

令和 05 年度 統一テスト

(理数基礎学力到達度テスト)

<問題冊子②>選択問題

大問 2 (数学②)

大問 3 (数学③)

大問 4 (物理学①)

大問 5 (物理学②)

大問 6 (化学①)

大問 7 (化学②)

大問 8 (化学③)

試験時間 2 時間

＊解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません＊

【問題を選択する際の注意】

1. 以下の問題選択ルールに従い、大問 7 問のうち 4 問に解答すること.

- a) 物理学、化学からそれぞれ 1 問は解答すること.
- b) 化学を 3 問とも選択することはできない.

2. したがって、選択問題の解答パターンは下記の 4 つのみとなる.

数学 2 問－物理学 1 問－化学 1 問

数学 1 問－物理学 2 問－化学 1 問

数学 1 問－物理学 1 問－化学 2 問

数学 0 問－物理学 2 問－化学 2 問

【解答する際の注意】

- 1. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚 (裏面もあり) を用いること.
- 2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること (マーク式のみの大問もあり).
- 3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は、問題文の **A1**, **A2**, ... にあてはまるものを該当する解答群 (選択肢) から選び、選択肢の番号①, ②... で答えること. 同じ選択肢が複数回あてはまることもある.
- 4. 空欄の中には通常の式では不要な「1」「-1」「0」が当てはまることがある. その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること.
- 5. 問題に関する質問は、汚損で読めない等以外は原則認めない.

大問2（数学②）

次の各問に答えなさい。

1. 4 行 1 列の 5 つの列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ および $\mathbf{b}$ を用い, 4 次正方行列を $A =$

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] \text{ として表示した連立 1 次方程式を } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \ (\mathbf{b} \neq \mathbf{0}), \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ とする.}$$

$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, すなわち 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ においては, その解全体からなる集合 $W = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ は $\mathbf{R}^4$ の部分空間 ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間) となる.

$$\text{ここで, } \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ \alpha + 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \\ \alpha^2 - 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2\alpha - 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(α : 実数) とし, $\text{rank } A$ は係数行列の階数, $\text{rank } [A \mid \mathbf{b}]$ と $\text{rank } [A \mid \mathbf{0}]$ は拡大係数行列の階数, $\dim W$ は解空間の次元を表すものとする.

- (1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について以下の問に答えなさい.

- (i) $\alpha = \boxed{\text{A1}}$ のときは $\text{rank } A = \boxed{\text{A2}}$, $\text{rank } [A \mid \mathbf{b}] = \boxed{\text{A3}}$ となり, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $\boxed{\text{A3}}$.
- (ii) $\alpha \neq \boxed{\text{A1}}$ のときは, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $\boxed{\text{A4}}$. よって, $x = \boxed{\text{A5}}$, $y = \boxed{\text{A6}}$, $z = \boxed{\text{A7}}$, $w = \boxed{\text{A8}}$ となる.

- (2) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ について以下の問に答えなさい.

- (i) $\alpha \neq \boxed{\text{A1}}$ のときは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が $\boxed{\text{A9}}$ であり, $\text{rank } A = \boxed{\text{AX}}$ となるので $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\boxed{\text{B1}}$.
- (ii) $\alpha = \boxed{\text{B2}}$ のときは $\text{rank } [A \mid \mathbf{0}] = \boxed{\text{B3}}$ であり, 解空間の次元は $\dim W = \boxed{\text{B4}}$ である.
- (iii) $\alpha = \boxed{\text{B5}}$ のときは $\text{rank } [A \mid \mathbf{0}] = \boxed{\text{B6}}$, また $\dim W = \boxed{\text{B6}}$ であり, 解空間の基底の組は $\{\boxed{\text{B7}}, \boxed{\text{B8}}\}$ である.

A1, **AX** および **B2** ~ **B6** の解答群 _____

- ① -6 ② -5 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1 ⑥ 0
 ⑦ 1 ⑧ 2 ⑨ 3 ⑩ 4 ⑪ 6 ⑫ ± 1
 ⑬ ± 2 ⑭ ± 3 ⑮ ± 4

A2 および **A5** ~ **A8** の解答群 (s, t : 任意定数) _____

- ① = ② $\neq$ ③ $>$ ④ $\in$ ⑤ -6 ⑥ -4
 ⑦ -2 ⑧ 0 ⑨ 2 ⑩ 4 ⑪ 6 ⑫ s
 ⑬ t ⑭ $-5 + 2s + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 4}t$ ⑮ $-3 + 6s + \frac{1}{\alpha^2 - 9}t$ ⑯ $\frac{1}{\alpha^2 - 1}$
 ⑰ $\frac{1}{1 - \alpha^2}$ ⑱ $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$ ⑲ $\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$ ⑳ $\frac{9 - \alpha^2}{\alpha^2 - 4}$

A3 **A4** **A9** **B1** の解答群 _____

- ① 無数の解をもつ ② ただ1つの解をもつ ③ 自明な解のみをもつ
 ④ 解をもたない ⑤ 1次写像 ⑥ 1次従属 ⑦ 1次独立

B7 **B8** の解答群 _____

- ① $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑤ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 ⑥ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑦ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑩ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 ⑪ $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑫ $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. 逆行列とその線形変換への適用に関する以下の問に答えなさい。

正方行列 B の行列式, 逆行列, 余因子行列をそれぞれ $|B|$, B^{-1} , $\tilde{B}$ とし, また単位行列を I と表した場合, $B\tilde{B} = \tilde{B}B = \boxed{\text{B9}} I$ の関係が成り立つ. B が $\boxed{\text{BX}}$ の場合は $B(\boxed{\text{C1}}) = (\boxed{\text{C1}})B = I$ となるので, 逆行列 B^{-1} の公式が導かれる.

ここで, 以下の問では $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) 余因子行列 $\tilde{B}$ と逆行列 B^{-1} の計算過程およびその結果を解答用紙裏面の記述解答欄 1に書きなさい.

(2) 3×3 行列 C によって定まる $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の線形変換 (1 次変換) f が $f(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$

で与えられていて, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と

する. この場合, f を表す行列 C (表現行列) は $C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{C2}} \\ \boxed{\text{C3}} \\ \boxed{\text{C4}} \end{bmatrix}$, $C \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \boxed{\text{C5}} \\ \boxed{\text{C6}} \\ \boxed{\text{C7}} \end{bmatrix}$, $C \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, すなわち $C \boxed{\text{C8}} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{C9}} & \boxed{\text{C10}} & \boxed{\text{C11}} \end{bmatrix}$

となることから, $C = \begin{bmatrix} \boxed{\text{C12}} & \boxed{\text{C13}} & -2 \\ \boxed{\text{C14}} & -1 & \boxed{\text{C15}} \\ 2 & \boxed{\text{C16}} & -3 \end{bmatrix}$ と求められる.

B9 **BX** **C1** **C5** の解答群 _____

- ① B ② B^{-1} ③ $\tilde{B}$ ④ $(\tilde{B})^{-1}$ ⑤ $|B|$ ⑥ $|B|^{-1}$
 ⑦ $|\tilde{B}|$ ⑧ $|\tilde{B}|^{-1}$ ⑨ $|B|\tilde{B}$ ⑩ $|B|(\tilde{B})^{-1}$ ⑪ $B|\tilde{B}|$ ⑫ $|B|^{-1}\tilde{B}$
 ⑬ $|\tilde{B}|^{-1}B$ ⑭ $|\tilde{B}|(\tilde{B})^{-1}$ ⑮ $|\tilde{B}|^{-1}(\tilde{B})^{-1}$
 ⑯ 対称行列 ⑰ 対角行列 ⑱ 正則行列 ⑲ 交代行列 ⑳ 回転行列
-

C2 **C3** **C4** および **C6** ~ **CX** の解答群 _____

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1 ⑥ 0
 ⑦ 1 ⑧ 2 ⑨ 3 ⑩ 4 ⑪ 5 ⑫ 6
 ⑬ $\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$ ⑭ $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ ⑮ $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ ⑯ $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ ⑰ $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$
-

3. 固有値, 固有ベクトルおよび行列の変換に関する以下の問に答えなさい.

固有値 λ をもつ実正方行列を $D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ とすると, 固有値は $\lambda = \boxed{\text{D1}}$,

$\boxed{\text{D2}}$ (重解) となる.

$\lambda = \boxed{\text{D1}}$ のときは固有ベクトルの 1 つが $u_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D3}} \end{bmatrix}$ と求められる. また,

$\lambda = \boxed{\text{D2}}$ (重解) のときは, $u_2 = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D4}} \end{bmatrix}$ が固有ベクトルとして求められる.

ここで, 固有空間の次元については

$$\dim W(\boxed{\text{D1}}) + \dim W(\boxed{\text{D2}}) = \boxed{\text{D5}} \quad \boxed{\text{D6}} \quad D \text{ の次数 } (= 3)$$

となり, D は $\boxed{\text{D7}}$ であり $\boxed{\text{D8}}$ である. すなわち, $(\boxed{\text{D9}} - \boxed{\text{D2}}I)v = u_2$ と

なるさらにもう 1 つの固有ベクトル v を求めると, $v = \begin{bmatrix} \boxed{\text{DX}} \end{bmatrix}$ が得られる. これ

らの固有ベクトルを並べた変換行列を $P = [u_1, u_2, v] = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D3}} & \boxed{\text{D4}} & \boxed{\text{DX}} \end{bmatrix}$

とすれば, D は $\boxed{\text{E1}} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{E2}} & \boxed{\text{E3}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{E4}} & \boxed{\text{E5}} \\ 0 & 0 & \boxed{\text{E6}} \end{bmatrix}$ のように変換される.

D1	D2	D5	D9	の解答群	
① -7	② -6	③ -5	④ -4	⑤ -3	
⑥ -2	⑦ -1	⑧ 0	⑨ 1	⑩ 2	
⑪ 3	⑫ 4	⑬ 5	⑭ 6	⑮ 7	
⑯ I	⑰ D	⑱ $ D $	⑲ D^{-1}	⑳ $\tilde{D}$	

D6	の解答群				
① $\simeq$	② $=$	③ $\in$	④ $<$	⑤ $>$	

D7	D8	の解答群			
① 対角化可能	② 対角化不可能	③ 三角化可能	④ 三角化不可能		
⑤ ジョルダン標準形へ変換可能	⑥ ジョルダン標準形へ変換不可能				

D3	D4	DX	の解答群			
	-5	-3	0	1	1	1
① 1	② 1	③ -3	④ 0	⑤ 0	⑥ 1	
	0	0	1	-3	1	0
	2	3	5	6	7	8
⑦ 0	⑧ -1	⑨ 0	⑩ -1	⑪ 0	⑫ 1	
	-1	0	1	0	2	0

E1	～	E6	の解答群 (${}^tP: P$ の転置行列)	
① $D^{-1}PD$	② DPD^{-1}	③ tPDP	④ $PD({}^tP)$	⑤ $(\tilde{P})^{-1}D\tilde{P}$
⑥ $\tilde{P}D(\tilde{P})^{-1}$	⑦ $P^{-1}DP$	⑧ PDP^{-1}	⑨ -5	⑩ -4
⑪ -3	⑫ -2	⑬ -1	⑭ 0	⑮ 1
⑯ 2	⑰ 3	⑱ 4	⑲ 5	⑳ 6

大問3（数学③）

次の各問に答えなさい。

1. 関数 $f(x, y)$ が xy 平面の領域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ で与えられている．領域 D は極座標への変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ により $r\theta$ 平面の領域 E に写像される．

- (1) xy 平面における関数 $f(x, y)$ の重積分は変数変換により次のように表せる．

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(r, \theta), y(r, \theta)) |J| dr d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^3 f(r, \theta) \boxed{\text{A1}} dr$$

ただし、 J は変換のヤコビアン（ヤコビ行列式）であり $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \boxed{\text{A1}}$ である．

- (2) 解答用紙裏面の記述欄 1 に、 xy 平面の領域 D および $r\theta$ 平面の領域 E を図示しなさい．
 (3) $f(x, y) = x^2 y$ として次の重積分 G を xy 平面の座標から $r\theta$ 平面の座標に変換して求める．

$$\begin{aligned} G &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D x^2 y dx dy = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^3 \boxed{\text{A2}} \boxed{\text{A3}} \sin \theta dr \\ &= \frac{242}{5} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \boxed{\text{A3}} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

ここで部分積分法を用いると

$$\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int \cos^2 \theta (\cos \theta)' d\theta = - \boxed{\text{A4}} - \int 2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

上式より、次の関係を得る．

$$\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{3} \boxed{\text{A4}}$$

または置換積分法を用いて $u = \cos \theta$ とおくと $\frac{du}{d\theta} = -\sin \theta$ から

$$\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int \boxed{\text{A5}} \frac{du}{d\theta} d\theta = - \int \boxed{\text{A5}} du = -\frac{1}{3} \boxed{\text{A6}} = -\frac{1}{3} \boxed{\text{A4}}$$

よって

$$G = \frac{242}{5} \left[-\frac{1}{3} \boxed{\text{A4}} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{121}{60} (2 \boxed{\text{A7}} - 1)$$

A1 ~ A7 の選択肢				
① r	② r^2	③ r^3	④ r^4	⑤ u
⑥ u^2	⑦ u^3	⑧ u^4	⑨ $\sqrt{2}$	⑩ $\sqrt{3}$
⑪ $\sqrt{5}$	⑫ $\sin \theta$	⑬ $\cos \theta$	⑭ $\sin^2 \theta$	⑮ $\cos^2 \theta$
⑯ $\sin^3 \theta$	⑰ $\cos^3 \theta$	⑱ $\sin^4 \theta$	⑲ $\cos^4 \theta$	

2. 関数 $f(x)$ が区間 I において無限回微分可能であるとして $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の n 次導関数とすると $x = 0$ を中心とするテイラー展開は次のようになる.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boxed{\text{A8}}}{n!} x^n$$

定数 a_n と変数 x からなる次の形の級数を $x = 0$ を中心とする x の整級数またはべき級数と呼ぶ.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots$$

ここで $a_n = \frac{\boxed{\text{A8}}}{n!}$ である. $f(x)$ のテイラー展開より整級数が $x = r (r \neq 0)$ で収束する

ならば $|x| < |r|$ を満たすすべての x で絶対収束し, $r (0 \leq r \leq \infty)$ を収束半径という.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ が存在すれば } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

また, 正接関数 $\tan x$ は x の範囲を開区間 $(\boxed{\text{A9}}, \boxed{\text{AX}})$ に制限すると連続する単調増加関数であり, すべての実数上で定義された値域が $(\boxed{\text{B1}}, \boxed{\text{B2}})$ である連続な単調増加する逆関数 $\text{Tan}^{-1} x$ をもつ.

- (1) $y = f(x) = \text{Tan}^{-1} x$ とおき, $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求める. $x = \tan y$ であり

$$\frac{dx}{dy} = \boxed{\text{B3}} (> 0) \text{ であるから逆関数の微分法により}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

- (2) $f(x) = \text{Tan}^{-1} x$ の整級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を次の手順で求める. 最初に $(1+x)^{-1}$ の整級数を求める. 二項定理を用いると

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n = 1 - x + \frac{1 \cdot 2}{2!} x^2 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} x^3 + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\text{B4}} x^n \end{aligned}$$

となる. ただし, 二項係数は実数 α と 0 以上の整数 n に対して

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

整級数 $(1+x)^{-1}$ の係数は $a_n = \binom{-1}{n} = \boxed{\text{B4}}$ となり収束半径は $|r| < 1$ となる.

次に x を x^2 で置き換えると

$$f'(x) = (1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\text{B4}} x^{2n}$$

上式を 0 から x まで項別積分すると積分定数 C は $C = f(0) = \tan^{-1} 0 = \boxed{\text{B5}}$ から $\tan^{-1} x$ の整級数として次式を得る.

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boxed{\text{B4}}}{\boxed{\text{B6}}} x^{2n+1} \quad (|x| < 1) \quad (1)$$

(3) 前問 (2) の式 (1) において $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とおけば次式を得る.

$$\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^9 - \cdots \quad (2)$$

ここで $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\text{B7}}$ である. 式 (2) の最初の 2 項及び 3 項までの和により π の近似値を求め $\pi = 3.141$ と比較すると下記のようなになる.

π	3.141	π との差の絶対値	誤差
式 (2) による最初の 2 項による π の近似値	3.079	0.062	0.020
式 (2) による最初の 3 項による π の近似値	3.156	0.015	B8

その誤差は 2 項までの和による誤差 2%, 3 項までの和による誤差 **B9** % と収束半径内では級数の収束性が良いことがわかる.

A8 ~ **B3** の選択肢

- | | | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|------------------------|------------------------|
| ① $-\frac{\pi}{3}$ | ② $-\frac{\pi}{2}$ | ③ $-\pi$ | ④ $\frac{\pi}{3}$ | ⑤ $\frac{\pi}{2}$ |
| ⑥ π | ⑦ $\frac{1}{\sin y}$ | ⑧ $\frac{1}{\cos y}$ | ⑨ $\frac{1}{\sin^2 y}$ | ⑩ $\frac{1}{\cos^2 y}$ |
| ⑪ $f^{(n)}(0)$ | ⑫ $f^{(n+1)}(0)$ | ⑬ $f^{(n)}(x)$ | ⑭ $f^{(n+1)}(x)$ | ⑮ $f^{(n)}(n)$ |
| ⑯ $f^{(n+1)}(n)$ | | | | |

B4 ~ **B9** の選択肢

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|---------------|--------|
| ① $\frac{\pi}{6}$ | ② $\frac{\pi}{3}$ | ③ $\frac{\pi}{2}$ | ④ 0 | ⑤ 1 |
| ⑥ 2 | ⑦ $(-1)^n$ | ⑧ $(-1)^{n+1}$ | ⑨ $(-1)^{2n}$ | ⑩ n |
| ⑪ $n+1$ | ⑫ $2n+1$ | ⑬ 0.005 | ⑭ 0.05 | ⑮ 0.02 |
| ⑯ 0.5 | | | | |

3. 楕円 $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ($a > b > 0$) について, $x > 0$, $y > 0$ の第 1 象限を領域とする.

直線 $x = x_0$ が原点 O を中心とする半径 a の円と $y > 0$ で交わる点を Q とし, 原点 O と Q を結ぶ線 OQ と x 軸となす角度を θ とする. 楕円上の点 $P: (x_0, y_0)$ 及び円上の点 $Q: (x_0, y_1)$ は

$$x_0 = a \cos \theta, \quad y_0 = b \sin \theta; \quad y_1 = a \sin \theta$$

と表すことができる.

- (1) 関数 $F(x, y) = 0$ において, 陰関数 $y = \phi(x)$ が $F(x, \phi(x)) = 0$ を満たすとき, 関数 $F(x, y)$ の x 及び y に関する偏導関数をそれぞれ $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ と表わし $F(x, \phi(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると合成関数の微分より

$$F_x(x, \phi(x)) + F_y(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$$

である. 接線の方程式を求めると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \text{ であるので楕円上の点 } P: (x_0, y_0) \text{ における接線の方程式は}$$

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

と書ける. $F_x(x_0, y_0) = \frac{2\boxed{\text{BX}}}{a^2}$, $F_y(x_0, y_0) = \frac{2\boxed{\text{C1}}}{b^2}$ を接線の方程式に代入すると

$$\frac{\boxed{\text{BX}}}{a^2}x + \frac{\boxed{\text{C1}}}{b^2}y = 1$$

- (2) 楕円上の点 $P: (x_0, y_0)$ を通る接線と x 軸, y 軸との交点 A , B は $A: \left(\frac{a^2}{\boxed{\text{C2}}}, 0\right)$, $B: \left(0, \frac{b^2}{\boxed{\text{C3}}}\right)$ である. したがって, AB 間の長さ ℓ は

$$\ell^2 = \frac{a^4}{\boxed{\text{C4}}} + \frac{b^4}{\boxed{\text{C5}}}$$

解答用紙裏面の記述欄 2 に, x 軸, y 軸, 楕円, 半径 a の円, 点 P , Q , 接線, 点 A , B 及び角 θ の関係の概形図を描きなさい.

- (3) 前問 (2) で定義された長さ ℓ の最小値とその場合の角 θ を求める. ℓ^2 を θ の関数として $g(\theta)$ とすると

$$\ell^2 = g(\theta) = \frac{a^2}{\boxed{\text{C6}}} + \frac{b^2}{\boxed{\text{C7}}} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

導関数は

$$g'(\theta) = \frac{2a^2\boxed{\text{C8}}}{\boxed{\text{C9}}} - \frac{2b^2\boxed{\text{CX}}}{\boxed{\text{D1}}} = \frac{2}{\boxed{\text{D1}}\boxed{\text{C9}}}(a^2\boxed{\text{D2}} - b^2\boxed{\text{D3}})$$

よって $g'(\theta) = 0$ となるのは $a^2 \boxed{\text{D2}} - b^2 \boxed{\text{D3}} = 0$, すなわち $\tan^4 \theta = \frac{b^2}{a^2}$ のときである. このときの角度 θ を θ_0 とおくと $\theta_0 = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ である. $\theta < \theta_0$ のとき $g'(\theta) < 0$, $\theta > \theta_0$ のとき $g'(\theta) > 0$ となるので $g(\theta)$ は $\theta = \theta_0$ のとき最小となる.

$$\frac{1}{\cos^2 \theta_0} = 1 + \tan^2 \theta_0 = \frac{\boxed{\text{D4}}}{a}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_0} = \frac{1}{1 - \cos^2 \theta_0} = \frac{\boxed{\text{D4}}}{b}$$

から

$$g(\theta_0) = (\boxed{\text{D5}})^2$$

よって ℓ の最小値は $\boxed{\text{D5}}$ となる.

$\boxed{\text{BX}} \sim \boxed{\text{D5}}$ の選択肢				
① x_0	② y_0	③ x_0^2	④ y_0^2	⑤ x_0^3
⑥ y_0^3	⑦ $\sin \theta$	⑧ $\cos \theta$	⑨ $\sin^2 \theta$	⑩ $\cos^2 \theta$
⑪ $\sin^3 \theta$	⑫ $\cos^3 \theta$	⑬ $\sin^4 \theta$	⑭ $\cos^4 \theta$	⑮ a
⑯ b	⑰ $a + b$	⑱ $a - b$	⑲ $\frac{a^2}{b}$	⑳ $\frac{b^2}{a}$

大問4（物理学 ①）

1. 質量 M 、半径 R の一様な薄い円板がある．円板に垂直な中心軸のまわりの、この円板の慣性モーメントを I とする．図 1(a) のように、摩擦のない水平な xy 平面上にこの円板を、その中心が原点 O に一致するように置く． x 軸に平行な直線 $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$ に沿って、質量 m の小球が $x < 0$ の領域から、円板に向かって一定の速さ v_0 で飛来し、やがて円板に衝突する．この衝突は摩擦のない弾性衝突である．衝突が起きている非常に短い時間だけ、図 1(b) に示すように、小球から円板に力 $\mathbf{F}$ が作用し、その反作用 $-\mathbf{F}$ が円板から小球に作用する．衝突において摩擦力が作用しないので、 $\mathbf{F}$ の作用線は、円周上の衝突点 P と原点 O を結ぶ直線上にある．この短い時間には、円板の中心位置と向きおよび小球の位置は変化しないものとする．

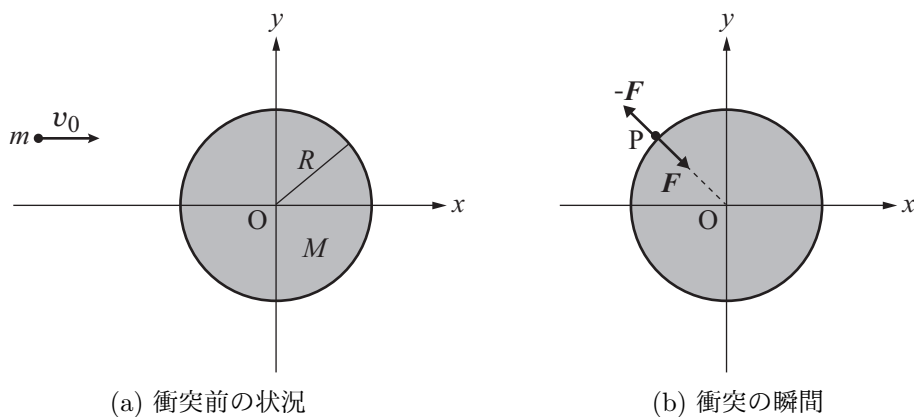


図 1: 滑らかな水平面上で、静止した円板に小球が衝突する．

衝突後の小球の速度の x 成分と y 成分をそれぞれ v_x 、 v_y 、円板の中心の速度成分を V_x 、 V_y 、回転角速度を ω とする（回転が反時計回りのとき、 $\omega > 0$ とする）、これら 5 つの量を求めよう．

まず、3 つの保存則を利用する．衝突の前後で A1 が保存することから、次の等式が成り立つ．

$$x \text{ 方向} : mv_0 = \text{A2}, \quad y \text{ 方向} : 0 = \text{A3}$$

また、A4 が保存することから、次の等式が成り立つ．

$$-\frac{R}{\sqrt{2}}mv_0 = \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\text{A5} \right) + I\omega$$

さらに、A6 が保存することから、次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}M(V_x^2 + V_y^2) + \left(\text{A7} \right)$$

このように、上の3つの保存則から4つの等式が得られたが、これらだけでは5つの未知の量を求めることができない。

そこで、衝突時に作用する力 $\mathbf{F}$ の作用線が原点 O を通ることに注目する。すると、剛体に対する運動方程式から、 V_x と V_y のあいだには、 $V_y = \boxed{\text{A8}}$ という関係があることがわかる。

こうして得られた5つの等式を使って v_x , v_y , V_x , V_y , ω を求めると、次のようになる。

$$v_x = \frac{m}{m+M}v_0, \quad v_y = \boxed{\text{A9}}, \quad V_x = \boxed{\text{AX}}, \quad V_y = \boxed{\text{B1}}, \quad \omega = \boxed{\text{B2}}$$

$\boxed{\text{A1}}$, $\boxed{\text{A4}}$, $\boxed{\text{A6}}$ の解答群 _____

① 質量	② エネルギー	③ 運動量	④ 角運動量
------	---------	-------	--------

$\boxed{\text{A2}}$, $\boxed{\text{A3}}$, $\boxed{\text{A5}}$, $\boxed{\text{A7}}$ の解答群 _____

① 0	② $mv_x + mv_y$	③ $mv_x - mv_y$	④ $-mv_x - mv_y$
⑤ $mv_x + MV_x$	⑥ $mv_x - MV_x$	⑦ $-mv_x - MV_x$	⑧ $mv_y + MV_y$
⑨ $mv_y - MV_y$	⑩ $-mv_y - MV_y$	⑪ $I\omega$	⑫ $I\omega^2$
⑬ ωI^2	⑭ $\frac{1}{2}I\omega$	⑮ $\frac{1}{2}I\omega^2$	⑯ $\frac{1}{2}\omega I^2$

$\boxed{\text{A8}} \sim \boxed{\text{B2}}$ の解答群 _____

① 0	② $\frac{1}{\sqrt{2}}V_x$	③ V_x	④ $-\frac{1}{\sqrt{2}}V_x$
⑤ $-V_x$	⑥ $\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	⑦ $-\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	⑧ $\frac{m}{m+M}v_0$
⑨ $\frac{M}{m+M}v_0$	⑩ $\frac{m}{m+M}\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	⑪ $\frac{M}{m+M}\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	⑫ $-\frac{m}{m+M}v_0$
⑬ $-\frac{M}{m+M}v_0$	⑭ $-\frac{m}{m+M}\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	⑮ $-\frac{M}{m+M}\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	⑯ $\frac{v_0}{R}$
⑰ $\frac{\sqrt{2}v_0}{R}$	⑱ $-\frac{v_0}{R}$	⑲ $-\frac{\sqrt{2}v_0}{R}$	

2. 自然長 l , バネ定数 k のバネに質量 m のおもりを吊り下げる. 図 2(a) に示すように, バネの上端 P を固定したとき, バネの長さが h になっておもりは静止した. このときのバネの下端 (おもりの上端) の位置を座標原点 O にして, 鉛直上向きに x 軸をとる. ただし, 重力加速度を g とし, k の値はバネの長さに依存しないものとする.

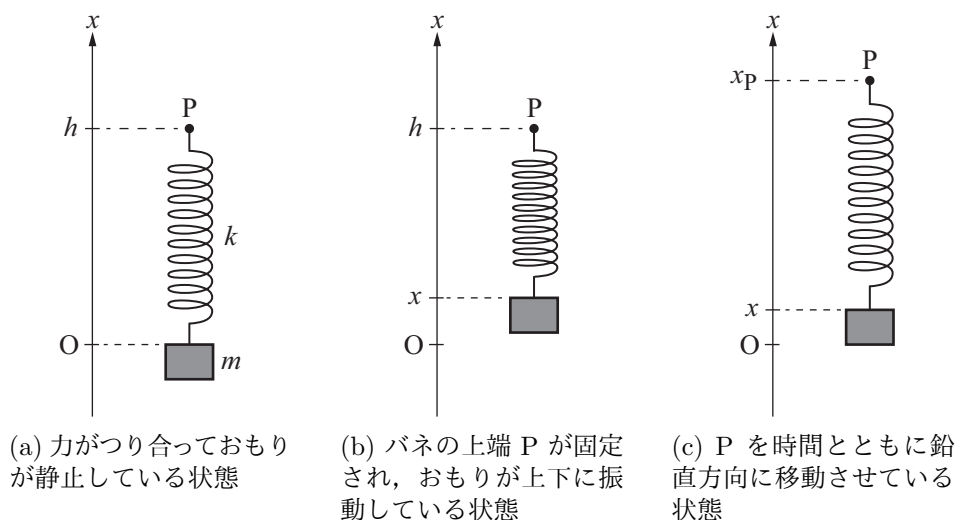


図 2: 自然長 l , バネ定数 k のバネに, 質量 m のおもりを吊り下げる.

- (1) 図 2(a) におけるバネの長さ h は, $h = \boxed{\text{B3}}$ である.
- (2) バネの上端 P を固定したまま, おもりを鉛直上方に距離 d だけ持ち上げて, 静かに手を放す. その後のおもりの運動を記述する運動方程式は, おもり上端の座標を x (図 2(b)), 時間を t として, 次のように書ける.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \boxed{\text{B4}} - mg \quad (4-1)$$

この式を整理して,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \boxed{\text{B5}}$$

と書くことができ, おもりは角振動数 ω の単振動をすることがわかる.

$\boxed{\text{B3}} \sim \boxed{\text{B5}}$ の解答群

- | | | | |
|----------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| ① mg/k | ② $l + mg/k$ | ③ $l - mg/k$ | ④ $mg/k - l$ |
| ⑤ $-kx$ | ⑥ $-k(x - d)$ | ⑦ $-k(x - l)$ | ⑧ $-k(x - l - d)$ |
| ⑨ $-k(x - h)$ | ⑩ $-k(x - h - d)$ | ⑪ $-k(x - h + l)$ | ⑫ $-k(x - h + l - d)$ |
| ⑬ $\sqrt{k/m}$ | ⑭ $\sqrt{m/k}$ | ⑮ $\sqrt{g/l}$ | ⑯ $\sqrt{l/g}$ |

- (3) 図 2(a) のように、バネの上端 P が固定され、おもりがつり合いの位置 ($x = 0$) に静止している状況を考える. ここで, $T = 2\pi/\omega$ として, 時間 t が $0 \leq t \leq T$ の間だけ, P の座標 x_P を

$$x_P = h + \alpha \sin \frac{\omega t}{2}$$

(α は正の定数, $0 \leq t \leq T$)

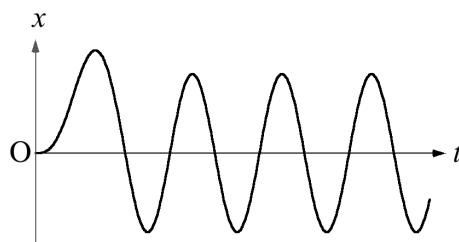


図 3

のように変化させて (図 2(c)), $t > T$ では $x_P = h$ に固定するとして. この場合, $t \geq 0$ において, おもりは図 3 に示すような運動をする. 運動方程式を使って, この運動を調べよう.

P が動いている時間帯 ($0 \leq t \leq T$) において, 式 (4-1) と同様の運動方程式が成り立つが, B4 の部分が異なる. そして, この運動方程式を整理すると次のようになる.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \text{B6} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4-2)$$

この方程式の一般解を求めるには, 式 (4-2) の右辺を 0 とおいた方程式 (同次方程式) の一般解に, 式 (4-2) の特解を加えればよい. $t = 0$ における初期条件を考慮して, 一般解に含まれる 2 つの任意定数を決定すると, $0 \leq t \leq T$ における運動方程式の解として次式が得られる.

$$x = \text{B7} + \frac{4\alpha}{3} \sin \frac{\omega t}{2} \quad (0 \leq t \leq T)$$

この式から, 時刻 T における x の値は B8 であり, $\frac{dx}{dt}$ の値は B9 ω であることがわかる.

$t > T$ における運動方程式の一般解は次式で与えられる.

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (A \text{ と } B \text{ は任意定数, } t > T)$$

時刻 T における上記の x と $\frac{dx}{dt}$ の値を考慮して, 定数 A と B を決めると, $A = \text{BX}$, $B = \text{C1}$ となる.

B6 ~ C1 の解答群

① $\omega^2 \alpha \sin \frac{\omega t}{2}$	② $-\omega^2 \alpha \sin \frac{\omega t}{2}$	③ $\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \alpha \sin \frac{\omega t}{2}$	④ $-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \alpha \sin \frac{\omega t}{2}$
⑤ $\frac{\alpha}{6} \sin \omega t$	⑥ $-\frac{\alpha}{6} \sin \omega t$	⑦ $\frac{2\alpha}{3} \sin \omega t$	⑧ $-\frac{2\alpha}{3} \sin \omega t$
⑨ $\frac{\alpha}{6} \cos \omega t$	⑩ $-\frac{\alpha}{6} \cos \omega t$	⑪ $\frac{2\alpha}{3} \cos \omega t$	⑫ $-\frac{2\alpha}{3} \cos \omega t$
⑬ 0	⑭ $\frac{\alpha}{3}$	⑮ $\frac{2\alpha}{3}$	⑯ α
⑰ $\frac{4\alpha}{3}$	⑱ $-\frac{\alpha}{3}$	⑲ $-\frac{2\alpha}{3}$	⑳ $-\frac{4\alpha}{3}$

大問 5 (物理学②)

以下の各問に答えなさい．ここでは，空間座標として空間に固定された右手系の直交座標を用い，角度は **radian** を使用する．

1. 弾性体のひずみと静水圧

図 1 は内半径 a ，長さ h の円筒管を示す． x 軸は天井の原点 O を通り鉛直下向きとする．その管は，上端を天井の原点で固定され，大気中に吊るされている．上面は開いており中に液体を入れることができる．円筒管の管壁の厚さは δ で， $\delta \ll a$ である．管材の密度を ρ_m ，重力加速度を g とする．円筒管の底面は質量を無視してよい剛体板である． x 軸に垂直な方向の変形は考えなくてよい．円筒管は鉛直方向には弾性変形する．そのヤング率を E とする．

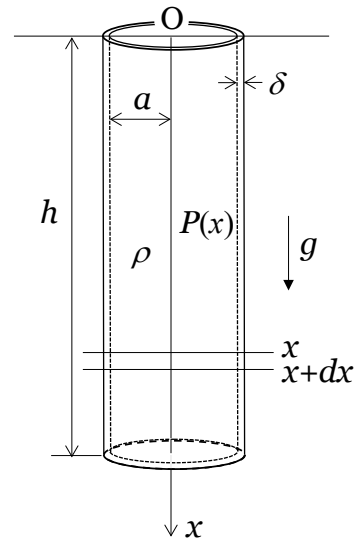


図 1

- (1) 管内が空の場合を考える．円筒管の長さ dx の微小部分 $[x, x + dx]$ の質量は A1 である．この微小部分の x 方向伸びを $d\lambda$ とすると微小域の伸びひずみ ε は A2 である．座標 x における円筒管断面に作用する下向き応力 $\sigma(x)$ は A3 である．フックの法則 $\sigma = E\varepsilon$ より円筒管全体の伸び λ は

$$\lambda = \int_0^h \frac{d\lambda}{dx} dx = \text{ A4 }$$

である．

- (2) 次に円筒管内に密度 ρ の液体を深さ h で満たす．ここで円筒管内の上面は開いていて，液体の上面と円筒管の剛体底面には大気圧 P_0 が作用する．円筒管壁が薄いから円筒管壁の x 軸方向の圧縮は無視できる．円筒管内を液体で満たしても大気圧による円筒管壁に作用する x 軸方向の応力への影響は無視できるものとする．液体の深さ h における圧力 $P(h)$ は $P_0 +$ A5 であるから，円筒管の座標 x の水平断面に作用する下向き応力 $\sigma(x)$ は A3 + A6 である．したがって円筒管の全体の伸び λ は A7 となる．

A1～A7 の選択肢

- ① $2\pi a\delta\rho_m$ ② $2\pi a\delta\rho_m dx$ ③ $2\pi a\delta\rho$ ④ λ/h ⑤ $d\lambda/dx$
- ⑥ $dx/d\lambda$ ⑦ $\rho g(h-x)$ ⑧ ρgh ⑨ $\rho_m g(h-x)$
- ⑩ $\rho_m gh$ ⑪ $\frac{\rho_m gh^2}{E}$ ⑫ $\frac{\rho_m gh^2}{2E}$ ⑬ $\frac{\rho_m gh^2}{2}$
- ⑭ $\frac{\rho gah}{\delta}$ ⑮ $\frac{\rho gah}{2\delta}$ ⑯ $\frac{\rho gah^2}{2\delta E}$ ⑰ $\frac{(\delta\rho_m + a\rho)gh^2}{\delta E}$
- ⑱ $\frac{(\delta\rho_m + a\rho)gh^2}{2\delta E}$

2. スリットによる波の回折（ホイヘンスの原理）

右手系直交座標 x, y, z 軸を考え、 z 軸は図 2 の原点 O から手前向きとする。 yz 面に平行な波面をもつ平面波が x 軸正方向に進み $x = 0$ で障壁のスリット（幅 δ ）を通過し $x = L$ のスクリーンに到達し回折像が生じる。この系は z 軸方向には一様である。そのため各点の座標は (x, y) で示す。

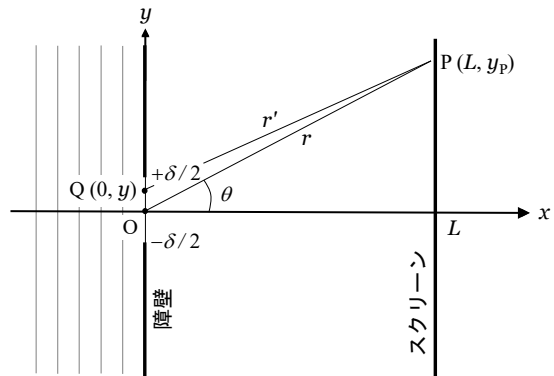


図 2

スクリーン上の点 $P(L, y_P)$ における波の時間依存振幅 u が座標 y_P によってどう変化するかをホイヘンスの原理にしたがって調

べる。線分 OP と x 軸のなす角を θ 、 OP 間距離を r とする。ここでは $L \gg \delta$ とする。図 2 の $x < 0$ の領域から来た平面波が障壁を伝わらないのは障壁内のどの点も波源とならないからである。スリットの狭い空間のすべての点は $x < 0$ の領域から来る平面波により同じ角周波数 ω の波源となる。スリット内の点 Q の座標が $(0, y)$ である。QP 間距離を r' とし、 r' を r, y, θ で表す。

$$r' = [r^2 + y^2 - 2ry \cos(\text{A8})]^{1/2}$$

スリット内では $-\delta/2 \leq y \leq \delta/2$ より $|y/r| \ll 1$ であるから $(y/r)^2$ は 2 次微小量で無視できる。ここで $|c| \ll 1$ であれば 1 次近似では $\sqrt{1+c} \approx 1 + \text{A9}$ が成り立つから、 $r' \approx \text{AX}$ である。

ホイヘンスの原理よりスリット内の微小域から波は円形状波面として $x > 0$ の領域に広がるから、スリット内の微小域 $[y, y+dy]$ を通過した波による点 P における時間依存振幅 du は波の波数 k と角周波数 ω を用いると、

$$du = A \sin\{k(r - y \sin \theta) - \omega t - \varphi\} dy \quad (5-1)$$

と表される。ここで A はスリット幅 δ が B1 の場合の点 P における波の最大振幅であるから右辺に dy を乗じている。

A8~B1 の選択肢

- ① θ ② $\pi/2 - \theta$ ③ $\pi - \theta$ ④ c ⑤ $c/2$ ⑥ c^2 ⑦ $r - y \cos \theta$
 ⑧ $r + y \cos \theta$ ⑨ $r - y \sin \theta$ ⑩ $r + y \sin \theta$ ⑪ 波長 ⑫ 単位長さ

式(5-1)をスリットの幅 $-\delta/2$ から $+\delta/2$ まで y で積分すると u をもとめることができる。

$$u = A \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sin\{k(r - y \sin \theta) - \omega t - \varphi\} dy$$

$$= A \sin(kr - \omega t - \varphi) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \cos(\boxed{\text{B2}}) dy - A \cos(kr - \omega t - \varphi) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sin(\boxed{\text{B2}}) dy$$

この右辺第2項は奇関数の積分で $\boxed{\text{B3}}$ となり、第1項は $\alpha = \frac{1}{2}k\delta \sin \theta$ とおくと

$$u = A\delta \cdot \boxed{\text{B4}} \sin(kr - \omega t - \varphi) \quad (5-2)$$

となる。点 P での波の最大振幅が $A\delta \cdot \boxed{\text{B4}}$ である。つまり、 u の振幅はスリット幅 δ に

比例するとともに、 $\alpha = \frac{1}{2}k\delta \sin \theta$ よりスクリーン上では $\theta = 0$ で振幅が最大となる。

B2～B4 の選択肢

- | | | | |
|------------------------|---|--------------------------------|-------------------------------------|
| ① $y \sin \theta$ | ② $ky \cos \theta$ | ③ $ky \sin \theta$ | ④ $A \cos(kr - \omega t - \varphi)$ |
| ⑤ 0 | ⑥ $A \cos(kr - \omega t - \varphi) / k \sin \theta$ | ⑦ $\alpha \sin \alpha$ | |
| ⑧ $\alpha \cos \alpha$ | ⑨ $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ | ⑩ $\frac{\cos \alpha}{\alpha}$ | |

角度 θ を 0 から少しずつ大きくしたとき、 $\alpha = \pi$ となる角度 $\theta = \theta_0$ でスクリーン上の波の最大振幅が最初に 0 となる。 k, δ を用いると $\sin \theta_0 = \boxed{\text{B5}}$ である。波の波長 λ と波数 k の関係から λ, δ を用いると $\boxed{\text{B5}} = \boxed{\text{B6}}$ であり、小さな幅 δ のスリットを通過した波はスクリーン上で $2L \tan \theta_0$ の範囲に広がる。これを回折像の幅と呼ぶことにする。 $\lambda \ll \delta$ とすれば、 λ, δ を用いると $2L \tan \theta_0 \approx \boxed{\text{B7}}$ になる。

入射波の具体例として波長 λ が 500 nm の光を考える。 $L = 1 \text{ m}$, $\delta = 100 \mu\text{m}$ とするとスクリーン上の回折像の幅は $\boxed{\text{B8}}$ である。可視光では波長が短いためこのスリット幅では広がりが小さい。替わりに幅 $\delta = 5 \mu\text{m}$ のごく狭いスリットを使えばスクリーン上の回折像の幅は $\boxed{\text{B9}}$ となる。このように波の波長に近い幅のスリットを用いることで回折現象が顕著に観測される。

B5～B9 の選択肢

- | | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------|----------------------------|
| ① $\frac{\pi}{k\delta}$ | ② $\frac{2\pi}{k\delta}$ | ③ $k\delta$ | ④ $\lambda\delta$ | ⑤ $\frac{\lambda}{\delta}$ |
| ⑥ $\frac{L\delta}{\lambda}$ | ⑦ $\frac{2L\lambda}{\delta}$ | ⑧ $\frac{2L\delta}{\lambda}$ | ⑨ 1 mm | ⑩ 5 mm |
| ⑪ 1 cm | ⑫ 10 cm | ⑬ 20 cm | ⑭ 1 m | |

大問 6 (化学①)

必要があれば，以下の物理定数値を使うこと．

$$\text{プランク定数 } h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\text{電子の質量 } m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{電気素量 } e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{真空中での光速 } c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{ボルツマン定数 } k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$\text{アボガドロ定数 } N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$hc = 1.99 \times 10^{-25} \text{ J m}$$

1. 電磁波の吸収・放出に関連する以下の設問(1)～(4)に答えよ．

- (1) 分子の結合が伸び縮みすると，その振動数 ν に応じて永久双極子モーメントが変化し，振動数 ν の電磁波が放出（あるいは吸収）される．波長 3465 nm の光を放出・吸収する H^{35}Cl 分子の結合伸縮の振動数は A1 s^{-1} ，この電磁波の波数は A2 cm^{-1} である．

各々に最も適した値を下の選択肢から 1 つずつ選べ．指定された単位に注意すること．

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| ① 2.6×10^3 | ② 2.6×10^5 | ③ 2.6×10^8 | ④ 2.6×10^{22} | ⑤ 2.6×10^{31} |
| ⑥ 2.9×10^3 | ⑦ 2.9×10^5 | ⑧ 8.7×10^{-9} | ⑨ 8.7×10^{-6} | ⑩ 8.7×10^{13} |

- (2) 設問(1)の電磁波の波長領域は何と呼ばれているか．その名称を下の選択肢から選べ．

A3

- | | | | |
|---------|--------|--------|---------|
| ① 軟 X 線 | ② ガンマ線 | ③ 可視光線 | ④ 超短波 |
| ⑤ X 線 | ⑥ 紫外線 | ⑦ 赤外線 | ⑧ マイクロ波 |

(3) 水素原子の電子エネルギー E は, n を主量子数とすると, $-1/n^2$ に比例する. $2p$ 状態から $1s$ 状態への遷移に際して放出される光子のエネルギーは A4 eV である.

下の選択肢から最も適した値を 1 つ選べ. 水素原子のイオン化エネルギーは, 約 13.6 eV である.

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| ① 3.4 | ② 5.1 | ③ 6.8 | ④ 10.2 | ⑤ 13.6 |
| ⑥ 17.0 | ⑦ 18.7 | ⑧ 20.4 | ⑨ 23.8 | ⑩ 27.2 |

(4) $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ の関係を利用すると, 設問(3)の放出光子の波長が A5 nm であることがわかる. 下の選択肢から適切な値を 1 つ選べ.

- | | | | | |
|-------|-------|--------|--------|--------|
| ① 61 | ② 92 | ③ 122 | ④ 173 | ⑤ 346 |
| ⑥ 610 | ⑦ 828 | ⑧ 1470 | ⑨ 1960 | ⑩ 2450 |

2. 図1のようなポテンシャル $V(x)$ に捉えられた粒子の波動関数（固有関数） $\psi_n(x)$ を、エネルギーが低いものから3つ、図2に示す． n は各量子状態を指定する量子数であり、1から始まる正の整数である． $V(x)$ は $x=0$ から $x=L$ の間で0、その井戸の外側で ∞ であり、 $\psi_n(x)$ は $V(x)=\infty$ の領域では0である．ここでは、 $\psi_n(x)$ の波形が両端固定された振動する長さ L の弦の定常波と同じであることに注目して、 n 番目の量子状態のエネルギー E_n を導出する．以下の設問(1)～(3)に沿って答えよ．

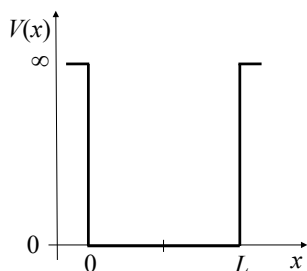


図1 無限大の障壁をもつ1次元のポテンシャル $V(x)$ ．このような形状のポテンシャルは、一般に井戸型（箱型）ポテンシャルとよばれている．

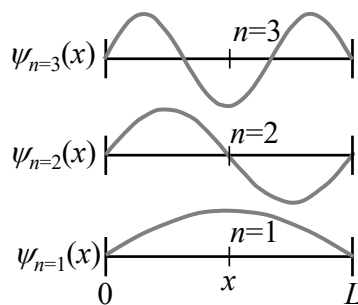


図2 図1の $V(x)$ をポテンシャルとするシュレディンガー方程式の $n=1\sim 3$ の波動関数 $\psi_n(x)$

- (1) $\psi_n(x)$ の波の波長 λ_n は A6 と表される．最も適切な表現を、下の選択肢から1つ選べ．

- | | | | | |
|------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|
| ① $\frac{4L}{n}$ | ② $\frac{2L}{n}$ | ③ $\frac{L}{n}$ | ④ $\frac{L}{2n}$ | ⑤ $\frac{L}{4n}$ |
| ⑥ $4nL$ | ⑦ $2nL$ | ⑧ nL | ⑨ $\frac{nL}{2}$ | ⑩ $\frac{nL}{4}$ |

- (2) λ_n は物質波の波長とみなせる． $\psi_n(x)$ の状態にある粒子の運動量 p_n は A7 と表される．正しい表現を、下の選択肢から1つ選べ．

- | | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------------------|
| ① $\frac{\pi h}{\lambda_n}$ | ② $\frac{2h}{\lambda_n}$ | ③ $\frac{h}{\lambda_n}$ | ④ $\frac{h}{2\lambda_n}$ | ⑤ $\frac{h}{\pi\lambda_n}$ |
| ⑥ $\frac{\lambda_n}{\pi h}$ | ⑦ $\frac{\lambda_n}{2h}$ | ⑧ $\frac{\lambda_n}{h}$ | ⑨ $\frac{2\lambda_n}{h}$ | ⑩ $\frac{\pi\lambda_n}{h}$ |

- (3) 図1のポテンシャル中の粒子を電子とした系は、長さ L の共役二重結合のなかを動く π 電子のモデルとみなせる。そのエネルギー E_n は、 $x = 0$ から $x = L$ の間では $V(x) = 0$ であるから、電子の運動エネルギー $K_n = p_n^2/(2m_e)$ と等しい。よって、 K_n は A8 と表される。

K_n として適切な表現を、下の選択肢から1つ選べ。

- | | | | |
|--|---|--|---|
| ① $\frac{h^2 n^2}{8m_e L^2}$ | ② $\frac{4h^2 n^2}{8m_e L^2}$ | ③ $\frac{\pi^2 h^2 n^2}{8m_e L^2}$ | ④ $\frac{h^2 n^2}{32m_e L^2}$ |
| ⑤ $\frac{h^2 n^2}{8\pi^2 m_e L^2}$ | ⑥ $\frac{\pi^2 h^2}{8m_e L^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ | ⑦ $\frac{4h^2}{8m_e L^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ | ⑧ $\frac{h^2}{8m_e L^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ |
| ⑨ $\frac{h^2}{32m_e L^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ | ⑩ $\frac{h^2}{8\pi^2 m_e L^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ | | |

3. 2 原子分子とそのイオンに関する下記の設問(1)～(3)に答えよ.

(1) O 原子の 2p 軌道から構成される O₂ の分子軌道は 6 つある. 結合軸を x 方向とすると, そのなかの結合性 σ 軌道 σ_{2p_x} の形状は **A9**, 反結合性 π 軌道 $\pi_{2p_y}^*$ (あるいは $\pi_{2p_z}^*$) の形状は **AX** で表せる.

各々の形状を適切に表しているものを, 図 3 の①～④のうちから 1 つ選べ.

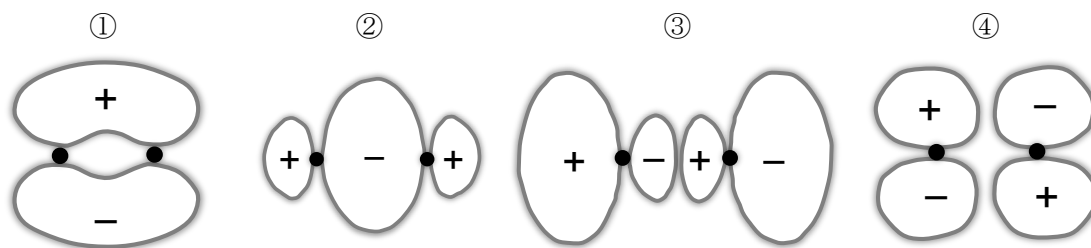


図 3 O₂ 分子軌道の模式図. ●は酸素の原子核の位置を示している.

(2) O₂ の分子軌道 σ_{2p_x} , π_{2p_y} , π_{2p_z} , $\pi_{2p_y}^*$, $\pi_{2p_z}^*$, $\sigma_{2p_x}^*$ に 8 つの電子が入った電子配置の例を図 4 に示す (σ_{2s}^* 以下の軌道には電子が 2 つずつ入っているとす). スピン量子数 $m_s = \pm 1/2$ の違いを上下の向きの矢印で表している. O₂ の基底電子状態の電子配置を正しく表しているものは **B1** である. 一方, **B2** はパウリの排他原理に反して物理的に許されない配置である.

各々にあてはまる電子配置を, 図 4 の①～④のうちから 1 つ選べ.

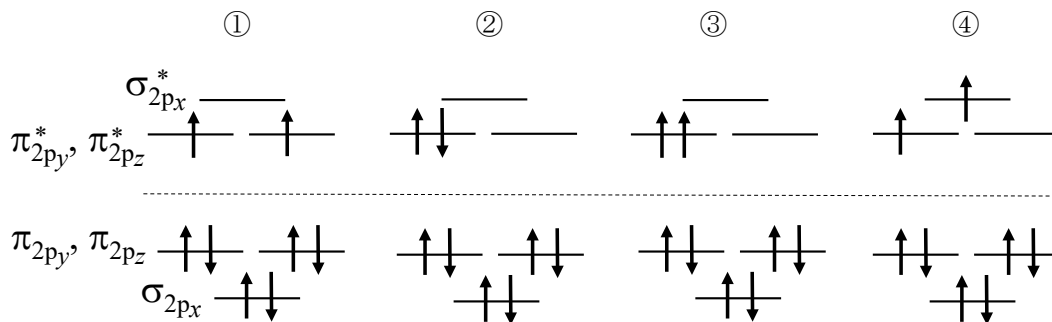


図 4 O₂ 分子の電子配置 4 例. これらの配置では, 2p 軌道から構成される分子軌道 6 つに 8 電子が収容されている. 横実線は分子軌道のエネルギーレベルを表している.

(3) N_2^+ , O_2 , および O_2^- に関する表 1 の各空欄にあてはまるものを, 下の選択肢から 1 つ 選べ.

表 1 N_2^+ , O_2 , および O_2^- の性質

分子	B3	B4	B5
結合次数	B6	B7	B8
結合長 (pm)	121	112	135
結合エネルギー (kJ mol^{-1})	494	843	395

- ① N_2^+ ② O_2 ③ O_2^- ④ 0.5 ⑤ 1
 ⑥ 1.5 ⑦ 2 ⑧ 2.5 ⑨ 3 ⑩ 3.5

4. 絶対温度 T の気体中の質量 m の原子や分子の速さ v を測定すると、 v と $v+dv$ の間の速さをもっているものの数が温度の関数として次のように表される。

$$F(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

粒子の速さの分布に関連した以下の設問(1)と(2)に答えよ。

- (1) 上記の分布関数 $F(v)$ のピークを与える速さ v_p をアルゴン Ar の気体で求めたところ、

$$\frac{1}{2} m_{\text{Ar}} v_p^2 = 4.00 \times 10^{-21} \text{ J}$$

となっていた。ここで、 m_{Ar} は Ar 原子 1 個の質量である。このときの絶対温度 T は B9 である。

この T の値に最も近いものを下の選択肢から選べ。

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| ① 220 K | ② 250 K | ③ 270 K | ④ 290 K | ⑤ 315 K |
| ⑥ 335 K | ⑦ 355 K | ⑧ 378 K | ⑨ 398 K | ⑩ 428 K |

- (2) 設問(1)の気体 Ar の 1 mol あたりの平均運動エネルギーは BX J mol^{-1} である。最も近い値を下の選択肢から選べ。

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| ① 1310 | ② 1350 | ③ 1410 | ④ 1490 | ⑤ 2330 |
| ⑥ 2390 | ⑦ 2410 | ⑧ 2490 | ⑨ 2560 | ⑩ 3610 |

(空白ページ)

大問 7 (化学②)

以下の問に答えよ。ただし、特に指定しない場合は、絶対温度、体積、圧力をそれぞれ T , V , P で表す。同様に、熱、仕事をそれぞれ q , w で、エンタルピー、内部エネルギー、ギブズエネルギーをそれぞれ H , U , G で表す。また、気体定数は R で表し、 $0.0821 \text{ dm}^3 \text{ atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ もしくは $8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ とする。さらに、ファラデー定数は F とし、 $9.65 \times 10^4 \text{ C mol}^{-1}$ とする。なお、必要であれば $\ln 2 = 0.693$, $\ln 3 = 1.10$, $\ln 5 = 1.61$, $\ln 7 = 1.95$ を用いること。

1. 理想気体としてふるまう 2 原子分子の気体を用いた熱機関のカルノーサイクル (図 1) について考える。空欄 A1 ～ A7 にあてはまる最も適切な式または数値を、選択肢からそれぞれ 1 つずつ選べ。

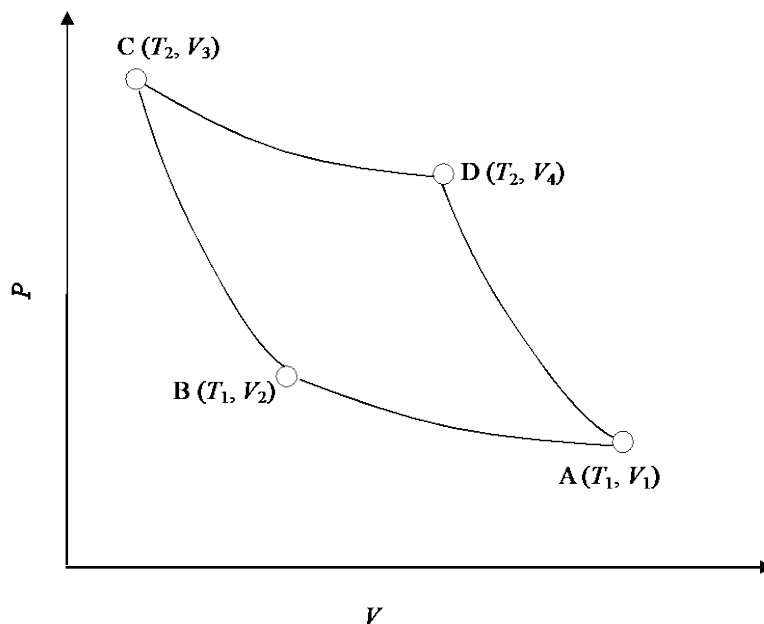


図 1 カルノーサイクルの模式図

物質質量 n [mol] の気体が T_1 , P_1 , V_1 の状態にある (図 1, 点 A)。この気体を等温可逆的に点 B まで圧縮するためには、 $w_{A \rightarrow B} =$ A1 の仕事をする必要がある。この状態から断熱的に点 C まで圧縮した場合、その仕事 $w_{B \rightarrow C} =$ A2 となる。ここで、定圧熱容量 C_P に対する定容熱容量 C_V の比を γ ($= C_P / C_V$) とすると、 $T_2 =$ A3 を求めることができる。続いて、等温的に点 D まで膨張させ、最後に断熱的に点 A まで膨張

させる。この過程において、点 B から点 C、点 D から点 A の断熱過程における仕事は正味ゼロとなる。そのため、このカルノーサイクルで外界に取り出せる仕事 $-w_{\text{cycle}} =$ A4 となる。また、この熱機関の熱効率は $\eta =$ A5 と表現できる。ここで、気体は理想気体としてふるまう 2 原子分子であるため、定容熱容量 C_V は A6 である。なお、 $T_1 = 298 \text{ K}$, $T_2 = 366 \text{ K}$, $P_1 = 1.00 \text{ atm}$, $V_1 = 40.0 \text{ dm}^3$, $V_2 = 20.0 \text{ dm}^3$, $V_3 = 15.0 \text{ dm}^3$, $V_4 = 30.0 \text{ dm}^3$ であるとする、 $-w_{\text{cycle}} =$ A7 J となる。

(1) A1

- | | | |
|---|---|---|
| ① $-P_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$ | ② $-P_1 V_1 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$ | ③ $-P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$ |
| ④ $-P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$ | ⑤ $-P_1 V_1 (V_1 - V_2)$ | ⑥ $-P_1 V_1 (V_2 - V_1)$ |
| ⑦ $-P_1 V_1 \ln(V_1 - V_2)$ | ⑧ $-P_1 V_1 \ln(V_2 - V_1)$ | |

(2) A2

- | | | |
|---|---|---|
| ① $nC_V \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$ | ② $nC_V \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$ | ③ $nC_V \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$ |
| ④ $nC_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$ | ⑤ $nC_V (T_1 - T_2)$ | ⑥ $nC_V (T_2 - T_1)$ |
| ⑦ $nC_V \ln(T_1 - T_2)$ | ⑧ $nC_V \ln(T_2 - T_1)$ | |

(3) A3

- | | | |
|---|---|---|
| ① $T_1 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma$ | ② $T_1 \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma$ | ③ $\gamma T_1 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$ |
| ④ $\gamma T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_3} \right)$ | ⑤ $T_1 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1}$ | ⑥ $T_1 \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma-1}$ |
| ⑦ $(\gamma - 1) T_1 \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$ | ⑧ $(\gamma - 1) T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_3} \right)$ | |

(4)

A4

- | | |
|---|---|
| ① $nR(T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ | ② $nR(T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ |
| ③ $nR(T_1 - T_2) \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ | ④ $nR(T_1 - T_2) \left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ |
| ⑤ $nR(T_1 - T_2) \ln(V_1 - V_2)$ | ⑥ $nR(T_1 - T_2) \ln(V_2 - V_1)$ |
| ⑦ $nR(T_1 - T_2)(V_1 - V_2)$ | ⑧ $nR(T_1 - T_2)(V_2 - V_1)$ |

(5)

A5

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ① $\frac{T_2 - T_1}{T_1}$ | ② $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$ | ③ $\frac{T_1}{T_2 - T_1}$ | ④ $\frac{T_2}{T_2 - T_1}$ |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|

(6)

A6

- | | | | | | | | |
|------------------|-------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|
| ① $\frac{1}{2}R$ | ② R | ③ $\frac{3}{2}R$ | ④ $2R$ | ⑤ $\frac{5}{2}R$ | ⑥ $3R$ | ⑦ $\frac{7}{2}R$ | ⑧ $4R$ |
|------------------|-------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|

(7)

A7

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ① 5 | ② 10 | ③ 15 | ④ 20 |
| ⑤ 25 | ⑥ 50 | ⑦ 100 | ⑧ 150 |
| ⑨ 200 | ⑩ 250 | ⑪ 300 | ⑫ 350 |
| ⑬ 400 | ⑭ 450 | ⑮ 500 | ⑯ 550 |
| ⑰ 600 | ⑱ 650 | ⑲ 700 | ⑳ 750 |

2. 気体の水への溶解に関する次の設問に答えよ。 A8 ～ B6

(1) 次の(a) – (f)の各気体が溶けた水溶液が、その気体を含む気相と平衡状態にある。各気体の圧力が高くない場合、その気体の水への溶解がヘンリーの法則に従うかを答えよ。

(a) アンモニア	A8	① 従う	② 従わない
(b) 塩化水素	A9	① 従う	② 従わない
(c) 酸素	AX	① 従う	② 従わない
(d) 水素	B1	① 従う	② 従わない
(e) 窒素	B2	① 従う	② 従わない
(f) 二酸化硫黄	B3	① 従う	② 従わない

(2) 以下の文章において、空欄にあてはまる最も適切なものを選択肢からそれぞれ 1 つ 選べ。

B4 ～ B6

設問(1)で答えたヘンリーの法則に従う気体の水に対するヘンリーの定数は、室温下一定のもと、気体の圧力 1～8 atm においていずれも B4。温度依存性については常圧一定のもと、0 ～ 50℃においてヘンリーの定数は B5。また、単位体積の溶媒に溶ける気体の体積を 0℃, 1 atm に換算した値は B6 の吸収係数と呼ばれ、異なる条件で溶解した気体の量を比較するのに便利である。

- | | |
|-----------------|-----------------|
| ① 圧力とともに著しく増大する | ② 圧力とともに著しく減少する |
| ③ 温度とともに増大する | ④ 温度とともに減少する |
| ⑤ あまり大きく変化しない | |
| ⑥ トムソン | ⑦ ハンセン |
| ⑧ ブンゼン | ⑨ クヌーセン |
| ⑩ マッサン | |

3. 実在気体と実在溶液に関する以下の説明文を読み、空欄にあてはまる最も適切な語句または数値を下記の選択肢群から1つずつ選べ。 B7 ～ BX

絶対温度 T における混合理想気体中の成分 i の化学ポテンシャル $\mu_{v,i}$ は、成分 i の分圧 p_i の関数として次のように表わされる。

$$\mu_{v,i}(T, p_i) = \mu_{v,i}^{\circ}(T) + RT \ln p_i \quad (1)$$

ここで、 $\mu_{v,i}^{\circ}(T)$ は純物質 i の絶対温度 T における標準化学ポテンシャルである。式(1)は理想気体に対して導かれたものであり、実在気体に対して厳密には成立しない。そこで新たな変数 f を導入し、実在気体の化学ポテンシャルを次式の

$$\mu_{v,i}(T, f_i) = \mu_{v,i}^{\circ}(T) + RT \ln f_i \quad (2)$$

のように表現する。この変数 f_i を B7 と呼ぶ。式(2)中の f_i は低圧になるほど p_i との差が B8 傾向を示す。

次に、絶対温度 T において混合理想溶液と混合理想蒸気が平衡にある多成分混合系を考える。このとき、混合系における成分 j の液体の化学ポテンシャル ($\mu_{l,j}$) は、蒸気の化学ポテンシャルに等しい ($\mu_{l,j} = \mu_{v,j}$)。成分 j の化学ポテンシャルは、絶対温度 T における成分 j の平衡分圧を p_j とすると、

$$\mu_{l,j}(T, p_j) = \mu_{v,j}^{\circ}(T) + RT \ln p_j \quad (3)$$

で表される。ここで、 $\mu_{v,j}^{\circ}(T)$ は純物質 j の絶対温度 T における標準化学ポテンシャルである。混合溶液が B9 の法則に従うとすれば、成分 j の化学ポテンシャルは、次のように表すことができる。

$$\mu_{l,j}(T) = \mu_{v,j}^{\circ}(T) + RT \ln p_j^{\circ} + RT \ln x_j \quad (4)$$

このように、溶液中の任意成分の化学ポテンシャルは、その成分のモル分率 x_j として表わせることがわかる。ただし、式(4)中の p_j° は、純物質系の平衡蒸気圧を示す。

しかし、実在溶液に対しては、B9 の法則は厳密には成立しない。そこで活量 a の概念を導入し、実在溶液の化学ポテンシャルを、

$$\mu_{l,j}(T) = \mu_{v,j}^{\circ}(T) + RT \ln p_j^{\circ} + RT \ln a_j \quad (5)$$

と書き換える。また、活量とモル分率の比 (a_j/x_j) を活量係数として定義する。活量係数は、溶液が理想状態からどのくらいずれているかを示す一種の尺度であり、活量係数が BX に近いほど、理想状態に近いと言える。

広く利用されている水系溶媒用 pH 電極を使って非水系溶媒（例えば、水とエタノールの混合液）の pH を測定する場合、非水系溶媒における水素イオンの活量係数が水系と異なるため、測定された pH 値の取り扱いには十分に注意する必要がある。

- ① モル分率 ② 重量分率 ③ 溶解度
- ④ エントロピー ⑤ フガシティ ⑥ 小さくなる
- ⑦ 大きくなる ⑧ シャルル ⑨ ボイル
- ⑩ ラウール ⑪ マクスウェル ⑫ 0
- ⑬ 0.5 ⑭ 1

4. ダニエル電池に関する以下の文章を読み、設問に答えよ。 C1 ～ C7

ダニエル電池の放電反応を化学反応式で表すと、



となる。このとき、正極では C1 し、負極では C2 する。正極および負極の半電池反応における標準電極電位は、それぞれ $+0.337 \text{ V}$ および -0.763 V である。この電池の標準起電力 E° は、C3 V となる。また、標準反応ギブズエネルギー ΔG° を E° で表すとき

$$\Delta G^\circ = \text{C4} E^\circ \quad (2)$$

である。起電力 E と標準起電力 E° との間には、ネルンストの式より、

$$E = E^\circ + \frac{RT}{\text{C4}} \ln \frac{a_{\text{Zn}^{2+}} a_{\text{Cu}}}{a_{\text{Cu}^{2+}} a_{\text{Zn}}} \quad (3)$$

が成り立つ。ここで、化学種 i の活量を a_i で表した。金属の Zn と Cu はともに純粋物質であるため、 $a_{\text{Zn}} = a_{\text{Cu}} = 1$ となる。

電池における化学反応の平衡状態では、反応ギブズエネルギー ΔG と起電力 E がともにゼロとなる。したがって、標準反応ギブズエネルギー ΔG° と平衡定数 $K = \frac{a_{\text{Zn}^{2+}}}{a_{\text{Cu}^{2+}}}$ との間に

$$\Delta G^\circ = \text{C5} \quad (4)$$

が成り立ち、 $\ln K$ と標準起電力 E° との間に

$$\ln K = \text{C6} \quad (5)$$

が成り立っている。

また、電池の起電力 E と定圧条件下の起電力の温度係数 $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$ を測定すれば、次式より反応エントロピー ΔS を求めることができる。

$$\Delta S = \text{C7} \quad (6)$$

(1) ダニエル電池における反応を考え、**C1**，**C2** にあてはまる最も適切な選択肢を選べ。

- ① 酸化反応により亜鉛が亜鉛イオンとして溶出
- ② 酸化反応により亜鉛イオンが亜鉛として析出
- ③ 酸化反応により銅が銅イオンとして溶出
- ④ 酸化反応により銅イオンが銅として析出
- ⑤ 還元反応により亜鉛が亜鉛イオンとして溶出
- ⑥ 還元反応により亜鉛イオンが亜鉛として析出
- ⑦ 還元反応により銅が銅イオンとして溶出
- ⑧ 還元反応により銅イオンが銅として析出

(2) **C3** にあてはまる最も適切な選択肢を選べ。

- ① +0.337 ② +0.426 ③ +0.763 ④ +1.10
- ⑤ -0.337 ⑥ -0.426 ⑦ -0.763 ⑧ -1.10

(3) **C4** にあてはまる最も適切な選択肢を選べ。

- ① F ② $2F$ ③ $-F$ ④ $-2F$

(4) **C5** にあてはまる最も適切な選択肢を選べ。

- ① $\ln K$ ② $R \ln K$ ③ $RT \ln K$ ④ $-\ln K$ ⑤ $-R \ln K$ ⑥ $-RT \ln K$

(5) **C6** にあてはまる最も適切な選択肢を選べ。

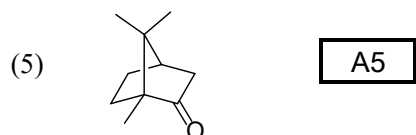
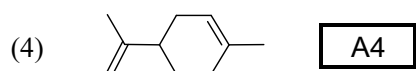
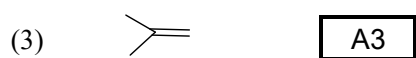
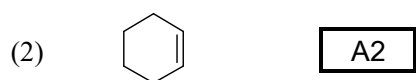
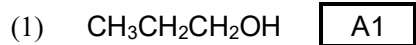
- ① $E^\circ \frac{F}{RT}$ ② $E^\circ \frac{2F}{RT}$ ③ $-E^\circ \frac{F}{RT}$ ④ $-E^\circ \frac{2F}{RT}$

(6) **C7** にあてはまる最も適切な選択肢を選べ。

- ① $F\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$ ② $2F\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$ ③ $-F\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$ ④ $-2F\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$
- ⑤ $FT\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$ ⑥ $2FT\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$ ⑦ $-FT\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$ ⑧ $-2FT\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$

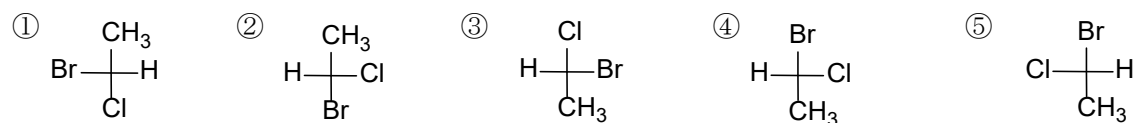
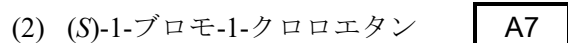
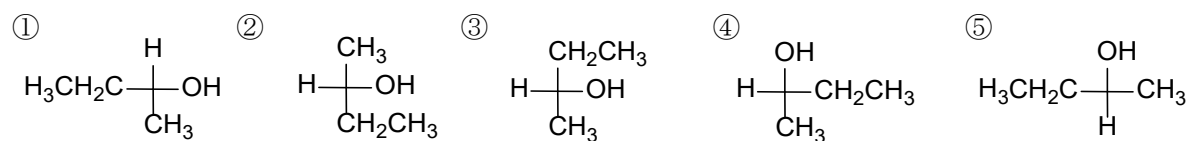
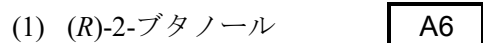
大問 8 (化学③)

1. 下記の(1)～(5)の化合物について、 sp^3 混成軌道である炭素原子の数を、①～⑨のうちからそれぞれ 1 つ選べ.

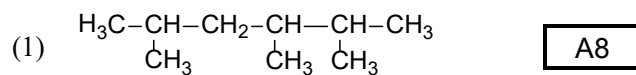


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 7 ⑧ 8 ⑨ 9

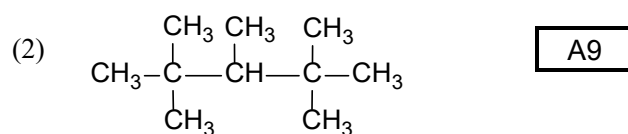
2. 下記の(1), (2)の化合物の構造式として適切なものを、①～⑤のうちからそれぞれ 1 つ選べ.



3. 下記の(1), (2)の化合物の IUPAC 名として適切なものを, それぞれ①～④のうちから 1 つ選べ.



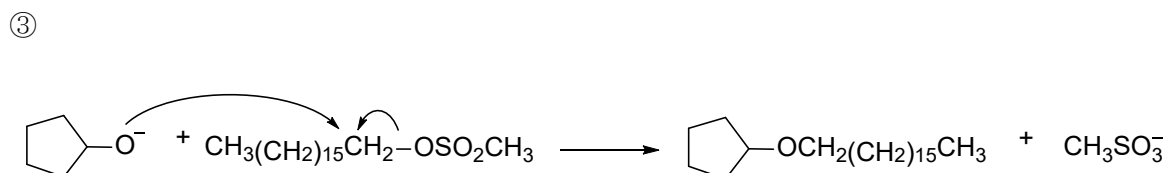
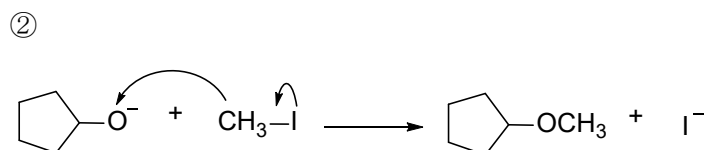
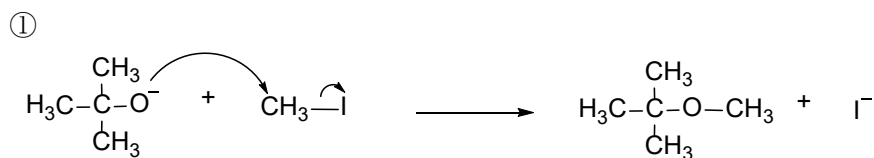
- ① 2-(1-メチルエチル)-4-メチルペンタン ② 2,3,5-トリメチルヘキサン
③ 4-メチル-2-(1-メチルエチル)-ペンタン ④ 2,4,5-トリメチルヘキサン



- ① 2,4,4-トリメチルヘプタン ② 2,2,3,4,4-ペンタメチルペンタン
③ 1,1-ジ-*tert*-ブチルエタン ④ 3-*tert*-ブチル-2,2-ジメチルブタン

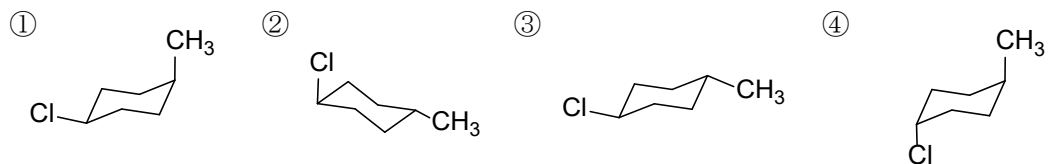
4. 下記の①～③の反応の電子の流れについて, 正しいものを 1 つ選べ.

AX

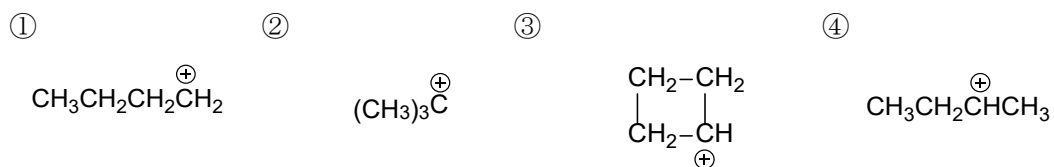


5. 下記の(1)～(3)に示した化合物の構造について、最も安定なものを①～④のうちからそれぞれ1つ選べ.

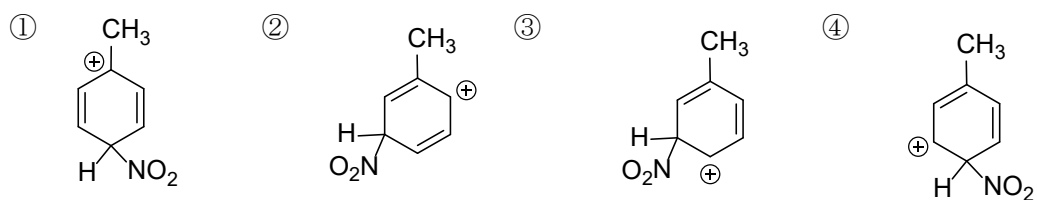
(1) B1



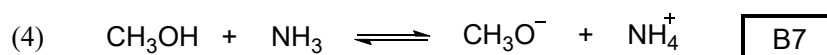
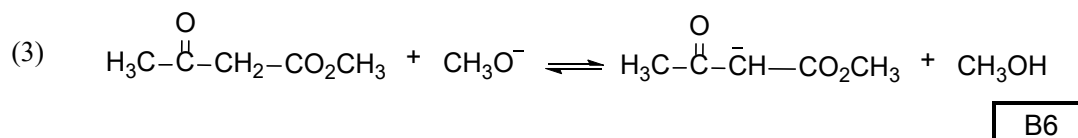
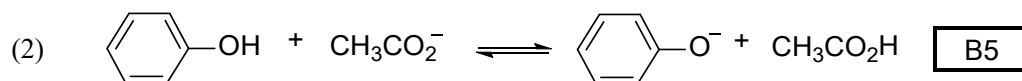
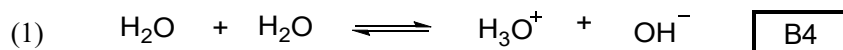
(2) B2



(3) B3



6. 下記の(1)～(4)の酸-塩基反応の平衡がどちらに偏っているかについて、①と②のうちから適切なものをそれぞれ1つ選べ。表1に示した pK_a の値を参考にせよ。

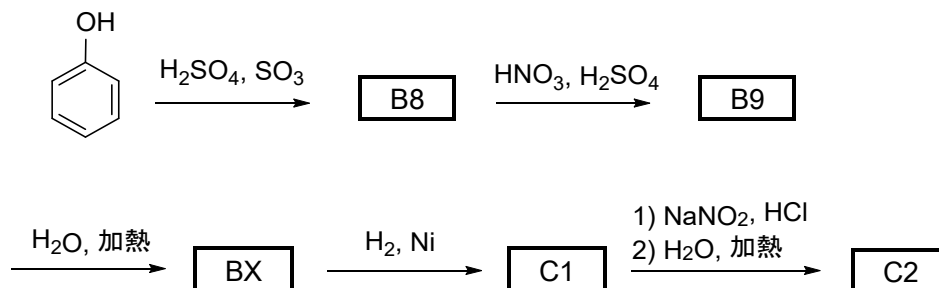


① 左 ② 右

表1 種々の化合物の pK_a 値

HNO_3	-1.4	CH_3OH	15.5
$\text{CCl}_3\text{CO}_2\text{H}$	0.7	H_2O	15.7
$\text{CH}_2(\text{NO}_2)_2$	3.6	$(\text{CH}_3)_3\text{COH}$	18
HCO_2H	3.8	$\text{C}_6\text{H}_5\text{C}\equiv\text{CH}$	18.5
$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$	4.8	CH_3COCH_3	20
$\text{CH}_2(\text{CHO})_2$	5	$\text{HC}\equiv\text{CH}$	25
H_2CO_3	6.35	NH_3	38
$\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}$	10	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$	41
CH_3NO_2	10.2	C_6H_6	43
$\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CO}_2\text{R}$	11	$\text{CH}_2=\text{CH}_2$	44
$\text{CH}_2(\text{CO}_2\text{R})_2$	13	CH_4	48

7. 下記の合成経路の空欄 **B8** ～ **C2** にあてはまる主生成物の化学構造式を、それぞれ1つずつ該当する選択肢から選べ。なお、多置換ベンゼンの位置異性体は分離できるものとする。

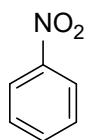


B8 , **B9**

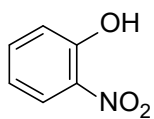
- | | | | |
|---|---|---|---|
| ① | ② | ③ | ④ |
| | | | |
| ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ |
| | | | |
| ⑨ | ⑩ | ⑪ | ⑫ |
| | | | |



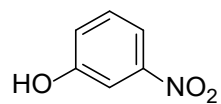
①



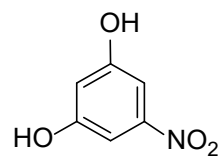
②



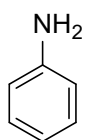
③



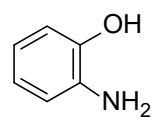
④



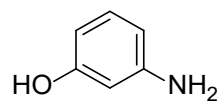
⑤



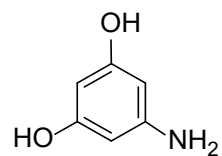
⑥



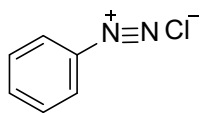
⑦



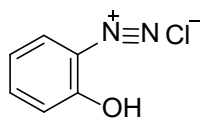
⑧



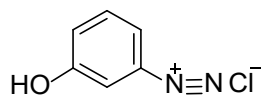
⑨



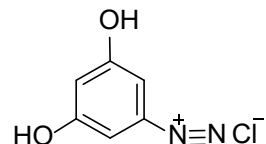
⑩



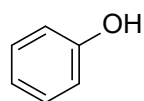
⑪



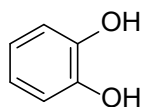
⑫



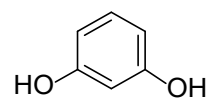
⑬



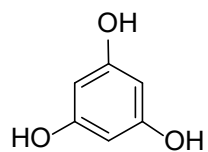
⑭



⑮



⑯



＜試験を終えた学生のみなさんへ＞

統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の 1 年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

＊統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp