1つ選べ.

- ① マイクロ波 ② 赤外線 ③ 紫外線
④ ガンマ線 ⑤ X線 ⑥ 可視光

(4) 空欄 **A5** に適切なものを以下の①～⑥のうちから1つ選べ.

- ① 放出される ② 放出されない ③ 加速する
④ 減速する ⑤ 4s レベルへ励起される ⑥ 核と衝突する

(5) 空欄 **A6** に適切なものを以下の①～⑧のうちから1つ選べ.

- ① hp ② $\frac{p}{h}$ ③ $\frac{2h}{3p}$ ④ $\frac{h}{p}$
⑤ $\frac{h^2}{p^3}$ ⑥ $\left(\frac{h}{p}\right)^{1/2}$ ⑦ $\frac{m_e h}{p}$ ⑧ $\frac{h}{ep}$

2. 等核二原子分子に関する以下の文章を読み設問(1)~(6)に答えよ。

図1に、酸素分子 (O_2) のエネルギー準位を示す。これは2個の共有結合した酸素原子でできており、それぞれの酸素原子は **A7** 個の電子を有する。 O_2 に2個の電子が加わると、superoxide anion (O_2^{2-}) となり、このとき、電子配置は **A8** となる。 O_2^{2-} の O-O 結合の長さは 149 pm に相当し、これは O_2 における O-O 結合の長さ **A9** なる。なぜなら、追加された2個の電子は **AX** 軌道に位置するからである。

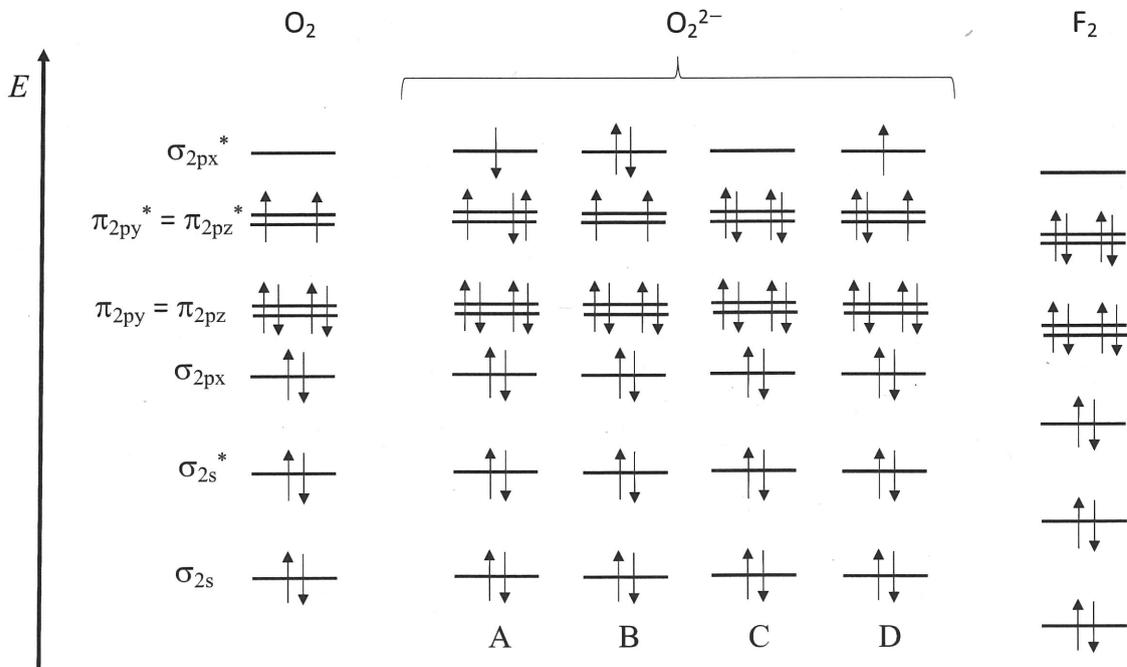


図1 等核二原子分子のエネルギー準位

フッ素分子 (F_2) は O_2^{2-} と同じ数の電子を持つ。 F_2 のエネルギー準位は O_2^{2-} より低い。これは、電子とフッ素原子核の間の静電エネルギーが、電子と酸素原子核の間の静電エネルギーと比べて **B1** ためである。 F_2 は等核二原子分子であり、その双極子モーメントは **B2** である。

(1) 空欄 **A7** に適切なものを以下の①～⑥のうちから1つ選べ.

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12 ⑥ 16

(2) 空欄 **A8** に適切な図1中の記号を以下の①～④のうちから1つ選べ.

- ① A ② B ③ C ④ D

(3) 空欄 **A9** に適切なものを以下の①～③のうちから1つ選べ.

- ① より短く ② と等しく ③ より長く

(4) 空欄 **AX** に適切なものを以下の①～⑤のうちから1つ選べ.

- ① $\pi_{2py} = \pi_{2pz}$ ② $\pi_{2py}^* = \pi_{2pz}^*$ ③ $\pi_{2py}^* = \sigma_{2px}^*$
④ $\pi_{2pz}^* = \sigma_{2px}^*$ ⑤ σ_{2px}^*

(5) 空欄 **B1** に適切なものを以下の①～③のうちから1つ選べ.

- ① 小さい ② 等しい ③ 大きい

(6) 空欄 **B2** に適切なものを以下の①～③のうちから1つ選べ.

- ① ゼロ ② 正の値 ③ 負の値

3. 以下の文章を読み設問(1)~(7)に答えよ。

VSEPR (Valence Shell Electron Pair Repulsion : 価電子対反発) は化学結合のシンプルなモデルであり, 研究者が無機分子の 3 次元構造を予測するのに役立つ. 原子の価電子は, 結合対と孤立対に分類される. 球面上に配置された場合, それらの間の距離を最大にしなが, 静電反発が **B3** なるように配置される.

図 2 に SF_4 分子および SF_6 分子の硫黄原子の混成軌道を示す. 図 2 に示すように, SF_4 分子の場合には, **B4** 個の結合対と **B5** 個の孤立対がある. VSEPR モデルの観点から SF_4 の分子構造を記述するためには, 硫黄の 3s 軌道 (充填), 3p 軌道 (部分充填), および 1 つの 3d 軌道 (空) を組み合わせることによって得られる sp^3d 型の 5 個の混成軌道を考慮する必要がある. 各混成軌道は 1 個または 2 個の電子で満たされ, 図 2 中の **B6** の配置となる.

硫黄に 6 個のフッ素原子が結合した SF_6 の場合, **B7** 個の結合対と **B8** 個の孤立対が存在し, SF_6 分子の形状は **B9** となる. ここで, 分子が取り得る構造を説明するためには, 硫黄の 3s 軌道 (充填), 3 つの 3p 軌道 (部分充填), 2 つの 3d 軌道 (空) を組み合わせて得られる sp^3d^2 型の **BX** 個の混成軌道を考える必要がある. これらの sp^3d^2 混成軌道は, 図 2 中の **C1** の配置となる.

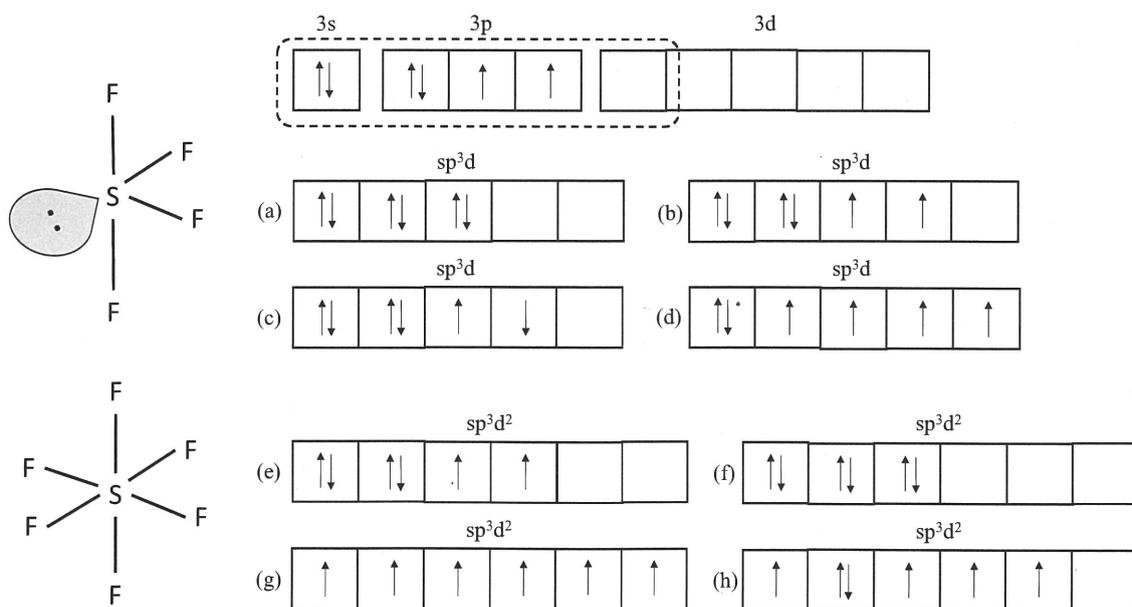


図 2 SF_4 分子と SF_6 分子の硫黄原子の混成軌道

(1) 空欄 **B3** に適切なものを以下の①～③のうちから1つ選べ.

- ① 最小に ② 等しく ③ 最大に

(2) 空欄 **B4** , **B5** に適切なものを以下の①～⑦のうちから1つ選べ.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 0

(3) 空欄 **B6** に適切な図2中の記号を以下の①～④のうちから1つ選べ.

- ① (a) ② (b) ③ (c) ④ (d)

(4) 空欄 **B7** , **B8** に適切なものを以下の①～⑦のうちから1つ選べ.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 0

(5) 空欄 **B9** に適切なものを以下の①～⑧のうちから1つ選べ.

- ① 四面体 ② 立方体 ③ 正八面体 ④ 四角錐
⑤ 直線状 ⑥ 折れ曲がり ⑦ 正20面体 ⑧ 球状

(6) 空欄 **BX** に適切なものを以下の①～④のうちから1つ選べ.

- ① 3 ② 5 ③ 6 ④ 9

(7) 空欄 **C1** に適切な図2中の記号を以下の①～④のうちから1つ選べ.

- ① (e) ② (f) ③ (g) ④ (h)

大問 7 (化学②)

以下の問に答えよ。ただし、特に指定しない場合は、絶対温度、体積、圧力をそれぞれ T , V , P で表す。同様に、エンタルピー、エントロピー、内部エネルギー、ギブズエネルギーをそれぞれ H , S , U , G で表す。また、モル定圧熱容量を C_p で表し、気体定数は R とする。なお、必要であれば $\ln 2 = 0.693$, $\ln 3 = 1.10$, $\ln 10 = 2.30$ を用いること。

1. 1 mol の単原子分子理想気体を温度 300 K から、ある一定の圧力 P において温度 900 K まで加熱する変化を考える。空欄 A1 ~ A9 にあてはまる最も適切な数式または数値を、選択肢からそれぞれ 1 つずつ選べ。

上記の温度 300 K から 900 K まで気体を加熱する変化に伴う体積変化、エンタルピー変化、内部エネルギー変化、エントロピー変化をそれぞれ ΔV , ΔH , ΔU , ΔS とし、その際に系と外界でやりとりされる仕事、熱をそれぞれ w , q とする。 w は仕事が外界から系になされた場合を正とし、 q は熱が外界から系に移動した場合を正とする。

一般に、温度 T [K]における理想気体 1 mol の体積 V は A1 と表される。 w は ΔV を用いて A2 と表されるので、 $w =$ A3 となる。単原子分子理想気体の C_p は A4 なので、上記の変化に伴う ΔH は A5 となる。上記の変化が定圧変化であることを考えれば、 q は A6 に等しい。したがって、 ΔU は A7 と表され、 $\Delta U =$ A8 となる。上記の変化に伴う ΔS は A9 である。

A1

- ① $\frac{RT}{P}$ ② $\frac{P}{RT}$ ③ $\frac{PT}{R}$ ④ $\frac{R}{PT}$

A2

- ① $\frac{\Delta V}{P}$ ② $P\Delta V$ ③ $\frac{P}{\Delta V}$ ④ $\frac{1}{P\Delta V}$
 ⑤ $-\frac{\Delta V}{P}$ ⑥ $-P\Delta V$ ⑦ $-\frac{P}{\Delta V}$ ⑧ $-\frac{1}{P\Delta V}$

A3

- ① $100R$ ② $300R$ ③ $600R$ ④ $900R$
⑤ $-100R$ ⑥ $-300R$ ⑦ $-600R$ ⑧ $-900R$

A4

- ① $\frac{1}{3}R$ ② $\frac{1}{2}R$ ③ R ④ $\frac{3}{2}R$
⑤ $2R$ ⑥ $\frac{5}{2}R$ ⑦ $3R$ ⑧ $\frac{7}{2}R$

A5

- ① $750R$ ② $900R$ ③ $1500R$ ④ $2250R$
⑤ $-750R$ ⑥ $-900R$ ⑦ $-1500R$ ⑧ $-2250R$

A6

- ① ΔH ② w ③ $\Delta H + w$ ④ ΔS
⑤ $-\Delta H$ ⑥ $-w$ ⑦ $-\Delta H - w$ ⑧ $-\Delta S$

A7

- ① $\Delta H - \frac{\Delta V}{P}$ ② $\Delta H - P\Delta V$ ③ $\Delta H - \frac{P}{\Delta V}$ ④ $\Delta H - \frac{1}{P\Delta V}$
⑤ $-\Delta H + \frac{\Delta V}{P}$ ⑥ $-\Delta H + P\Delta V$ ⑦ $-\Delta H + \frac{P}{\Delta V}$ ⑧ $-\Delta H + \frac{1}{P\Delta V}$

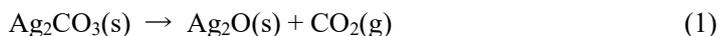
A8

- ① $300R$ ② $900R$ ③ $1500R$ ④ $2100R$
⑤ $-300R$ ⑥ $-900R$ ⑦ $-1500R$ ⑧ $-2100R$

A9

- ① $0.367R$ ② $0.550R$ ③ $1.10R$ ④ $1.65R$
⑤ $2.20R$ ⑥ $2.75R$ ⑦ $3.30R$ ⑧ $3.85R$

2. 温度 400 K における炭酸銀の熱分解反応 ((1)式)



を考える。ただし、炭酸銀および酸化銀は純物質とし、これを標準状態とする。標準圧力は 1 atm とする。計算にあたっては次表に示した 400 K における標準生成エンタルピー ΔH_{400}° および標準エントロピー S_{400}° のデータを用い、気体定数 R の値としては $8.31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ を使用すること。

表

	$\text{Ag}_2\text{CO}_3(\text{s})$	$\text{Ag}_2\text{O}(\text{s})$	$\text{CO}_2(\text{g})$
標準生成エンタルピー, ΔH_{400}° [$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$]	-492.3	-23.3	-390.0
標準エントロピー, S_{400}° [$\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$]	194.9	139.0	223.9

空欄 ~ にあてはまる最も適切な数式、語句または数値を、選択肢からそれぞれ 1 つずつ選べ。

温度 400 K における(1)式の反応に伴う標準エンタルピー変化は $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ 、標準エントロピー変化は $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ である。したがって、400 K における(1)式の反応に伴う標準ギブズエネルギー変化 ΔG_{400}° は $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ である。

一般に、温度 T [K] における(1)式の反応に伴うギブズエネルギー変化 ΔG_T は、炭酸銀および酸化銀が純物質であることを考慮すると、炭酸ガスの分圧 p_{CO_2} と温度 T [K] における標準ギブズエネルギー変化 ΔG_T° を用いて、 $\Delta G_T =$ と記述できる。

ここで $T = 400 \text{ K}$, $p_{\text{CO}_2} = 0.01 \text{ atm}$ において(1)式の熱分解反応が進行するかどうかを考えよう。この条件における(1)式の反応に伴うギブズエネルギー変化 ΔG_{400} の値は $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ となる。 ΔG_{400} の値は 。

AX

- ① 79.0 ② 413.3 ③ 492.3 ④ 905.6
 ⑤ -79.0 ⑥ -413.3 ⑦ -492.3 ⑧ -905.6

B1

- ① 23.2 ② 168.0 ③ 362.9 ④ 557.8
 ⑤ -23.2 ⑥ -168.0 ⑦ -362.9 ⑧ -557.8

B2

- ① 11.8 ② 67.1 ③ 123.0 ④ 146.2
 ⑤ -11.8 ⑥ -67.1 ⑦ -123.0 ⑧ -146.2

B3

- ① $\Delta G_T^\circ - RT\ln(p_{\text{CO}_2}^2)$ ② $\Delta G_T^\circ - RT\ln(p_{\text{CO}_2})$ ③ $\Delta G_T^\circ - RT\ln(p_{\text{CO}_2}^{1/2})$
 ④ $\Delta G_T^\circ + RT\ln(p_{\text{CO}_2}^2)$ ⑤ $\Delta G_T^\circ + RT\ln(p_{\text{CO}_2})$ ⑥ $\Delta G_T^\circ + RT\ln(p_{\text{CO}_2}^{1/2})$

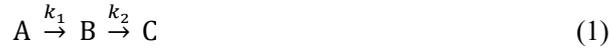
B4

- ① -18.8 ② -3.5 ③ 4.2 ④ 10.4
 ⑤ 19.4 ⑥ 27.1 ⑦ 42.4 ⑧ 84.8

B5

- ① 正の値であり，熱分解反応は進行する
 ② 正の値であり，熱分解反応の逆反応が進行する
 ③ 負の値であり，熱分解反応は進行する
 ④ 負の値であり，熱分解反応の逆反応が進行する

3. 次のような反応 ((1)式)



を考える。 k_1 および k_2 は反応速度定数である。空欄 **B6** ~ **C5** にあてはまる最も適切な数式、語句または数値を、選択肢からそれぞれ1つずつ選べ。

(1)式のように原料成分 A が中間体 B を経て最終生成物 C にまで進む反応を **B6** という。

各反応が 1 次反応だとすれば、各成分の反応速度は反応速度定数を用いて(2)~(4)式で表される。

$$r_A \left(\equiv \frac{dc_A}{dt} \right) = \text{B7} \quad (2)$$

$$r_B \left(\equiv \frac{dc_B}{dt} \right) = \text{B8} \quad (3)$$

$$r_C \left(\equiv \frac{dc_C}{dt} \right) = \text{B9} \quad (4)$$

C_i は成分 i のモル濃度、 t は時間である。反応初期 ($t = 0$) に原料成分である A 以外が存在しないとすれば

$$C_A = C_{A0} \quad C_B = 0 \quad C_C = 0 \quad (5)$$

とできる。 C_{A0} は $t = 0$ における A のモル濃度である。反応速度定数 k_1 と k_2 が等しい場合、B のモル濃度は次式で表される。

$$\frac{C_B}{C_{A0}} = k_1 t \exp(-k_1 t) \quad (6)$$

時間 $t = \text{BX}$ のとき、B は最大モル濃度 **C1** をとる。

一般に、反応速度は温度を上げると増大する。反応速度定数 k と温度 T [K]の間には次の関係 ((7)式) が成立することが知られている。

$$k = A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad (7)$$

この式を **C2** という。(7)式の中で E はエネルギーの次元を持ち、**C3** と呼ばれ、また、 A は **C4** と呼ばれる。

通常の化学反応の **C3** は **C5** $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ 程度である。

大問 8 (化学③)

1. 下記の(1)~(5)の分子について、下線部の原子の混成軌道を、①~③のうちからそれぞれ1つ選べ。

(1) CH₃-CH₃

(2) CH₂=CH₂

(3) H₂O

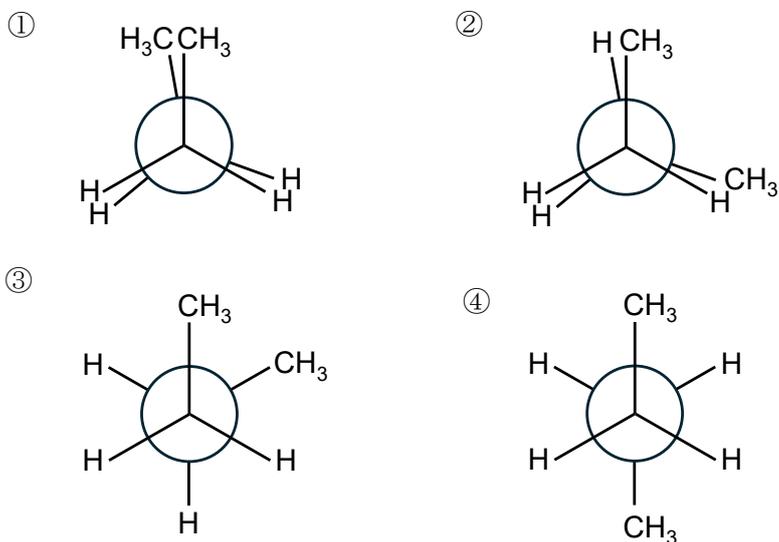
(4) CH₃CN

(5) CO₂

① sp ② sp² ③ sp³

2. 分子の相対的安定性について、以下の問いに答えよ。

(1) *n*-ブタンの配座異性体のうち 4 つを①～④に示す。(i)と(ii)の問いに答えよ。



(i) ①～④で最も安定な配座異性体はどれか。①～④のうちから 1 つ選べ。

A6

(ii) ①～④で最も不安定な配座異性体はどれか。①～④のうちから 1 つ選べ。

A7

(2) 以下の①～③の化合物について、(i)と(ii)の問いに答えよ。

① 1-ブテン ② *cis*-2-ブテン ③ *trans*-2-ブテン

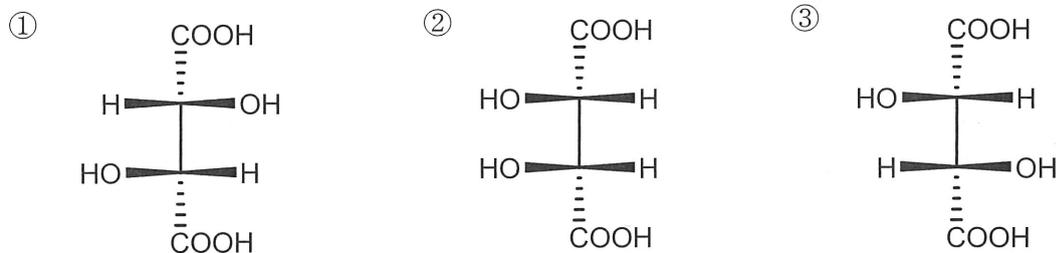
(i) ①～③で最も安定な化合物はどれか。①～③のうちから 1 つ選べ。

A8

(ii) ①～③で最も不安定な化合物はどれか。①～③のうちから 1 つ選べ。

A9

3. 酒石酸の異性体の構造を①～③に示す. (1)と(2)の問いに答えよ.



(1) メソ体はどれか. ①～③のうちから1つ選べ.

AX

(2) 2つの不斉炭素の絶対配置が両方ともRであるものはどれか. ①～③のうちから1つ選べ.

B1

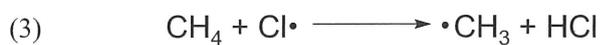
4. メタンと塩素とのラジカル連鎖反応の素反応段階を下記に示す. それぞれの素反応段階の名称について, 適切なものを①～③のうちからそれぞれ1つ選べ.



B2



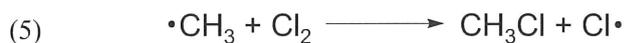
B3



B4



B5

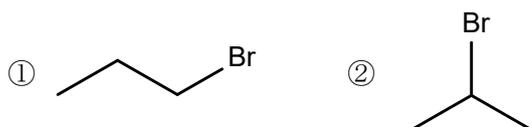
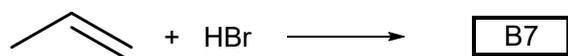


B6

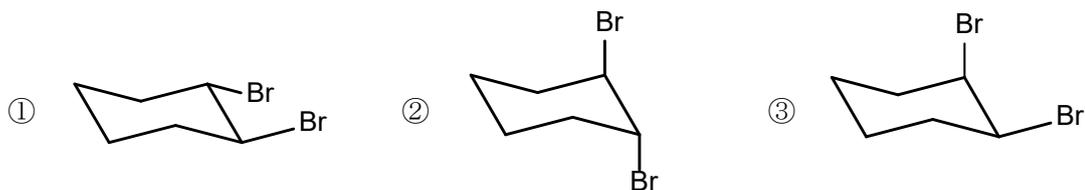
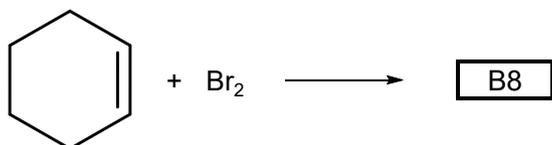
① 開始段階 ② 成長段階 ③ 停止段階

5. 付加反応について、(1)~(3)の問いに答えよ。

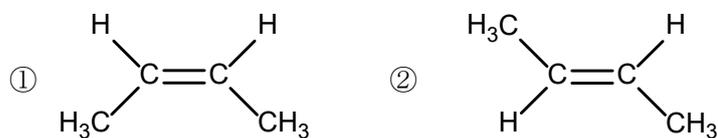
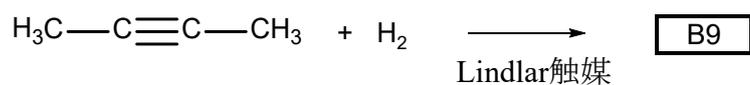
(1) 下記の反応の主生成物について、適切なものを①と②のうちから1つ選べ。



(2) 下記の反応の主生成物の構造について、適切なものを①~③のうちから1つ選べ。

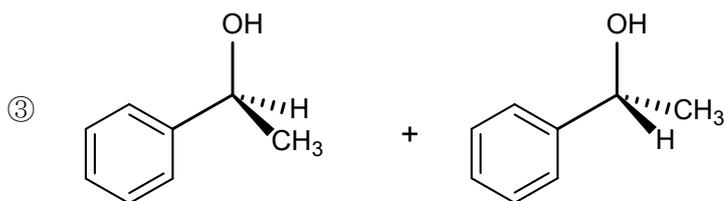
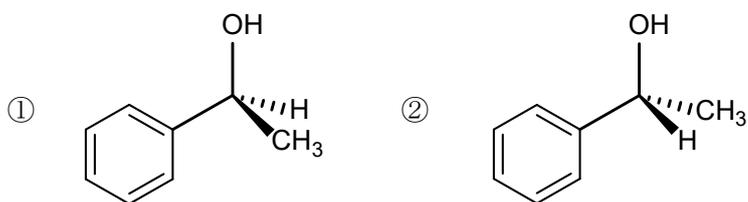
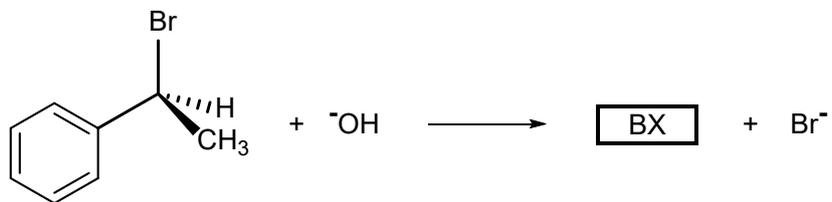


(3) 下記の反応の主生成物について、適切なものを①と②のうちから1つ選べ。

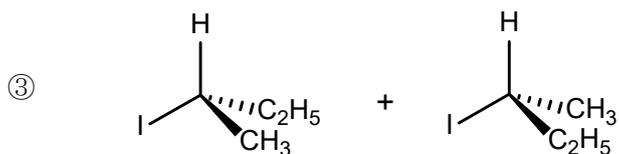
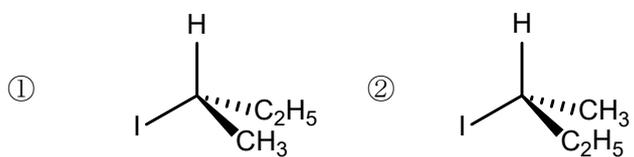
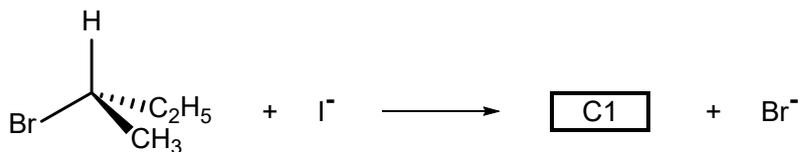


6. 極性反応について、(1)~(3)の問いに答えよ。

(1) 下記の反応が S_N1 で進行した際の生成物について、適切なものを①~③のうちから1つ選べ。

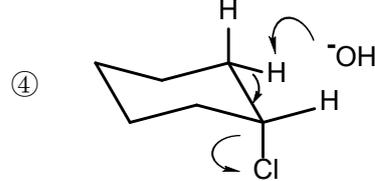
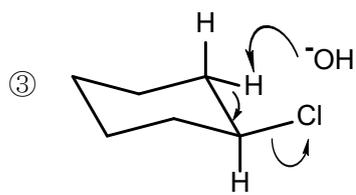
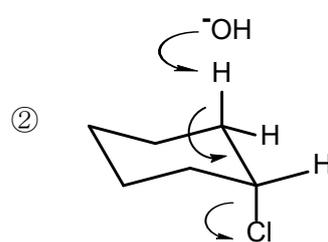
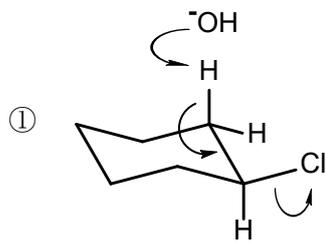
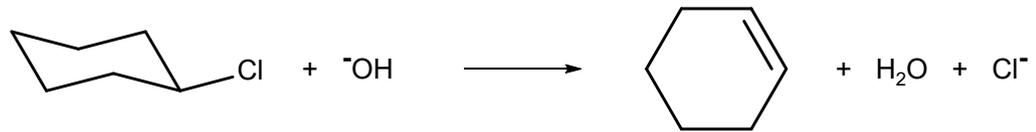


(2) 下記の反応が S_N2 で進行した際の生成物について、適切なものを①~③のうちから1つ選べ。



(3) 下記の反応が E2 で進行した際の電子の流れ図として、適切なものを①～④のうちから 1 つ選べ.

C2



<試験を終えた学生のみなさんへ>

統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の1年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

*統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp