

令和 06 年度 統一テスト

(理数基礎学力到達度テスト)

<問題冊子②>選択問題

大問 2 (数学②) 大問 3 (数学③)
大問 4 (物理学①) 大問 5 (物理学②)
大問 6 (化学①) 大問 7 (化学②) 大問 8 (化学③)

試験時間 2 時間

＊解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません＊

【問題を選択する際の注意】

1. 以下の問題選択ルールに従い、大問 7 問のうち 4 問に解答すること.
 - a) 物理学、化学からそれぞれ 1 問は解答すること.
 - b) 化学を 3 問とも選択することはできない.

2. したがって、選択問題の解答パターンは下記の 4 つのみとなる.

数学 2 問－物理学 1 問－化学 1 問	数学 1 問－物理学 2 問－化学 1 問
数学 1 問－物理学 1 問－化学 2 問	数学 0 問－物理学 2 問－化学 2 問

【解答する際の注意】

1. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚（裏面もあり）を用いること。ただし、大問 2 を選択する場合は専用の解答用紙（裏面もあり）を用いること。
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること（マーク式のみの大問もあり）。
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は、問題文の A1, A2, ... にあてはまるものを該当する解答群（選択肢）から選び、選択肢の番号①, ②... で答えること。同じ選択肢が複数回あてはまることもある。
4. 空欄の中には通常の式では不要な「1」「-1」「0」が当てはまることがある。その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること。
5. 問題に関する質問は、汚損で読めない等以外は原則認めない。

大問2（数学②）

次の各問に答えなさい。

1. n 個の列ベクトルから成る n 次正方行列 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ を用いて、連立 1 次方程

式を $Ax=b$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ と表示する. ここで, $\text{rank } A$ と $\text{rank } [A \mid b]$ はそれ

ぞれ係数行列と拡大係数行列の階数を, また $|A|$ は A の行列式を表すものとする.

- (1) $Ax=b$ ($b \neq 0$) がただ 1 組の解をもつ場合には, $\text{rank } [A \mid b]$ A1 $\text{rank } A$ A2 n ,
 $|A|$ A3 0 である. このとき, $a_1, a_2, \dots, a_n$ は A4 であり, n 次元ベクトル空間 R^n の基底となる.

- (2) $Ax=b$ ($b=0$) が自明な解のみをもつ場合には, $\text{rank } A$ A5 n , $|A|$ A6 0 である. 一方, 無数の解をもつ場合には, $\text{rank } A$ A7 n , $|A|$ A8 0 であり, $a_1, a_2, \dots, a_n$ は A9 である.

続いて, R^2 の xy 平面上曲線の方程式を $Jx^2 + Ky^2 + Py + Q = 0$ (J, K, P, Q : 実数) とするとき, 以上の結果を参照して以下の問に答えなさい.

- (3) この曲線が $(0, 0)$, $(0, \alpha)$, $(\alpha - 1, 1)$ の 3 点を通るときには ($\alpha \neq 0$ かつ $\neq 1$), J , K, P, Q に関する 4 つの方程式から成る同次連立 1 次方程式を得ることができる.

これを 4 次の正方行列 $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ を用いて, $Ax=b$, $x = \begin{bmatrix} J \\ K \\ P \\ Q \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

と表示した場合には, 選択肢の番号の若い順に $a_1 = [\text{AX}]$, $a_2 = [\text{B1}]$,
 $a_3 = [\text{B2}]$, $a_4 = [\text{B3}]$ となる.

- (4) 求められた多項式は,
 (i) $\alpha = \text{B4}$ のときは B5 の円を,
 (ii) $\alpha > \text{B6}$ かつ $\alpha \neq \text{B4}$ のときは B7 の楕円を,
 (iii) $\alpha < \text{B6}$ のときは B8 の双曲線をそれぞれ定める.

A1 ~ **A9** の解答群 _____

① $\in$ ② $<$ ③ $>$ ④ $\simeq$ ⑤ $=$ ⑥ $\neq$

⑦ 1次結合 ⑧ 1次独立 ⑨ 1次従属 ⑩ 1次変換

AX ~ **B3** の解答群 _____

①	$\begin{matrix} x^2 + y^2 \\ 0 \\ \alpha^2 \\ 1 \end{matrix}$	②	$\begin{matrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \\ (\alpha - 1)^2 \end{matrix}$	③	$\begin{matrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \\ (\alpha - 1)^2 \end{matrix}$	④	$\begin{matrix} y^2 \\ x^2 \\ 0 \\ \alpha^2 \end{matrix}$	⑤	$\begin{matrix} y^2 \\ 0 \\ \alpha \\ x^2 \end{matrix}$
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

⑥	$\begin{matrix} y^2 \\ 0 \\ \alpha^2 \\ 1 \end{matrix}$	⑦	$\begin{matrix} x \\ \alpha \\ y \\ 0 \end{matrix}$	⑧	$\begin{matrix} y \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \end{matrix}$	⑨	$\begin{matrix} y \\ 1 \\ 0 \\ (\alpha - 1)^2 \end{matrix}$	⑩	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ x \\ 1 \end{matrix}$
---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

⑪	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ y \end{matrix}$	⑫	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	⑬	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$	⑭	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$
---	--	---	--	---	--	---	--

B4 ~ **B8** の解答群 _____

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ -1

⑦ -2 ⑧ -3 ⑨ -4 ⑩ -5 ⑪ 0

⑫ $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ ⑬ $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ⑭ $x^2 + (y + 2)^2 = 4$

⑮ $\frac{x^2}{\alpha - 2} - (y - \alpha)^2 = \alpha^2$ ⑯ $\frac{x^2}{\alpha - 2} + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$ ⑰ $\frac{x^2}{\alpha - 1} - \left(y - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$

⑱ $\frac{x^2}{\alpha - 1} + \left(y - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$ ⑲ $\frac{x^2}{\alpha + 1} - \left(y + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$ ⑳ $\frac{x^2}{\alpha + 1} + \left(y + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$

2. 行列式, 余因子行列, 逆行列および線形写像に関する以下の問に答えなさい.

(1) 実正方行列を $B = \begin{bmatrix} -1 & -\beta & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$ ($\beta \neq 0$) とすると, その行列式は $|B| = \boxed{\text{B9}}$

となり, 余因子行列は $\tilde{B} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{BX}} & \boxed{\text{C1}} & -\beta \\ \boxed{\text{C2}} & \boxed{\text{C3}} & \boxed{\text{C4}} \\ \beta^2 & \boxed{\text{C5}} & \boxed{\text{C6}} \end{bmatrix}$ となる. したがって,

$\beta \neq \boxed{\text{C7}}$ の場合には B が $\boxed{\text{C8}}$ となるので, 逆行列を求めることができる.

(2) $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の列ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$ とし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線

形写像を $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ あるいは $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ と表す. これに対応する行列表示は $f(\mathbf{v}) = C \mathbf{v}$ であり, $m \times n$ 型の行列 C は表現行列と呼ばれる.

ここで, $m = n = 3$ の線形変換 (1 次変換) を扱い, $\begin{cases} w_1 = -v_1 + 2v_2 \\ w_2 = -2v_1 + v_3 \\ w_3 = -2v_2 + v_3 \end{cases}$ とした場

合には, $C = \begin{bmatrix} \boxed{\text{C9}} & \boxed{\text{CX}} & \boxed{\text{D1}} \end{bmatrix}$ となる. この行列 C は上記 (1) の行列

B において, $\beta = \boxed{\text{D2}}$ とした行列と同じであるので, $C (= B)$ は $\boxed{\text{C8}}$ である.

したがって, f は $\boxed{\text{D3}}$ であり, 逆写像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ をもち, $f^{-1}(\mathbf{w}) = \boxed{\text{D4}} \mathbf{w}$

$= \begin{bmatrix} \boxed{\text{D5}} \\ \boxed{\text{D6}} \\ \boxed{\text{D7}} \end{bmatrix}$ と求められる.

B9 **C8** **D3** **D4** の解答群 _____

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|----------------------|
| ① $-\beta(\beta+2)$ | ② $-\beta(\beta+1)$ | ③ $-\beta(\beta-1)$ | ④ $\beta(\beta-1)$ | ⑤ $\beta(\beta+1)$ |
| ⑥ $\beta(\beta+2)$ | ⑦ 対角行列 | ⑧ 正則行列 | ⑨ 交代行列 | ⑩ 回転行列 |
| ⑪ 対称行列 | ⑫ 単射 | ⑬ 全射 | ⑭ 全単射 | ⑮ C |
| ⑯ $ C $ | ⑰ C^{-1} | ⑱ $ C ^{-1}$ | ⑲ $\tilde{C}$ | ⑳ $(\tilde{C})^{-1}$ |
-

BX $\sim$ **C7** および **D2** の解答群 _____

- | | | | | | |
|-------------|-------------|-----------|--------------|--------------|-------------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ -1 | ⑥ -2 |
| ⑦ -3 | ⑧ -4 | ⑨ 0 | ⑩ $-\beta^3$ | ⑪ $-\beta^2$ | ⑫ -3β |
| ⑬ -2β | ⑭ $-\beta$ | ⑮ β | ⑯ 2β | ⑰ 3β | ⑱ β^2 |
| ⑲ β^3 | ⑳ β^4 | | | | |
-

C9 $\sim$ **D1** および **D5** $\sim$ **D7** の解答群 _____

- | | | | | | | |
|---|----|--|------|---|-----|-----|
| | -3 | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| ① | -2 | ② -1 | ③ -2 | ④ -1 | ⑤ 1 | ⑥ 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 |
| | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | |
| ⑦ | 2 | ⑧ -2 | ⑨ 0 | ⑩ 1 | ⑪ 2 | |
| | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | |
| ⑫ $-2w_1 + w_2 + 2w_3$ | | ⑬ $2w_1 - w_2 + 2w_3$ | | ⑭ $2w_1 + w_2 - 2w_3$ | | |
| ⑮ $w_1 - w_2 + w_3$ | | ⑯ $-w_1 + w_2 + w_3$ | | ⑰ $w_1 + w_2 - w_3$ | | |
| ⑱ $w_1 + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_3$ | | ⑲ $-w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3$ | | ⑳ $w_1 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3$ | | |
-

3. 線形計画問題に関する以下の問に答えなさい。

$$(1) \text{ 制約条件 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

と非負条件 ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) の下に, 目的関数 $z = 5x_1 + 3x_2$ の値を最大にする x_1, x_2 の最適解を求めるために, 次のような単体表を途中段階まで作成してある. ここで, 解答用紙裏面の記入解答欄 1 に同表が印刷されているので, 表 I, 表 II に続いてそれ以降の計算結果の数値を表 III に記入しなさい.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
I	1	2	1	0	0	0	10
	3●	1	0	1	0	0	15
	-3	2	0	0	1	0	2
	-5	-3	0	0	0	1	0
II	0	5/3	1	-1/3	0	0	5
	1	1/3	0	1/3	0	0	5
	0	3	0	1	1	0	17
	0	-4/3	0	5/3	0	1	25
III							

(2) 以上より, 目的関数の最大値は **D8** で, 最適解は $x_1 = \text{D9}$, $x_2 = \text{DX}$ である. ここで, 表 II の中で選ばれたピボットの位置を, 解答用紙裏面の記入解答欄 1 に表 I のように●印を付記して示しなさい.

(3) x_1x_2 平面上の可能領域は, 選択肢の番号の若い順に **E1**, **E2**, **E3**, **E4**, **E5** を頂点にもつ **E6** の内部と境界である.

D8 ～ **DX** の解答群 _____

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| ⑥ 6 | ⑦ 7 | ⑧ 8 | ⑨ 9 | ⑩ 10 |
| ⑪ 11 | ⑫ 12 | ⑬ 13 | ⑭ 18 | ⑮ 25 |
| ⑯ 29 | ⑰ 37 | ⑱ 43 | ⑲ 56 | ⑳ 0 |

E1 ～ **E6** の解答群 _____

- | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|------------|------------|
| ① $(-2, 0)$ | ② $(-1, 1)$ | ③ $(0, -1)$ | ④ $(0, 0)$ | ⑤ $(0, 1)$ |
| ⑥ $(0, 2)$ | ⑦ $(1, 2)$ | ⑧ $(2, 2)$ | ⑨ $(2, 4)$ | ⑩ $(3, 2)$ |
| ⑪ $(4, 3)$ | ⑫ $(4, 7)$ | ⑬ $(5, 0)$ | ⑭ $(6, 5)$ | ⑮ $(7, 6)$ |
| ⑯ 三角形 | ⑰ 四角形 | ⑱ 五角形 | ⑲ 六角形 | ⑳ 七角形 |

大問3（数学③）

1. 次の関数の極限值を求めなさい.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \boxed{\text{A1}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\boxed{\text{A2}}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(-\frac{1}{2} (\boxed{\text{A3}}) \right) = \boxed{\text{A4}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{\boxed{\text{A5}}} = \boxed{\text{A6}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$$

$y = x^x$ とおくと $\ln y = x \ln x$ であるので

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\boxed{\text{A7}}}{-1/x^2} = \boxed{\text{A8}}$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} (\boxed{\text{A9}})^{\ln y} = \boxed{\text{AX}}$$

ただし $\ln$ は自然対数である.

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sin}^{-1} x}{x}$$

$y = \text{Sin}^{-1} x$ とおくと

$$x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

であり, $x \rightarrow 0$ のとき, $y \rightarrow \boxed{\text{B1}}$, よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sin}^{-1} x}{x} = \lim_{y \rightarrow \boxed{\text{B1}}} \frac{y}{\sin y} = \boxed{\text{B2}}$$

A1 ~ B2 の選択肢				
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 0	⑧ $\frac{1}{2}$	⑨ $\frac{1}{3}$	⑩ e
⑪ $3x^2$	⑫ x^2	⑬ $2x^2$	⑭ $1/x$	⑮ $-1/x$
⑯ $1/x^2$				

2. 3次元空間で次式で与えられる曲面を考える. ただし $a, b > 0$ とする.

$$z = F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

- (1) 関数 $z = F(x, y)$ の x に関する偏導関数は $F_x = \boxed{\text{B3}}$, y に関する偏導関数は $F_y = \boxed{\text{B4}}$ となる. $F(x, y)$ が極値をとるならば $F_x = F_y = 0$ となり, $x = 0, y = 0$ が得られる. しかし, 曲面 $z = F(x, y)$ を平面 $x = 0$ で切った断面は $z = \boxed{\text{B5}}$ で表される $\boxed{\text{B6}}$ 凸の $\boxed{\text{B7}}$ となるが, 平面 $y = 0$ で切った断面は $z = \boxed{\text{B8}}$ で表される $\boxed{\text{B9}}$ 凸の $\boxed{\text{B7}}$ となる. よって, $F(x, y)$ は $x = 0, y = 0$ では $F_x = F_y = 0$ となるが極値をとらない.

- (2) C を定数とすると平面 $z = C$ と曲面の交線が求まる.

$C = 0$ の場合は $y = \boxed{\text{BX}}$ の $\boxed{\text{C1}}$ となる.

$C = 1$ の場合は $y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ $|x| \geq a$ の $\boxed{\text{C2}}$,

$C = -1$ の場合は $x = \pm a \sqrt{\frac{y^2}{b^2} - 1}$ $|y| \geq b$ の $\boxed{\text{C2}}$ となる.

解答用紙裏面の記述欄 1 に $C = 0, C = \pm 1$ の場合のグラフの概略を描きなさい.

$C = 0, C = \pm 1$ および x 軸, y 軸との交点の値も記しなさい.

- (3) 点 (x_0, y_0, z_0) を曲面の 1 点とすると接平面の方程式は次式で与えられる.

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

ただし $F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)$ はそれぞれ関数 $F(x, y)$ の点 (x_0, y_0) における x, y に関する偏微分係数である. 曲面上の点 $(x_0, y_0, z_0) = (a, 2b, -3)$ に接する接平面の式は $F_x(x_0, y_0) = \boxed{\text{C3}}$, $F_y(x_0, y_0) = \boxed{\text{C4}}$ より, 次式のようになる.

$$z = (\boxed{\text{C3}})x + (\boxed{\text{C4}})y + (\boxed{\text{C5}})$$

接平面が平面 $z = 0$ と交わる曲線は直線となり, 次式のようになる.

$$y = (\boxed{\text{C6}})x + (\boxed{\text{C7}})$$

B6	B7	B9	C1	C2	の選択肢				
① 直線			② 放物線	③ 双曲線	④ 3次曲線	⑤ 上に			
⑥ 下に									

B3	～	B5	B8	BX	の選択肢				
① $-\frac{y^2}{b^2}$			② $\frac{x^2}{a^2}$	③ $-\frac{y^2}{a^2}$	④ $-\frac{x^2}{b^2}$	⑤ $\frac{b}{a}x$			
⑥ $-\frac{b}{a}x$			⑦ $\pm \frac{b}{a}x$	⑧ $\frac{2x}{a^2}$	⑨ $\frac{2y}{b^2}$	⑩ $-\frac{2x}{a^2}$			
⑪ $-\frac{2y}{b^2}$			⑫ $\frac{x}{a}$	⑬ $\frac{y}{b}$					

C3	～	C7	の選択肢						
① $\frac{1}{a}$			② $\frac{2}{a}$	③ $\frac{1}{b}$	④ $\frac{2}{b}$	⑤ $\frac{4}{a}$			
⑥ $-\frac{4}{a}$			⑦ $\frac{4}{b}$	⑧ $-\frac{4}{b}$	⑨ $\frac{b}{a}$	⑩ $\frac{b}{2a}$			
⑪ $-\frac{b}{a}$			⑫ $-\frac{b}{2a}$	⑬ $\frac{a}{2}$	⑭ $\frac{b}{2}$	⑮ $\frac{3a}{4}$			
⑯ $\frac{3b}{4}$			⑰ $-\frac{3a}{4}$	⑱ $-\frac{3b}{4}$	⑲ 3	⑳ 4			

3. 楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0) \quad (1)$$

に対して、次の問いに答えなさい。

- (1) 式(1)の楕円面で囲まれる部分 D の体積を求める． $x = ar \sin \theta \cos \phi$, $y = br \sin \theta \sin \phi$, $z = cr \cos \theta$ とおくと楕円面内部 D は $r\theta\phi$ 空間の領域

$$E = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

に写像される． x, y, z の r, θ, ϕ に関する偏導関数 $x_r, x_\theta, x_\phi, y_r, y_\theta, y_\phi, z_r, z_\theta, z_\phi$ を求めると

$$\begin{aligned} x_r &= a \sin \theta \cos \phi, & x_\theta &= ar \cos \theta \cos \phi, & x_\phi &= -ar \sin \theta \sin \phi \\ y_r &= b \sin \theta \sin \phi, & y_\theta &= br \cos \theta \sin \phi, & y_\phi &= br \sin \theta \cos \phi \\ z_r &= c \cos \theta, & z_\theta &= -cr \sin \theta, & z_\phi &= 0 \end{aligned}$$

よって、 x, y, z の r, θ, ϕ に関する変換のヤコビアン（ヤコビ行列式）は

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix} = \boxed{\text{C8}} \boxed{\text{C9}} \boxed{\text{CX}}$$

楕円面内部の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_E |J| dr d\theta d\phi \\ &= \boxed{\text{C8}} \int_0^1 \boxed{\text{C9}} dr \int_0^\pi \boxed{\text{CX}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \boxed{\text{D1}}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{C8}} \sim \boxed{\text{D1}}$ の選択肢――

- | | | | | |
|-------------|--------------|------------------------|-----------------|-----------------|
| ① abc | ② ab | ③ c | ④ r | ⑤ r^2 |
| ⑥ πabc | ⑦ $2\pi abc$ | ⑧ $\frac{4}{3}\pi abc$ | ⑨ $\sin \theta$ | ⑩ $\cos \theta$ |

- (2) 楕円面に内接する直方体で体積が最大となるものを求める．直方体の各辺は x, y, z 軸のいずれかに平行であるとする．直方体は3つの座標平面について対称となるので、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の範囲の領域にある直方体の楕円面に接する頂点の座標 (x, y, z) と体積 W を考える． z と W は次のようになる．

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad W = cxy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ここで $f(x, y) = cxy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ とおくと $f(x, y) = xy \cdot z(x, y)$ と書ける． $z(x, y)$

と $f(x, y)$ の x および y に関する偏導関数を z_x, z_y, f_x, f_y とすると

$$z_x = -\frac{cx}{a^2} \boxed{\text{D2}} = -\frac{\boxed{\text{D3}}}{a^2 z}, \quad z_y = -\frac{cy}{b^2} \boxed{\text{D2}} = -\frac{\boxed{\text{D4}}}{b^2 z}.$$

したがって、次式が求まる.

$$f_x = yz - \frac{\boxed{\text{D3}}}{a^2 z} xy = \frac{y(a^2 z^2 - \boxed{\text{D5}})}{a^2 z} \quad (2)$$

$$f_y = xz - \frac{\boxed{\text{D4}}}{b^2 z} xy = \frac{x(b^2 z^2 - \boxed{\text{D6}})}{b^2 z} \quad (3)$$

$f(x, y)$ が最大値ならば $f_x = 0, f_y = 0$ である. しかし $x = 0$ または $y = 0$ ならば $f(x, y) = 0$ となるので $f(x, y)$ が最大値をとるためには式 (1)~(3) から

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \boxed{\text{D7}} \quad \text{となる. よって } x, y, z \text{ は以下のように求められる.}$$

$$x = \boxed{\text{D8}}, \quad y = \boxed{\text{D9}}, \quad z = \boxed{\text{DX}}$$

2 変数関数 $f(x, y)$ に関する 2 次偏導関数を f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} とする. 2 変数関数の極値に対する判別式 $D/4 = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ を計算すると $D/4 < 0$ かつ $f_{xx} < 0$ なので

$f(x, y)$ は $(x, y) = (\boxed{\text{D8}}, \boxed{\text{D9}})$ で最大となる. よって求める直方体の体積は

$$8W = \boxed{\text{E1}}$$

となる.

$\boxed{\text{D2}} \sim \boxed{\text{D6}}$ の選択肢

-
- | | | | | |
|---|--|--|------------|--------|
| ① cx | ② c^2x | ③ cx^2 | ④ c^2x^2 | ⑤ cy |
| ⑥ c^2y | ⑦ cy^2 | ⑧ c^2y^2 | | |
| ⑨ $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}$ | ⑩ $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$ | ⑪ $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ | | |
-

$\boxed{\text{D7}} \sim \boxed{\text{E1}}$ の選択肢

-
- | | | | | |
|---------------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|
| ① a | ② b | ③ c | ④ $\frac{a}{\sqrt{3}}$ | ⑤ $\frac{b}{\sqrt{3}}$ |
| ⑥ $\frac{c}{\sqrt{3}}$ | ⑦ $\frac{a}{3}$ | ⑧ $\frac{b}{3}$ | ⑨ $\frac{c}{3}$ | ⑩ abc |
| ⑪ $\frac{1}{\sqrt{3}}abc$ | ⑫ $\frac{8}{3}abc$ | ⑬ $\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$ | ⑭ 1 | ⑮ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| ⑯ $\frac{1}{3}$ | ⑰ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | | |
-

大問 4 (物理学①)

地球の自転により生じる現象に関する，以下の問 1 および 2 に答えよ．ここでは地球が太陽の周りを公転することを考えない．角度単位は **radian** を用いる．ベクトルは **A** のように太文字で表し，その大きさは細文字 *A* で表す．

1. 地球自転による海水位の変化

ここでは半径 R の剛体球の表面に薄い海水層をもつ地球モデルを考える．自転軸を z 軸として，海水層は地面と等しい角速度 $\omega = 2\pi/T$ (T :周期)で回転する．北半球の緯度を θ ，地表面からの水位を $h(\theta) (\ll R)$ として， $0 \leq \theta \leq \pi/2$ での $h(\theta)$ を求める． z 軸に垂直で緯度 θ の地表点を通る軸を ρ 軸とする．その地表点での万有引力のみによる地球中心の原点 O 向きの重力加速度を $\mathbf{g}_0$ とする．地球表面の緯度 θ で重力加速度を $\mathbf{g}$ とすると， $\mathbf{g}$ は $\mathbf{g}_0$ と遠心加速度 $\mathbf{a}$ とのベクトル和 $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{a}$ である．ここでは $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{g}_0| = g_0$ である．さらに $\mathbf{g}_0$ への海水の影響は無視してよく， $\mathbf{a}$ も R, θ, ω で決まり水位の影響は無視してよい．

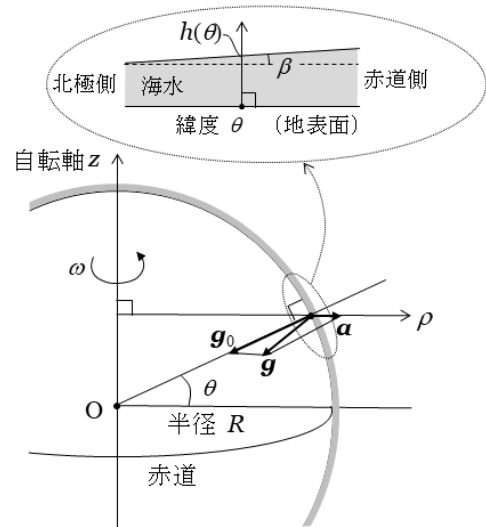


図 1

図 1 右上部分に示すように，緯度 θ での海面と地表面がなす角度を β とする． $\tan \beta$ は，緯度 θ の微小減少 $-d\theta$ で決まる地表上距離 $-Rd\theta$ に対する水位変化 dh の比である．

$$\tan \beta = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dh}{d\theta} \quad (1)$$

自転状態で安定な海面は $\mathbf{g}$ に垂直になり、 $\mathbf{g}$ と $\mathbf{g}_0$ のなす角も β である。 $\mathbf{a}$ の向きは ρ 軸方向で、その大きさは、赤道($\theta=0$)では $\boxed{\text{A1}}$ であり、緯度 θ では $\boxed{\text{A2}}$ となる。 $\mathbf{g}$ の、地表面に平行で南（赤道側）向き成分は $\mathbf{a}$ の南（赤道側）向き成分であるから $\boxed{\text{A3}}$ となる。 $\mathbf{g}$ の地表面に垂直下向き（原点 O 向き）成分は緯度 θ に依存し $\boxed{\text{A4}}$ である。 $\mathbf{g}$ の地表面に平行南向き成分 $\boxed{\text{A3}}$ の $\mathbf{g}$ の原点 O 向き成分 $\boxed{\text{A4}}$ に対する比が $\tan \beta$ であり、全域で $|\mathbf{a}| \ll g_0$ により $\boxed{\text{A4}} \approx g_0$ と近似でき次式となる。

$$\tan \beta = \frac{\boxed{\text{A3}}}{\boxed{\text{A4}}} \approx \frac{\boxed{\text{A3}}}{g_0} \quad (2)$$

式(1)と(2)より、北極での海面水位を h_0 とすると次の関係が得られ、上の水位の傾きの式(1)と合わせて緯度 θ で積分することで次の式が得られる。

$$h(\theta) = h_0 + (\boxed{\text{A5}}) \cdot \int_{\theta}^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = h_0 + (\boxed{\text{A5}}) \cdot (\boxed{\text{A6}})$$

剛体球周りに海水層を置いたこの地球モデルでは、赤道の水位は北極の水位より 11 km 高いと見積もられるが、実際とは異なっている。これは、実際の地球が、地表面以下が一樣剛体球ではなく密度も異なり流動性や弾性等をもつためである。地球は、地表面赤道半径が北極-地球中心間距離より平均で約 21 km 大きな楕円体である。

A1～A6 の選択肢

- | | | | | | | |
|------------------------------|------------------------------------|--|--|-------------------|----------------------------|----------------------------------|
| ① $\frac{R^2 \omega^2}{g_0}$ | ② $\frac{R^2 \omega^2}{2g_0}$ | ③ $\frac{R^2 \omega^2}{4g_0}$ | ④ $R^2 \omega^2$ | ⑤ $R \omega^2$ | ⑥ $R \omega^2 \sin \theta$ | ⑦ $g_0 - R \omega^2 \sin \theta$ |
| ⑧ $R \omega^2 \cos \theta$ | ⑨ $g_0 - R \omega^2 \cos \theta$ | ⑩ $R \omega^2 \sin \theta \cos \theta$ | ⑪ $g_0 - R \omega^2 \sin \theta \cos \theta$ | | | |
| ⑫ $R \omega^2 \sin^2 \theta$ | ⑬ $g_0 - R \omega^2 \sin^2 \theta$ | ⑭ $R \omega^2 \cos^2 \theta$ | ⑮ $g_0 - R \omega^2 \cos^2 \theta$ | | | |
| ⑯ $\sin \theta$ | ⑰ $\cos \theta$ | ⑱ $\sin \theta \cos \theta$ | ⑲ $\sin^2 \theta$ | ⑳ $\cos^2 \theta$ | | |

2. 自転する地球上で生じるコリオリ力と遠心力の式の導出

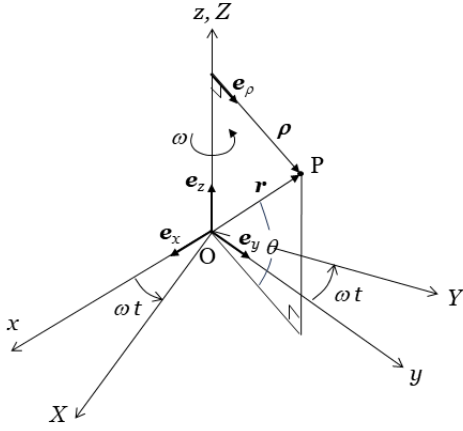


図 2

図 2 に示すように、地球中心を原点として直交座標 x, y, z 軸をもつ慣性座標 S 系と、原点 O が共通で z 軸と一致する Z 軸をもちそれを一定角速度 ω で回る X 軸, Y 軸をもつ直交回転座標 S'系を考える．基本ベクトルは、S 系では $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 、S'系では $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$ である．S 系と S'系では共通の時刻 t を用いる． z 軸と Z 軸が北極点を通る自転軸であり、時刻 t で地球中心の原点 O から地表の緯度 θ の点 P への位置ベクトルを S 系で $\mathbf{r}$ として、点 P の座標が (r_x, r_y, r_z) である． z 軸から垂直に点 P に向かう長さ ρ のベクトルを $\boldsymbol{\rho}$ 、その単位ベクトルを $\mathbf{e}_\rho$ とすれば $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_\rho$ である． $\mathbf{e}_\rho$ が遠心力の向きである．

時刻 t で点 P にある質点の位置ベクトルを S'系で $\mathbf{r}'$ とする．S 系と S'系は原点が共通なので、 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ は同じ位置ベクトルを表し $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ である．各成分値は異なるので次式となる．

$$\text{S 系: } \mathbf{r} = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y + r_z \mathbf{e}_z \quad \text{S'系: } \mathbf{r}' = r'_X \mathbf{e}_X + r'_Y \mathbf{e}_Y + r'_Z \mathbf{e}_Z \quad (1)$$

S 系で見た時刻 t で点 P にある質点の速度ベクトル $\mathbf{v}$ と加速度ベクトル $\mathbf{a}$ は

$$\begin{aligned} \text{S 系: } \mathbf{v} &= (v_x, v_y, v_z) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dr_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dr_z}{dt} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2)$$

である．慣性座標 S 系では座標系の基本ベクトルは時間変化しないから、基本ベクトルの時間微分項はすべて 0 であり現れない．一方で、S'系で用いる基本ベクトルは S 系から見れば時間変化する．それでも、S'系の地上で生活する人々は通常、S'座標系の基本ベクトルの時間微分を考えないので時刻 t で点 P にある質点の速度 $\mathbf{v}'$ と加速度 $\mathbf{a}'$ を次式で決める．

$$\begin{aligned} \text{S'系: } \mathbf{v}' &= (v'_X, v'_Y, v'_Z) = \frac{dr'_X}{dt} \mathbf{e}_X + \frac{dr'_Y}{dt} \mathbf{e}_Y + \frac{dr'_Z}{dt} \mathbf{e}_Z \\ \mathbf{a}' &= (a'_X, a'_Y, a'_Z) = \frac{dv'_X}{dt} \mathbf{e}_X + \frac{dv'_Y}{dt} \mathbf{e}_Y + \frac{dv'_Z}{dt} \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (3)$$

これらは基本ベクトル $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$ の時間微分を含まないため, $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v}, \mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$ である.

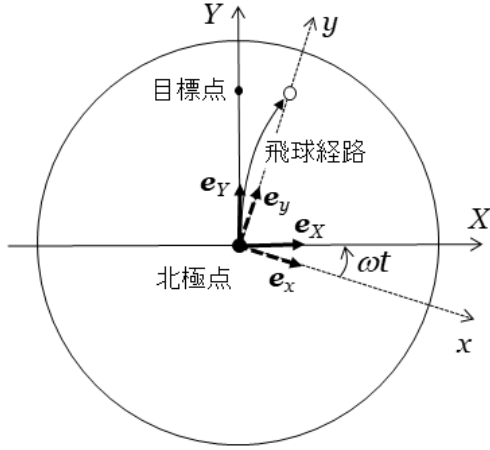


図 3

その例として図 3 に示すように, 地球の北極点にいる人が目標点に向けて水平に球を飛ばしたときに, 目標より右側に移動し, A7 の法則と異なることに気づく. 地球自転のためである. 図内の飛球経路は S' 系で見た経路である. この自転効果は緯度 θ によって変化する.

S' 系の基本ベクトルの時間依存性を S 系から見れば自転の角速度 ω を用いて次の関係式が得られる.

$$\mathbf{e}_X = \mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t, \quad \mathbf{e}_Y = -\mathbf{e}_x \sin \omega t + \mathbf{e}_y \cos \omega t, \quad \mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_z \quad (4)$$

これらを慣性 S 系で時間微分をして S' 系の $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$ で表せば次式になる.

$$\frac{d\mathbf{e}_X}{dt} = (\text{ A8 }) \mathbf{e}_Y, \quad \frac{d\mathbf{e}_Y}{dt} = (\text{ A9 }) \mathbf{e}_X, \quad \frac{d\mathbf{e}_Z}{dt} = 0 \quad (5)$$

式(1)の $\mathbf{r}'$ を S 系で時間微分すれば質点の速度 $\mathbf{v}$ に等しい速度が得られる.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + r'_X \frac{d\mathbf{e}_X}{dt} + r'_Y \frac{d\mathbf{e}_Y}{dt} + r'_Z \frac{d\mathbf{e}_Z}{dt} \quad (6)$$

式(6)の右辺で, $\mathbf{v}'$ の後ろの 3 項は式(5)を代入すれば次式となる.

$$r'_X \frac{d\mathbf{e}_X}{dt} + r'_Y \frac{d\mathbf{e}_Y}{dt} + r'_Z \frac{d\mathbf{e}_Z}{dt} = (\text{ A9 }) r'_Y \mathbf{e}_X + (\text{ A8 }) r'_X \mathbf{e}_Y \quad (7)$$

したがって, 次式が得られる.

$$\mathbf{v} = (\text{ AX }) \mathbf{e}_X + (\text{ B1 }) \mathbf{e}_Y + v'_Z \mathbf{e}_Z \quad (8)$$

A7~B1 の選択肢

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| ① 作用・反作用 | ② 慣性 | ③ 質量保存 |
| ④ $-\omega$ | ⑤ ω | ⑥ -2ω |
| ⑦ 2ω | ⑧ 0 | |
| ⑨ $v'_X + \omega r'_Y$ | ⑩ $v'_X - \omega r'_Y$ | ⑪ $v'_Y + \omega r'_X$ |
| ⑫ $v'_Y - \omega r'_X$ | | |

次に、式(7)をベクトルの外積（補足参照）で表す．ここまで角速度はスカラー量として用いているが、回転軸の方向も示す場合は、S 系では z 軸正方向で大きさ ω のベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ である．S 系と S' 系では $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$ であるから S' 系の基本ベクトルを用いれば、

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z \quad (9)$$

である． z 軸から垂直に点 P に向かうベクトル $\boldsymbol{\rho}$ は、S 系と S' 系でそれぞれの座標と基本ベクトルで表せる．

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_\rho = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y = r'_x \mathbf{e}_x + r'_y \mathbf{e}_y \quad (10)$$

ここでベクトルの外積 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ を S' 系の成分で表す．

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \boxed{\text{B2}} \\ r'_x & \boxed{\text{B3}} & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

これは式(7)右辺と等しいことがわかる． $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ は S 系で見る点 P の回転速度ベクトル $\mathbf{v}_p$ である．よって、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_p = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \quad (12)$$

が得られる．さらに、 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ が成り立つことが、 $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho} + (\boxed{\text{B4}}) \mathbf{e}_z$ の関係と、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z = \boxed{\text{B5}}$ から導ける．したがって、次式が得られる．

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (13)$$

以上から、 $\mathbf{r}'$ の時間微分が式(13)となることが次の解析で役に立つ．式(13)の時間微分は S 系で見る加速度 $\mathbf{a}$ に等しい．式(13)の右辺の $\mathbf{v}'$ と $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ を対象として、式(6)以降のプロセスと同様の時間微分を以下で行う．

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} \quad (14)$$

右辺の第 1 項は、式(3)の $\mathbf{a}'$ を用いて次式となる．

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}' + v'_x \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + v'_y \frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + v'_z \frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = \mathbf{a}' + (\boxed{\text{B6}}) \quad (15)$$

$\boldsymbol{\omega}$ が時間変化しないから式(6)と式(13)より式(14)の右辺第 2 項は次式となる．

$$\frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (16)$$

したがって次の式が得られる．

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2(\boxed{\text{B6}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boxed{\text{B7}}) \quad (17)$$

B2～B7 の選択肢

- ① 0 ② $-\omega$ ③ ω ④ $\omega \mathbf{e}_X$ ⑤ $\omega \mathbf{e}_Y$ ⑥ $\omega \mathbf{e}_Z$ ⑦ $\omega \mathbf{e}_\rho$
 ⑧ r'_X ⑨ r'_Y ⑩ r'_Z ⑪ $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ ⑫ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ ⑬ $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ⑭ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$

慣性系 S では外力 $\mathbf{F}$ によって質点が $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ で加速されるから、式(17)の両辺に質量 m をかけて $m\mathbf{a}$ を $\mathbf{F}$ で置換して右辺と左辺を換えれば、回転座標 S'系における質点の運動方程式が得られる．ここで $\mathbf{e}_Z \times (\mathbf{e}_Z \times \mathbf{r}') = -\rho \mathbf{e}_\rho$ を用いる．

$$m\mathbf{a}' = \underbrace{\mathbf{F}}_{\text{外力}} + \underbrace{(\text{B8})}_{\text{コリオリ力}} + \underbrace{(\text{B9})}_{\text{遠心力}} \quad (18)$$

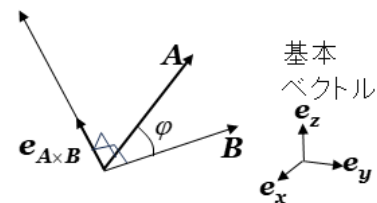
この結果から、北半球の緯度 θ で質点速度 $\mathbf{v}'$ (速さ $v' = |\mathbf{v}'|$) が水平 (地表面に平行) 北向きであれば、コリオリ力は BX 向きで大きさが C1 となる．同じ緯度 θ で質点速度 $\mathbf{v}'$ が水平東向きであればコリオリ力の向きは C2 の向きとなる．

B8～C2 の選択肢

- ① 東 ② 西 ③ 南 ④ 北
 ⑤ $\mathbf{e}_X$ ⑥ $\mathbf{e}_Y$ ⑦ $\mathbf{e}_Z$ ⑧ $\mathbf{e}_\rho$ ⑨ $-m\omega \rho \mathbf{e}_\rho$ ⑩ $m\omega \rho \mathbf{e}_\rho$ ⑪ $-m\omega^2 \rho \mathbf{e}_\rho$
 ⑫ $m\omega^2 \rho \mathbf{e}_\rho$ ⑬ $m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ ⑭ $2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ ⑮ $m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ⑯ $2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$
 ⑰ $m\omega v' \sin \theta$ ⑱ $m\omega v' \cos \theta$ ⑲ $2m\omega v' \sin \theta$ ⑳ $2m\omega v' \cos \theta$

補足) ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の外積

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \varphi) \mathbf{e}_{A \times B}$$



$\mathbf{e}_{A \times B}$: $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の単位ベクトル
 $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ に回す右ねじが進む方向

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z$$

大問5（物理学 ②）

鉛直な壁に固定された棒の，自重による曲げ（たわみ）について考える．棒が変形していないときの中心軸が水平になるように壁に固定する．棒の材質は均質であるものとして，その密度を ρ ，（棒の軸方向の）ヤング率を E とする．棒の厚さを a ，幅を b ，長さ（壁に埋め込まれた部分を除く）を L とする．また，重力加速度を g とする．

図 1 のように，変形していないときの棒の中心軸に沿って x 軸をとり，壁の表面に沿って水平手前向きに y 軸をとり，鉛直下向きに z 軸をとる．自重により棒が曲げられたときの中心軸の z 方向の変位を $h(x)$ で表す．関数 $h(x)$ と棒の先端における中心軸の変位 $H = h(L)$ を求めたい．ただし，曲げは小さく $\left| \frac{dh}{dx} \right| \ll 1$ が成り立ち，曲げによって棒の中心軸は伸び縮みせず，この軸に垂直な方向の伸びや縮みは無視できるものとする．また， $\left| \frac{dh}{dx} \right|$ を 1 次の微小量とすると，棒の各点の x 方向の変位は，2 次の微小量になるので，無視してよい．以下の問いに答えよ．

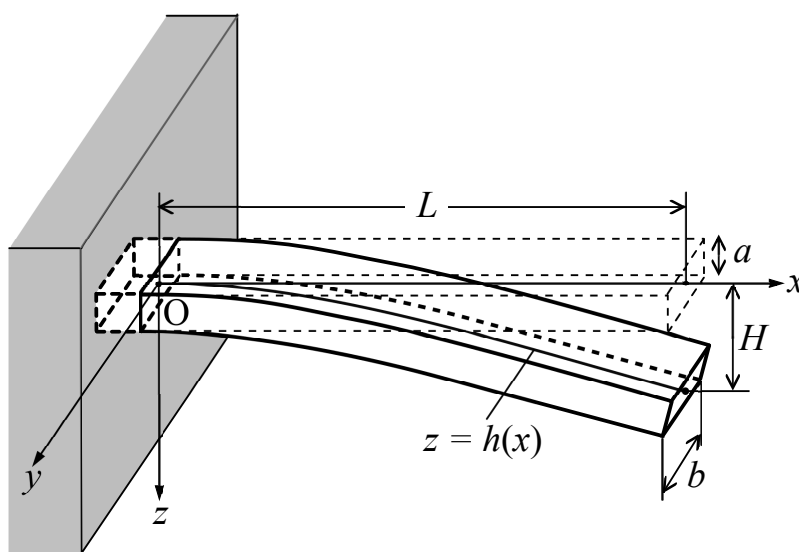


図 1: 自重によって曲げられた棒．水平右向きに x 軸，水平手前向きに y 軸，鉛直下向きに z 軸をとる．棒の中心軸の z 方向の変位を $h(x)$ で表す．

- まず，棒の曲げ変形によって生じるひずみと応力について考える． x 軸に沿った任意の微小区間 $[x, x + dx]$ では，曲線 $z = h(x)$ は円弧で近似できる．この円弧の曲率半径を R とすると，棒の曲げが小さい場合には，近似的に次の関係が成り立つ．

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (5-1)$$

棒の曲げによる，軸方向の伸びひずみを調べるために，位置 x と $x + dx$ の断面にはさまれた棒の微小領域を， xz 平面で切断した様子を図 2 に示す．図 2(a) が変形前，図 2(b) が変形後である．図 2(a) の線分 PP' は棒の中心軸上にあり，その長さは dx に等しい．また，線分 QQ' は中心軸に平行である．この線分の位置を表すために，点 P を原点として，点 P を通る断面に沿って上向きの座標 r を導入する．線分 PP' は中心軸上にあるため，変形後に曲率半径 R の円弧になるが，長さは変わらず dx のままである．一方，線分 QQ' が変形した後の弧の長さは **A1** である．したがって，この弧の伸びひずみは

$$\varepsilon(r) = \text{A2} \quad (5-2)$$

であることがわかる．

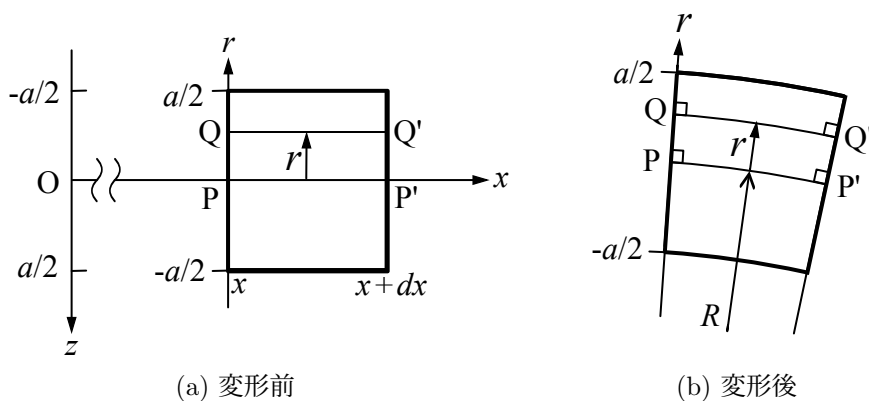


図 2: 位置 x と $x + dx$ の断面にはさまれた棒の微小領域．

ひずみがわかれば，フックの法則から応力を求めることができる．図 2(b) の微小領域より左側にある棒の部分から，微小領域の点 Q の近傍に作用する法線応力を $\sigma(r)$ とする．ただし，この応力が左向き（微小領域から見て外向き）のときに $\sigma(r) > 0$ とする．すると，フックの法則と式 (5-2) から，次の結果が得られる．

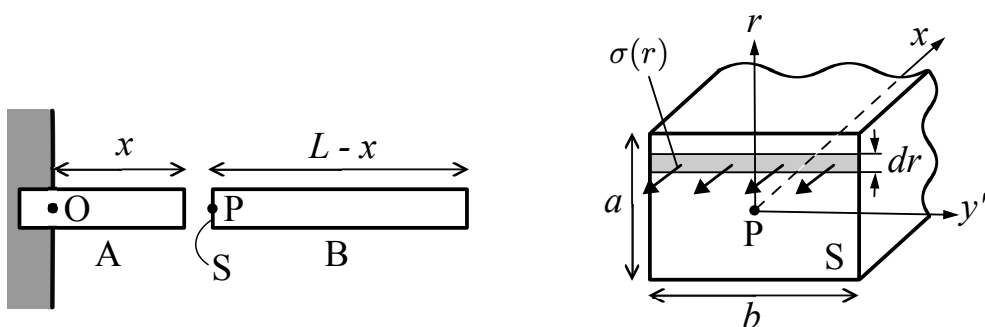
$$\sigma(r) = \text{A3} \quad (5-3)$$

A1～**A3** の解答群

- | | | | |
|--------------------|-------------------|-----------------------|----------------------|
| ① dx | ② $r + dx$ | ③ $\frac{r}{R} dx$ | ④ $\frac{R+r}{R} dx$ |
| ⑤ $\frac{dx}{R}$ | ⑥ $\frac{r}{R}$ | ⑦ $\frac{r^2}{R^2}$ | ⑧ $\frac{R+r}{R}$ |
| ⑨ $E \frac{dx}{R}$ | ⑩ $E \frac{r}{R}$ | ⑪ $E \frac{r^2}{R^2}$ | ⑫ $E \frac{R+r}{R}$ |
| ⑬ $\frac{dx}{ER}$ | ⑭ $\frac{r}{ER}$ | ⑮ $\frac{r^2}{ER^2}$ | ⑯ $\frac{R+r}{ER}$ |

2. 棒が自重により変形して静止した状態では、棒の任意の部分に作用する力およびトルク（力のモーメント）はつり合っている．この条件を使って棒の変位 $h(x)$ に対する方程式を求めよう．そのために、図 3(a) のように、壁からの距離が x の位置にある断面によって、棒を左部分 A（長さ x ）と右部分 B（長さ $L - x$ ）に分けて、B 側の断面を S とする．そして、B に作用する力とトルクを考察する．図 3(b) には、B の断面 S 付近の拡大図を示す．この断面の中心 P を原点として、断面に沿って上向きに r 軸を取り（図 2 と同様）、 y 軸と平行に y' 軸をとる．ここでは、棒の傾きは小さい ($|dh/dx| \ll 1$) と仮定しているので、近似的に、棒の中心軸は x 軸に平行であり、 r 軸は x 軸に垂直であると見なしてよい．

右部分 B の重心には、大きさが $W = \boxed{\text{A4}}$ で鉛直下向きの重力が作用する．また、B の断面 S には A から法線応力とせん断応力が作用する．右部分 B に作用する力のつり合いから、せん断応力を断面全体にわたって積分して得られるせん断力は、 $\boxed{\text{A5}}$ で、大きさが W であることがわかる．点 P における、棒の中心軸の曲率半径を R とすると、位置 r における法線応力 $\sigma(r)$ は式 (5-3) で与えられる．



(a) 棒の左部分 A と右部分 B

(b) 右部分 B の断面 S 付近の拡大図

図 3: 棒を二つの部分 A と B に分ける．

$\boxed{\text{A4}} \sim \boxed{\text{A5}}$ の解答群

- | | | | |
|---------------|---------------|-------------------|---------|
| ① $abL\rho g$ | ② $abx\rho g$ | ③ $ab(L-x)\rho g$ | ④ Mg |
| ⑤ 鉛直上向き | ⑥ 鉛直下向き | ⑦ 水平右向き | ⑧ 水平左向き |

棒の右部分 B に作用する力の、 y' 軸のまわりのトルクのつり合いについて考える．ただし、 y' 軸の正の側から見て、反時計回りのトルクを正、時計回りのトルクを負とする．まず、重力によるトルク N_W を計算すると次式のようなになる．

$$N_W = \boxed{\text{A6}} \quad (5-4)$$

また、せん断力によるトルク N_τ は

$$N_\tau = \boxed{\text{A7}} \quad (5-5)$$

である．そして，法線応力によるトルクは以下のように計算できる．断面 S 上で， r の値が r から $r + dr$ までの微小幅の領域（図 3(b) の灰色部分）に作用する法線応力によるトルクは $dN_\sigma = \boxed{\text{A8}} dr$ である．断面全体に作用する法線応力によるトルク N_σ は， $\boxed{\text{A8}}$ を $r = -a/2$ から $r = a/2$ まで積分することで得られる．

$$N_\sigma = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\boxed{\text{A8}} \right) dr = \boxed{\text{A9}} \quad (5-6)$$

$\boxed{\text{A6}} \sim \boxed{\text{A7}}$ の解答群

- | | | | |
|---------|---------------|--------------------|--------------------------|
| ① LW | ② $(L - x)W$ | ③ $\frac{1}{2}LW$ | ④ $\frac{1}{2}(L - x)W$ |
| ⑤ $-LW$ | ⑥ $-(L - x)W$ | ⑦ $-\frac{1}{2}LW$ | ⑧ $-\frac{1}{2}(L - x)W$ |
| ⑨ aW | ⑩ bW | ⑪ $\frac{1}{2}aW$ | ⑫ $\frac{1}{2}bW$ |
| ⑬ $-aW$ | ⑭ $-bW$ | ⑮ $-\frac{1}{2}aW$ | ⑯ $-\frac{1}{2}bW$ |
| ⑰ 0 | | | |

$\boxed{\text{A8}} \sim \boxed{\text{A9}}$ の解答群

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| ① $ar\sigma(r)$ | ② $br\sigma(r)$ | ③ $-ar\sigma(r)$ | ④ $-br\sigma(r)$ |
| ⑤ $\frac{Ea^4}{12R}$ | ⑥ $\frac{Ea^3b}{12R}$ | ⑦ $-\frac{Ea^4}{12R}$ | ⑧ $-\frac{Ea^3b}{12R}$ |

棒の右部分 B に作用するトルクのつり合い条件 $N_W + N_\tau + N_\sigma = 0$ に式 (5-4)～(5-6) を代入し，さらにこの式に含まれる R と W に式 (5-1) と $\boxed{\text{A4}}$ を代入して整理すると， $h(x)$ に対する次の微分方程式が得られる．

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \boxed{\text{AX}} \times \boxed{\text{B1}} \quad (5-7)$$

この方程式と式 (5-1)，(5-2) から，棒の伸びひずみは， $x = \boxed{\text{B2}}$ ， $r = \boxed{\text{B3}}$ において，最大になることがわかる．

$\boxed{\text{AX}}$ の解答群

- | | | | |
|--------------------------|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| ① $\frac{6\rho g}{Ea^2}$ | ② $\frac{12L\rho g}{Ea^2}$ | ③ $-\frac{6\rho g}{Ea^2}$ | ④ $-\frac{12L\rho g}{Ea^2}$ |
|--------------------------|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|

$\boxed{\text{B1}} \sim \boxed{\text{B3}}$ の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------|-------|
| ① $(L - x)$ | ② $(L - x)^2$ | ③ a | ④ b | ⑤ L |
| ⑥ $\frac{a}{2}$ | ⑦ $\frac{b}{2}$ | ⑧ $\frac{L}{2}$ | ⑨ 0 | |

3. 微分方程式 (5-7) を解いて、棒の変位 $h(x)$ を求めよう．この式を x で 2 回積分すると、二つの積分定数 C_1 と C_2 を含む、次の結果が得られる．

$$h(x) = \boxed{\text{AX}} \left(\boxed{\text{B4}} + C_1x + C_2 \right)$$

棒は壁で水平に固定されているので、 $x = 0$ において、 $h = 0$, $\frac{dh}{dx} = 0$ でなければならない．これらの条件から、

$$C_1 = \boxed{\text{B5}}, \quad C_2 = \boxed{\text{B6}}$$

が得られる．この結果から、棒の先端の変位 $H = h(L)$ は次のようになることがわかる．

$$H = \boxed{\text{B7}} \quad (5-8)$$

B4 の解答群

- | | |
|--|---|
| ① $-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}Lx^2$ | ② $-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}Lx^2$ |
| ③ $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}Lx^3 + \frac{1}{2}L^2x^2$ | ④ $\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}Lx^3 + \frac{1}{2}L^2x^2$ |

B5～**B7** の解答群

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| ① L | ② L^2 | ③ L^3 | ④ L^4 |
| ⑤ $-L$ | ⑥ $-L^2$ | ⑦ $-L^3$ | ⑧ $-L^4$ |
| ⑨ $\frac{\rho g L^4}{2Ea^2}$ | ⑩ $\frac{3\rho g L^4}{2Ea^2}$ | ⑪ $\frac{4\rho g L^4}{Ea^2}$ | ⑫ $\frac{6\rho g L^4}{Ea^2}$ |
| ⑬ 0 | | | |

ここで例として、密度 $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ の鋼を材料とする、 $a = b = 1.00 \text{ cm}$ 、 $L = 1.00 \text{ m}$ の棒を考える．重力加速度の大きさを $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ として、式 (5-8) を使って、この棒の先端の変位を計算すると、 $H = \boxed{\text{B8}} \text{ mm}$ となる．

B8 の解答群

- | | | | |
|----------|---------|--------|--------|
| ① 0.055 | ② 0.55 | ③ 5.5 | ④ 55 |
| ⑤ 0.0147 | ⑥ 0.147 | ⑦ 1.47 | ⑧ 14.7 |

(空白ページ)

大問 6 (化学①)

必要があれば，以下の数値を使うこと．

$$\text{プランク定数 } h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\text{電子の質量 } m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{電気素量 } e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{真空中での光速 } c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{ボルツマン定数 } k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$\text{アボガドロ定数 } N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$hc = 1.99 \times 10^{-25} \text{ J m} \quad 1 \text{ J} = 0.239 \text{ cal}$$

$$1/\sqrt{2} = 0.707$$

$$1/\sqrt{3} = 0.577$$

$$1/\sqrt{5} = 0.447$$

1. 電磁波のエネルギーの吸収・放出に関連する以下の文中の空欄 **A1** から **A4** のそれぞれに最も適した値を，下の選択肢①～⑳の中から1つ選べ．

太陽光の紫外可視スペクトルは $\lambda = 500 \text{ nm}$ あたりにピークを持ち，地上に降り注ぐ可視部のエネルギーは 1 m^2 ， 1 s あたり約 0.50 kJ である． $\lambda = 500 \text{ nm}$ の光子 1 個あたりのエネルギーは **A1** J であるから，太陽光の可視部の波長を 500 nm で近似的に置きかえると， 0.50 kJ は光子 **A2** 個分と見積もれる．ここで，この光エネルギー 0.50 kJ をすべて常温の水 1 L の加熱に使うことができたと仮定する．水 1 g を温度 1 K 上げるために必要な熱量が 1 cal であることを使うと，水温は **A3** K 上昇することになる．この温度上昇に対して水 1 分子が得た平均エネルギーは，水 1 L がおよそ **A4** 個の水分子を含んでいることを考えると， 500 nm の光子 4×10^{-5} 個分に相当する．

- | | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① 3.3×10^{25} | ② 6.0×10^{24} | ③ 1.2×10^{24} | ④ 2.6×10^{23} | ⑤ 1.5×10^{23} |
| ⑥ 2.6×10^{21} | ⑦ 1.3×10^{21} | ⑧ 1.0×10^{20} | ⑨ 8.0×10^{19} | ⑩ 4.0×10^{19} |
| ⑪ 7.0×10^{13} | ⑫ 8.0×10^{-16} | ⑬ 8.0×10^{-17} | ⑭ 8.0×10^{-19} | ⑮ 4.0×10^{-19} |
| ⑯ 4.8 | ⑰ 2.4 | ⑱ 1.2 | ㉑ 0.24 | ㉒ 0.12 |

2. 以下の文中の **A5** から **A8** のそれぞれに最も適した語句や数値を，下の①～⑭の中から1つ選べ．同じ選択肢を複数回選んでもよい．

原子核が原子中の電子に及ぼす静電場は，着目している電子より内側の電子殻や同一殻に存在する電子によって遮蔽される．遮蔽効果を原子番号 Z に組み込んだ有効核電荷数 Z^* を使うと，主量子数 n の原子軌道のエネルギー E_n は水素様原子のエネルギーの式で近似でき，eV 単位では，次のように表せる．

$$E_n = -13.6 Z^{*2} / n^2 \quad (1)$$

たとえば，Na の最外殻電子は $n =$ **A5** の軌道を占めている．同一殻にある電子の遮蔽効果は **A6** ，同周期内では Z の増加に対して Z^* は **A7** ．したがって，同周期の中では，原子の第1イオン化エネルギーは Z の増加に対して **A8** 傾向を示す．

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3
- ⑥ 4 ⑦ ほぼ一定になる ⑧ 増大する ⑨ 減少する ⑩ 減少後増大する
- ⑪ そのすぐ内側の電子殻にある電子のものとほぼ同じであり
- ⑫ そのすぐ内側の電子殻にある電子のほぼ2倍あり
- ⑬ それより内殻の電子のものより小さく
- ⑭ それより内殻の電子のものより大きく

3. ブタジエンの π 分子軌道 ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 を図 1 に示す. ϕ_1 がエネルギーが一番低い π 分子軌道である. 図中の炭素 C_j ($j = 1 - 4$) の $2p_z$ 原子軌道を記号 χ_j で表すと, ϕ_1 の図は ϕ_1 が $0.372\chi_1 + 0.602\chi_2 + 0.602\chi_3 + 0.372\chi_4$ であることを示している. ブタジエンの最もエネルギーが低い安定な電子状態に対する以下の設問(1)~(3)に答えよ.

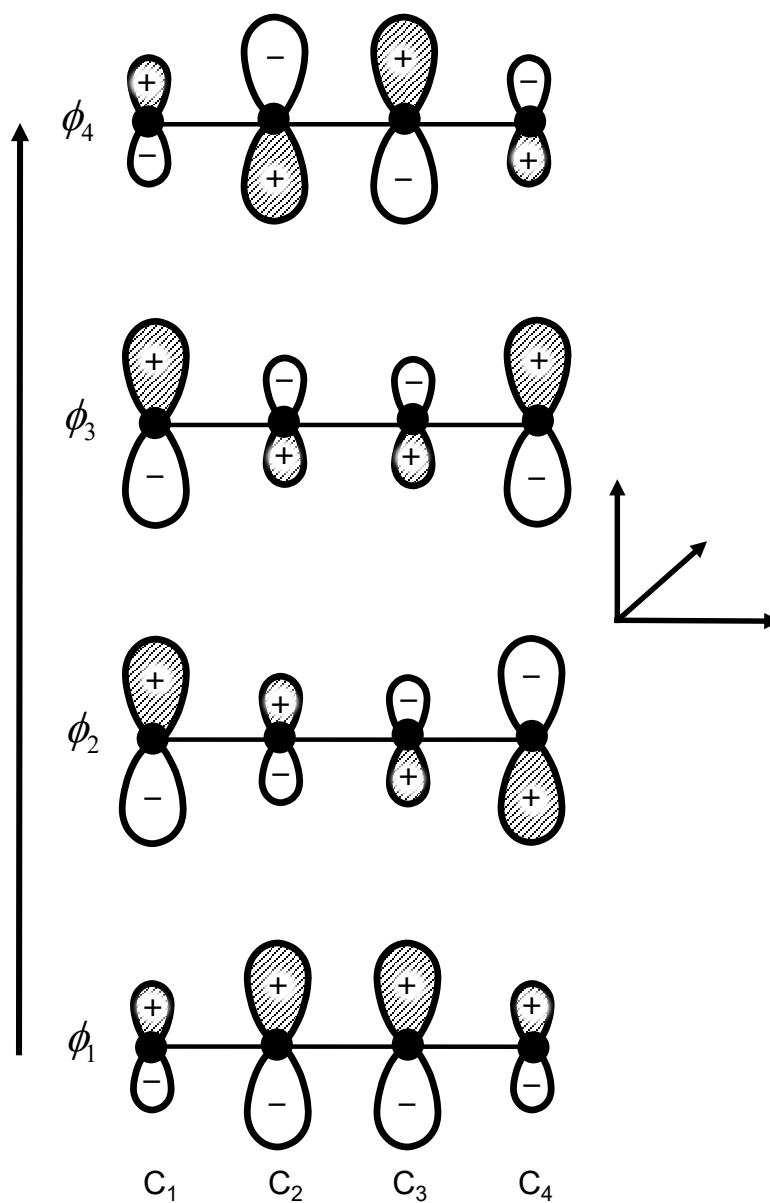


図 1 ブタジエンの π 分子軌道 ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 をエネルギーが低いものから並べたもの. 図中の C_j は j 番目の炭素原子 $\bullet$ を表している.

(1) ブタジエンの炭素間結合長に関する (a)から(d)の記述について、正誤の正しい組み合わせを①～⑯の中から 1 つ選んで **A9** に答えよ。選択肢の表中で、○印は適切な記述を、×印は誤った記述を指しているものとする。

- (a) π 電子は炭素原子間を自由に行き来するので、 C_1-C_2 , C_2-C_3 , C_3-C_4 結合の長さはすべて等しい。
 (b) C_2-C_3 の結合長は、エタンの炭素間のものより短い。
 (c) 末端の炭素原子 C_1 は sp^2 混成軌道を形成し、内側の C_2 は sp^3 混成軌道を形成している。
 (d) ϕ_2 に電子が入ると、 C_2 と C_3 の隣り合う $2p_z$ 原子軌道の+と-の電荷が引き合って C_2-C_3 結合を短くする。

	(a)	(b)	(c)	(d)
①	○	○	○	○
②	×	○	○	○
③	○	×	○	○
④	○	○	×	○
⑤	○	○	○	×
⑥	×	×	○	○
⑦	×	○	×	○
⑧	×	○	○	×

	(a)	(b)	(c)	(d)
⑨	○	×	×	○
⑩	○	×	○	×
⑪	○	○	×	×
⑫	×	×	×	○
⑬	×	×	○	×
⑭	×	○	×	×
⑮	○	×	×	×
⑯	×	×	×	×

(2) 4 電子を π 分子軌道 4 個に入れた電子配置①～④の中で、最もエネルギーが低い電子状態を表すものを選べ。 **AX**

- ① 各 π 分子軌道に電子が 1 つずつ入った配置 ② ϕ_1 と ϕ_2 に電子 2 個ずつ入った配置
 ③ ϕ_3 と ϕ_4 に電子 2 個ずつ入った配置 ④ ϕ_1 に電子 4 個すべて入った配置

(3) 以下の2式の右边が表している π 分子軌道を①～④の中から選べ。

$$\text{B1} = 0.372\chi_1 - 0.602\chi_2 + 0.602\chi_3 - 0.372\chi_4 \quad (1)$$

$$\text{B2} = 0.602\chi_1 - 0.372\chi_2 - 0.372\chi_3 + 0.602\chi_4 \quad (2)$$

① ϕ_1

② ϕ_2

③ ϕ_3

④ ϕ_4

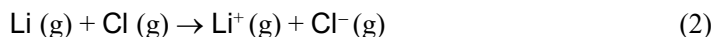
4. イオン a とイオン b の間にはクーロン引力あるいは反発力が働き、その大きさはそれぞれのイオンの電荷数 z_a と z_b 及び両者の中心間の距離 R_{ab} で決まる．対応するクーロンエネルギー $E_C(z_a, z_b, R_{ab})$ は、 kJ mol^{-1} 単位では、次のように表せる (R_{ab} は m 単位) ．

$$E_C(z_a, z_b, R_{ab}) = \frac{138.9 \times 10^{-6} z_a z_b}{R_{ab}} \quad (1)$$

このクーロンエネルギーが支配的な役割を果たしているイオン結合性分子とイオン結晶に関連した以下の設問(1)と(2)に答えよ．

- (1) B3 から B9 に最も適した語句や数値・記号を、①～⑱の中から1つ選べ．同じ選択肢を複数回選んでもよい．

Li と Cl 及びそれらのイオンのイオン化エネルギーを表 1 にまとめる．1 価陰イオンのイオン化エネルギーとは、1 価陰イオンを中性原子にするために必要なエネルギーである． 100 kJ mol^{-1} は、原子あるいはイオン 1 個あたりに換算すると B3 eV に相当する．表 1 から、次の中性原子をイオンにする反応は吸熱反応で、 $\Delta E =$ B4 kJ mol^{-1} の熱量を必要とすることがわかる．



ただし、g は気体状態を表し、原子間（イオン間）の相互作用はないとしている．次に、LiCl 分子をクーロン引力のみで結びついた分子と考え、LiCl の平衡核間距離 $R_e = 0.202 \text{ nm}$ を(1)式の R_{ab} に代入すると、 $E_C(z_{\text{Li}^+}, z_{\text{Cl}^-}, R_e) = -$ B5 kJ mol^{-1} となる． Li^+ の電荷数 z_{Li^+} は+1、 Cl^- の電荷数 z_{Cl^-} は-1として計算している．LiCl が中性の Li と Cl に解離するのに要するエネルギー D_e は、次式で近似的に見積もることができる．

$$D_e = \text{B6} E_C(z_{\text{Li}^+}, z_{\text{Cl}^-}, R_e) \text{B7} \Delta E \quad (3)$$

この計算値は B8 の効果を考慮していないので、実測の D_e よりも B9 ．

	Li	Li ⁻	Li ⁺	Cl	Cl ⁻	Cl ⁺
イオン化エネルギー	520	60	7300	1300	350	2300

6-6

- (2) **BX** から **C4** に最も適した数値を、①～⑩の中から1つ選べ。同じ選択肢を複数回選んでもよい。

塩化ナトリウム型結晶中の N 個のイオン対からなる立方体セルを考える。ここで、図 2 に示したような単位格子の $1/8$ を切り出した $N=4$ の場合のクーロンエネルギーを計算する。 r_+ と r_- をそれぞれ電荷数 z_+ の陽イオンと電荷数 z_- の陰イオンのイオン半径とすると、注目した陽イオン **a** と周囲の 4 個の陰イオン **b** から **e** との静電的な引力エネルギーは、(1)式を使って、次のように表せる。

$$E_A = \frac{138.9 \times 10^{-6} z_+ z_-}{r_+ + r_-} \left(\text{BX} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (4)$$

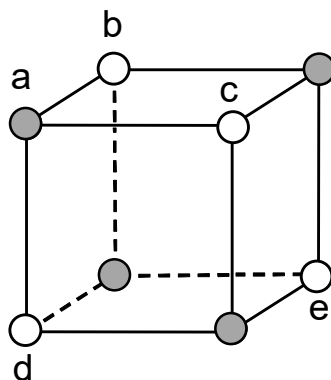


図 2 塩化ナトリウム型結晶の単位格子の $1/8$. ●は陽イオン, ○は陰イオンを表しており、全体では電気的に中性である。

同種イオン間の距離は $r_+ + r_-$ の **C1** 倍であるから、陽イオン **a** と図 2 中の他の陽イオン 3 個との反発エネルギーは次式で与えられる。

$$E_R = \frac{138.9 \times 10^{-6} z_+ z_+}{r_+ + r_-} \frac{3}{\text{C1}} = - \frac{138.9 \times 10^{-6} z_+ z_-}{r_+ + r_-} \frac{3}{\text{C1}} \quad (5)$$

ここで、 $z_+ + z_- = 0$ の関係を使った。次に、イオン対 4 個からなる全系の静電エネルギー E_4 を得るため、 $E_A + E_R$ にイオンの数を乗じたのち、静電相互作用が重複して数えられていることを考慮して **C2** で除する。

$$E_4 = 4 \frac{138.9 \times 10^{-6} z_+ z_-}{r_+ + r_-} \left[\left(\text{BX} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{3}{\text{C1}} \right] \quad (6)$$

一般に、 N 個のイオン対の静電エネルギーは

$$E_N = N \frac{138.9 \times 10^{-6} z_+ z_-}{r_+ + r_-} \alpha_N \quad (7)$$

と表すことができる．十分大きな数の N に対する α_N はイオン結晶の静電エネルギーが $NE_c(z_+, z_-, r_+ + r_-)$ の何倍かを表すマードリング定数とよばれる量で，結晶構造に固有の値である．塩化ナトリウム型では，中性の立方体を表 2 のように大きくしていくと， α_N は 1.748 に収束していく．

表 2 塩化ナトリウム型結晶中の立方体のイオン対の数 N と α_N

N	4 (1/8 単位格子 の立方体)	32 (1/8 単位格子 の 3^3 倍立方体)	108 (1/8 単位格子 の 5^3 倍立方体)
α_N	C3	1.752	1.747

表 3 の値を(7)式に代入すると，塩化ナトリウム型構造の MgO 結晶の静電エネルギーは LiCl 結晶の約 **C4** 倍と見積もられる．静電エネルギーの大きな MgO の融点は 2830°C にも達する．

表 3 各種イオンのイオン半径 (nm)

イオン	Mg^{2+}	Li^+	O^{2-}	Cl^-
イオン半径	0.086	0.090	0.126	0.167

- | | | | | |
|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|
| ① 0.64 | ② 0.96 | ③ 1.28 | ④ 1.46 | ⑤ 1.64 |
| ⑥ 1.80 | ⑦ 2 | ⑧ 2.56 | ⑨ 3 | ⑩ 3.30 |
| ⑪ 4 | ⑫ 5 | ⑬ 6 | ⑭ 8 | ⑮ $\sqrt{2}$ |
| ⑯ $1/\sqrt{2}$ | ⑰ $\sqrt{3}$ | ⑱ $1/\sqrt{3}$ | ⑲ $\sqrt{5}$ | ⑳ $1/\sqrt{5}$ |

大問 7 (化学②)

以下の問に答えよ。ただし、特に指定しない場合は、絶対温度、体積、圧力をそれぞれ T , V , P で表す。同様に、熱、仕事をそれぞれ q , w で、エンタルピー、エントロピー、内部エネルギー、ギブズエネルギーをそれぞれ H , S , U , G で表わす。また、モル定圧熱容量、モル定容熱容量をそれぞれ C_p , C_v で表わし、気体定数は R とする。

1. 化学反応に伴う反応熱について考える。空欄 A1 ～ B1 にあてはまる最も適切な語句または数値を、選択肢からそれぞれ 1 つずつ選べ。

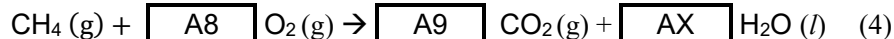
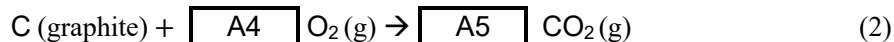
反応が一定圧力のもとで行われるとき、定圧反応熱 q_p は以下のように表わされる。

$$q_p = H_2(\text{生成系}) - H_1(\text{反応系}) = \Delta H \quad (1)$$

$H_2 < H_1$ のときは $\Delta H < 0$ で A1 反応であり、 $H_2 > H_1$ のときは $\Delta H > 0$ で A2 反応である。

反応系 A から出発して最終的な生成系 B に至る経路が複数あり、各経路がいくつかの中間段階からなるとき、各経路における ΔH の代数和はいずれの経路を選択しても同じとなる。これを A3 の法則という。

ここで、グラファイト、水素、メタンの燃焼について考える。物質 1 mol のグラファイト、水素、メタンが一定圧力下で完全燃焼した際の反応式は以下のように表すことができ、エンタルピー変化はそれぞれ -394 kJ mol^{-1} , -286 kJ mol^{-1} , -890 kJ mol^{-1} であった。



以下の反応で、1 mol のメタンが生成する際のエンタルピー変化は B1 kJ mol^{-1} である。



A1 , **A2**

① 発熱

② 吸熱

A3

① Arrhenius

② Gibbs-Helmholtz

③ Clausius-Clapeyron

④ Charles

⑤ Dalton

⑥ van't Hoff

⑦ Hess

⑧ Henry

A4 ~ **AX**

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

⑥ $\frac{1}{4}$

⑦ $\frac{1}{3}$

⑧ $\frac{1}{2}$

B1

① -1570

② -470

③ -210

④ -76

⑤ 76

⑥ 210

⑦ 470

⑧ 1570

2. エントロピー変化について、下記の(1), (2)の設問において空欄 ～ にあてはまる最も適切な数式または語句を、選択肢からそれぞれ1つずつ選べ。

(1) 理想気体の等温体積変化について考える。その際の内部エネルギー変化は、熱力学第一法則から以下の式で表わせる。

$$dU = \text{ } \quad (1)$$

等温では であるから、 となる。

また、エントロピー変化は $dS = \frac{\delta q}{T}$ であるので、気体 n (mol) については次式が得られる。

$$dS = \text{ } = \text{ } \quad (2)$$

体積が V_1 から V_2 、圧力が P_1 から P_2 に変化するとき、エントロピー変化 ΔS を積分によって求めることができる。

$$\Delta S = \text{ } = \text{ } \quad (3)$$

気体が膨張するときは または であるから、気体が膨張するときエントロピーは 。

B2

- ① $-\delta q - PdV$ ② $-\delta q + PdV$ ③ $\delta q - PdV$ ④ $\delta q + PdV$
 ⑤ $-\delta q - VdP$ ⑥ $-\delta q + VdP$ ⑦ $\delta q - VdP$ ⑧ $\delta q + VdP$

B3

- ① $dV = 0$ ② $dP = 0$ ③ $dH = 0$
 ④ $dS = 0$ ⑤ $dU = 0$ ⑥ $dG = 0$

B4

- ① $\delta q = -PdV$ ② $\delta q = PdV$ ③ $\delta q = -VdP$ ④ $\delta q = VdP$
 ⑤ $dU = -PdV$ ⑥ $dU = PdV$ ⑦ $dU = -VdP$ ⑧ $dU = VdP$

B5**B6**

- ① $-\frac{PdV}{T}$ ② $\frac{PdV}{T}$ ③ $-\frac{VdP}{T}$ ④ $\frac{VdP}{T}$
 ⑤ $-R\left(\frac{dV}{V}\right)$ ⑥ $R\left(\frac{dV}{V}\right)$ ⑦ $-R\left(\frac{dP}{P}\right)$ ⑧ $R\left(\frac{dP}{P}\right)$
 ⑨ $-nR\left(\frac{dV}{V}\right)$ ⑩ $nR\left(\frac{dV}{V}\right)$ ⑪ $-nR\left(\frac{dP}{P}\right)$ ⑫ $nR\left(\frac{dP}{P}\right)$

B7**B8**

- ① $R\ln\frac{V_1}{V_2}$ ② $R\ln\frac{V_2}{V_1}$ ③ $nR\ln\frac{V_1}{V_2}$ ④ $nR\ln\frac{V_2}{V_1}$
 ⑤ $R\ln\frac{P_1}{P_2}$ ⑥ $R\ln\frac{P_2}{P_1}$ ⑦ $nR\ln\frac{P_1}{P_2}$ ⑧ $nR\ln\frac{P_2}{P_1}$

B9**BX**

- ① $V_1 < V_2$ ② $V_1 = V_2$ ③ $V_1 > V_2$
 ④ $P_1 < P_2$ ⑤ $P_1 = P_2$ ⑥ $P_1 > P_2$

C1

- ① 減少する ② 変化しない ③ 増大する

(2) 圧力一定のもとで n (mol) の物質を加熱した場合，すなわち外界から δq の熱が入ってきたとき，物質の温度上昇を dT とすると以下の式が成り立つ．

$$\delta q = \boxed{\text{C2}} \quad (4)$$

物質の温度変化に伴うエントロピー変化を考えてみると次式が成り立つ．

$$dS = \frac{\delta q}{T} = \frac{1}{T} (\boxed{\text{C2}}) \quad (5)$$

物質の温度が T_1 から T_2 に変化したとすれば，積分により次式が得られる．

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} (\boxed{\text{C2}}) \quad (6)$$

モル熱容量が T_1 から T_2 の間で一定とみなせる場合は次式で表わせる．

$$\Delta S = \boxed{\text{C3}} \quad (7)$$

加熱の場合は $T_1 < T_2$ であるから，エントロピーは $\boxed{\text{C4}}$ ．

C2

- | | | | |
|-------------|------------|--------------|-------------|
| ① $-C_p dT$ | ② $C_p dT$ | ③ $-nC_p dT$ | ④ $nC_p dT$ |
| ⑤ $-C_V dT$ | ⑥ $C_V dT$ | ⑦ $-nC_V dT$ | ⑧ $nC_V dT$ |

C3

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| ① $C_p \ln \frac{T_1}{T_2}$ | ② $C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$ | ③ $nC_p \ln \frac{T_1}{T_2}$ | ④ $nC_p \ln \frac{T_2}{T_1}$ |
| ⑤ $C_V \ln \frac{T_1}{T_2}$ | ⑥ $C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$ | ⑦ $nC_V \ln \frac{T_1}{T_2}$ | ⑧ $nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$ |

C4

- | | | |
|--------|---------|--------|
| ① 減少する | ② 変化しない | ③ 増大する |
|--------|---------|--------|

3. 空欄 C5 ～ CX にあてはまる最も適切な語句，数式または数値を，選択肢からそれぞれ1つずつ選べ．

成分数 n からなる不均一系が平衡状態にあるときは，温度，圧力および各成分の化学ポテンシャルは，すべての相で同じである．自由度 f は次式で表わせることを C5 が導いた．ここで，(1) 式において L は相の数である．

$$f = \text{ C6 } \quad (1)$$

2 成分系の状態変数は，温度，圧力のほかに組成を表わす変数が加わる．一定圧力下における A, B の 2 成分系状態図の一例として下図のように表すことができる．ここで，本状態図において存在する相は，液相 (l 相)，A に B が少量含まれる固相 (α 相)，B に A が少量含まれる固相 (β 相) の 3 つである．

組成 x_1 の液相を温度 T_1 から T_2 に冷却し， T_2 に保持した場合の平衡相は x_a の組成の α 相と x_b の組成の l 相の 2 つである．次に， x_2 で T_2 に保持した場合の平衡相は C7 である．さらに， T_3 にまで冷却して保持した場合の平衡相は C8 である．最後に， T_4 にまで冷却して保持した場合の平衡相は C9 である．また，一定圧力のもと， x_2 ， T_3 で平衡に到達させたときの自由度は CX である．

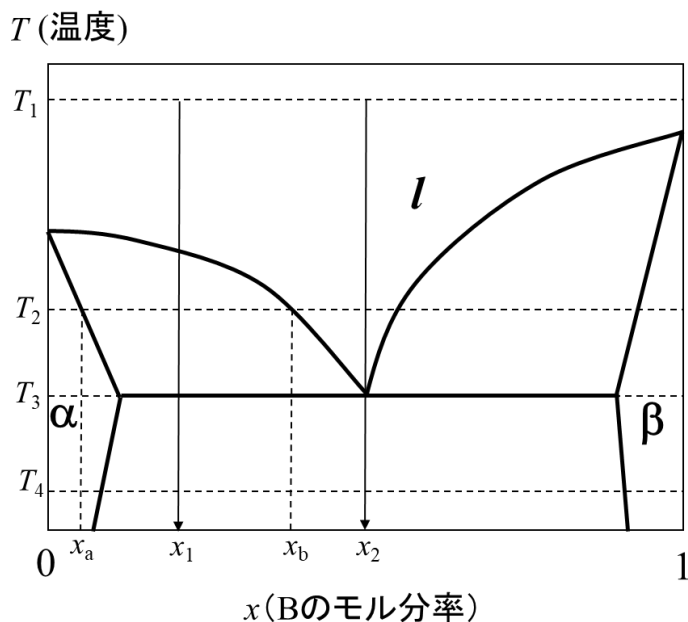


図 一定圧力下における A, B の 2 成分系状態図

C5

- | | | |
|-------------|----------|--------------|
| ① Arrhenius | ② Gibbs | ③ Clausius |
| ④ Charles | ⑤ Dalton | ⑥ van't Hoff |
| ⑦ Hess | ⑧ Henry | |

C6

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| ① $n+L$ | ② $n+1+L$ | ③ $n+2+L$ |
| ④ $n+3+L$ | ⑤ $n-L$ | ⑥ $n+1-L$ |
| ⑦ $n+2-L$ | ⑧ $n+3-L$ | |

C7**C8****C9**

- | | | |
|--------------------------------|--------------------|-------------------------|
| ① l 相 | ② α 相 | ③ β 相 |
| ④ l 相と α 相 | ⑤ l 相と β 相 | ⑥ α 相と β 相 |
| ⑦ l 相と α 相と β 相 | | |

CX

- | | | | |
|-----|-----|------|------|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 |
| ⑤ 5 | ⑥ 0 | ⑦ -1 | ⑧ -2 |

大問 8 (化学③)

1. 下記の(1)～(5)の分子式について、構造異性体の数を、①～⑨のうちからそれぞれ 1 つ 選べ.

(1) C_2H_6O

A1

(2) C_4H_{10}

A2

(3) C_5H_{12}

A3

(4) C_3H_8O

A4

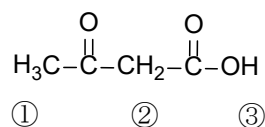
(5) C_6H_{14}

A5

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 7 ⑧ 8 ⑨ 9

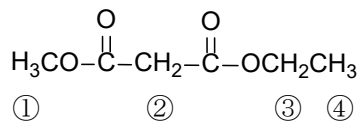
2. 下記の(1)～(3)の化合物について、最も pK_a 値の小さい水素をそれぞれ 1 つ 選べ.

(1)



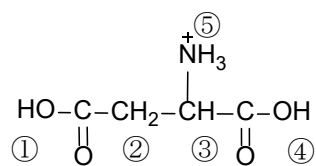
A6

(2)



A7

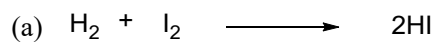
(3)



A8

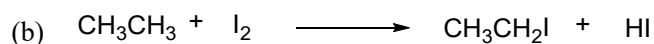
3. 下記の(a)～(c)の反応について、(1)と(2)の問いに答えよ。

(1) 下記の(a)～(c)の反応の反応熱について、適切なものを①～④のうちからそれぞれ1つ選べ。計算には表1の結合解離エネルギーの値を用いよ。



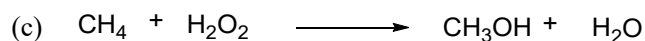
A9

- ① 7 kJ mol^{-1} ② -7 kJ mol^{-1} ③ 291 kJ mol^{-1} ④ -291 kJ mol^{-1}



AX

- ① 44 kJ mol^{-1} ② -44 kJ mol^{-1} ③ 56 kJ mol^{-1} ④ -56 kJ mol^{-1}



B1

- ① 120 kJ mol^{-1} ② -120 kJ mol^{-1} ③ 230 kJ mol^{-1} ④ -230 kJ mol^{-1}

(2) (1)の反応のうち、吸熱反応はどれか。適切なものを①～⑦のうちから1つ選べ。

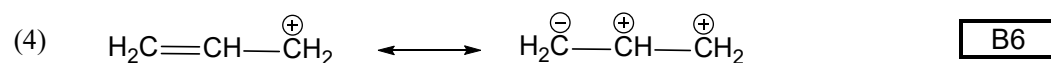
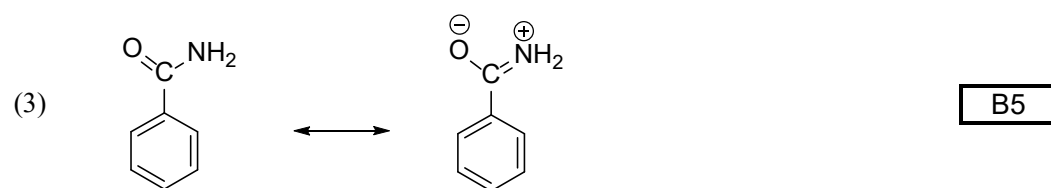
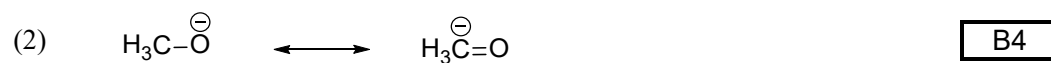
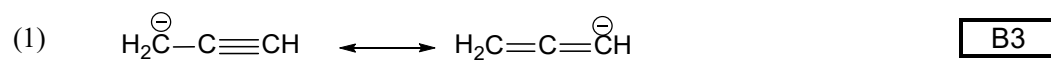
B2

- ① (a) ② (b) ③ (c) ④ (a)と(b)
⑤ (a)と(c) ⑥ (b)と(c) ⑦ (a)と(b)と(c)

表1 種々の結合の結合解離エネルギー

結合	kJ mol^{-1}	結合	kJ mol^{-1}
H-H	436	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{-H}$	423
H-I	298	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{-I}$	234
I-I	153	$\text{CH}_3\text{O-H}$	436
$\text{CH}_3\text{-H}$	439	HO-H	499
$\text{CH}_3\text{-I}$	238	HO-OH	213
$\text{CH}_3\text{-OH}$	383	$\text{HO-CH}_2\text{CH}_3$	393
$\text{CH}_3\text{-CH}_3$	368	HOO-H	376

4. 下記の(1)～(4)の化学種の共鳴構造式について、①と②のうちからふさわしいものをそれぞれ1つ選べ.



① 共鳴構造として適当である

② 共鳴構造として適当でない

5. ハロアルカンに関する以下の問いに答えよ.

(1) 次の①から⑤の化合物のうち, 沸点が一番高い化合物を選べ.

B7

- ① CH_3CH_3 ② $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{F}$ ③ $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$ ④ $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Br}$ ⑤ $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{I}$

(2) 次の①から⑤の位置に置換基を持つジクロロシクロヘキサンについて, 置換基が2つともアキシアルもしくはエクアトリアルをとるものを1つ選べ.

B8

- ① *trans*-1,2 ② *trans*-1,3 ③ *cis*-1,4 ④ *trans*-1,5 ⑤ *cis*-1,6

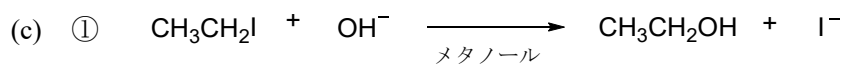
(3) 次の各組の化合物のうち, $\text{S}_\text{N}2$ 反応で OH^- と速く反応するものをそれぞれ1つ選べ.

- (a) ① $(\text{CH}_3)_3\text{CCl}$ ② CH_3Cl

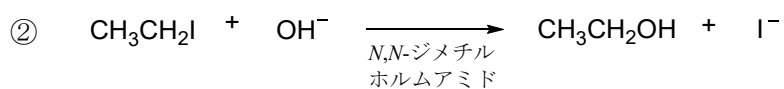
B9

- (b) ① CH_3I ② CH_3Cl

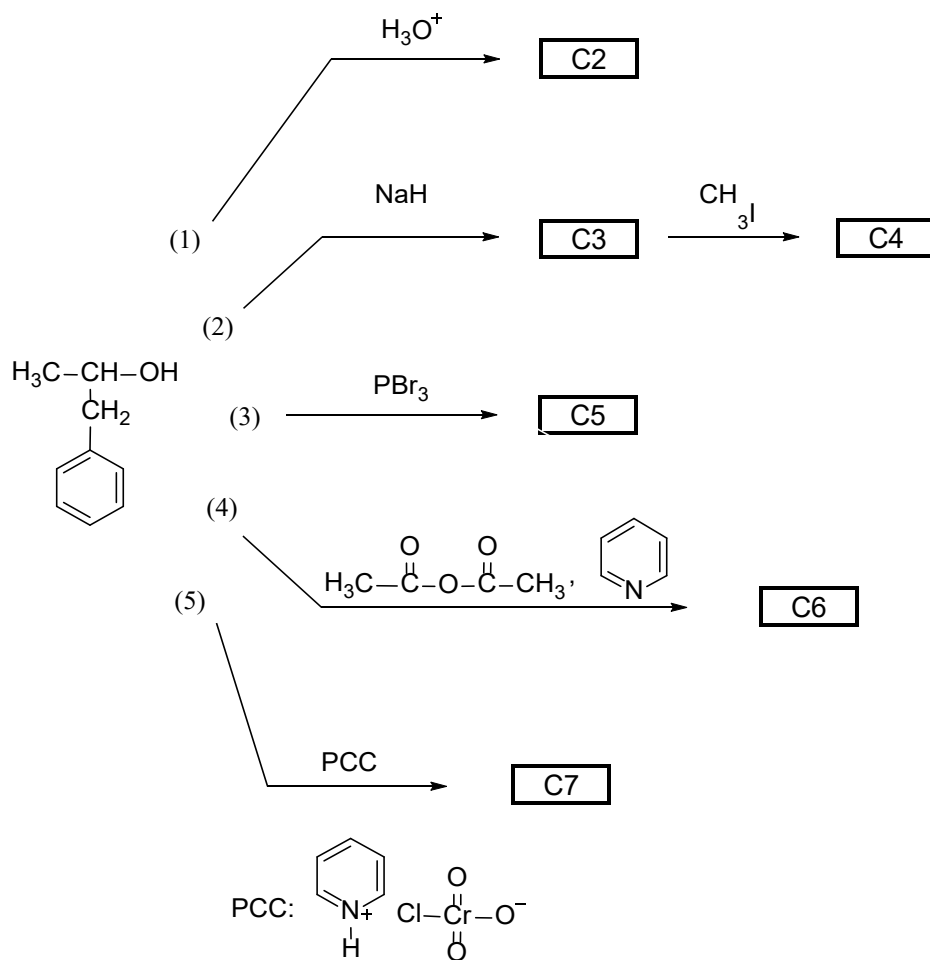
BX



C1



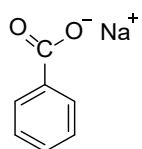
6. 次の化合物が(1)から(5)の各試薬と反応してできる主生成物の化学構造式を、
 選択肢からそれぞれ1つ選べ.



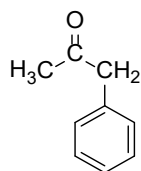
①



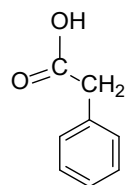
②



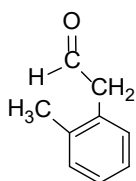
③



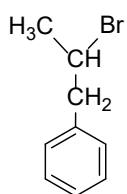
④



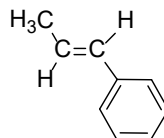
⑤



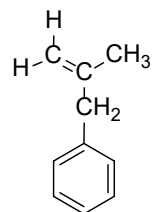
⑥



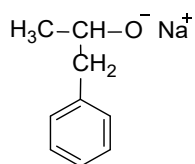
⑦



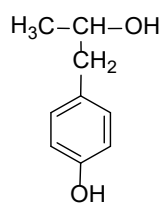
⑧



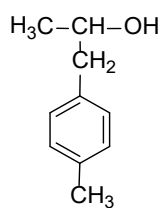
⑨



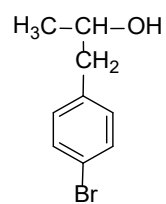
⑩



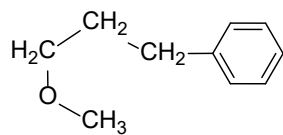
⑪



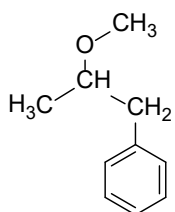
⑫



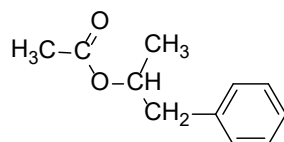
⑬



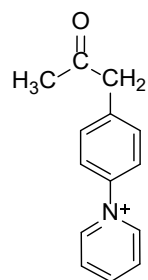
⑭



⑮



⑯



＜試験を終えた学生のみなさんへ＞

統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の 1 年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

＊統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp