

令和 04 年度 統一テスト

(理数基礎学力到達度テスト)

＜問題冊子②＞選択問題

大問 2 (数学②)

大問 3 (数学③)

大問 4 (物理学①)

大問 5 (物理学②)

大問 6 (化学①)

大問 7 (化学②)

大問 8 (化学③)

試験時間 2 時間

＊解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません＊

【問題を選択する際の注意】

1. 以下の問題選択ルールに従い、大問 7 問のうち 4 問に解答すること.

- a) 物理学、化学からそれぞれ 1 問は解答すること.
- b) 化学を 3 問とも選択することはできない.

2. したがって、選択問題の解答パターンは下記の 4 つのみとなる.

数学 2 問－物理学 1 問－化学 1 問

数学 1 問－物理学 2 問－化学 1 問

数学 1 問－物理学 1 問－化学 2 問

数学 0 問－物理学 2 問－化学 2 問

【解答する際の注意】

- 1. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚 (裏面もあり) を用いること.
- 2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること (マーク式のみの大問もあり).
- 3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は、問題文の **A1**, **A2**, ... にあてはまるものを該当する解答群 (選択肢) から選び、選択肢の番号①, ②... で答えること. 同じ選択肢が複数回あてはまることもある.
- 4. 空欄の中には通常の式では不要な「1」「-1」「0」が当てはまることがある. その場合も、式が成り立つために必要なものとして選択し、解答すること.
- 5. 問題に関する質問は、汚損で読めない等以外は原則認めない.

大問2（数学②）

次の各問に答えなさい。

1. $\mathbf{R}^4$ の 5 つのベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \alpha^2 \\ -9 \end{bmatrix}$ (α : 実数) の 1 次独立な最大個数 r を求めるための、行列の基本変形過

程を解答用紙裏面の記述解答欄 1 に書きなさい。次に、これに基づいて以下の問いに答えなさい。なお, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ を列ベクトル表示した次数 4 の正方行列を

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] \text{ とした場合に, 連立 1 次方程式 } A\mathbf{x}=\mathbf{a}_5, \ \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ において}$$

$\text{rank } A$ と $\text{rank } [A \mid \mathbf{a}_5]$ はそれぞれ係数行列と拡大係数行列の階数を表すものとする。

(1) $\alpha \neq \boxed{\text{A1}}$ のときは $r = \boxed{\text{A2}}$ であり, $\text{rank } A \ \boxed{\text{A3}} \ \text{rank } [A \mid \mathbf{a}_5] = \boxed{\text{A4}}$ であるので, $A\mathbf{x}=\mathbf{a}_5$ の解においては, $\boxed{\text{A5}}$.

(2) $\alpha = \boxed{\text{A6}}$ のときは $r = \boxed{\text{A7}}$ であり, $\text{rank } A \ \boxed{\text{A8}} \ \text{rank } [A \mid \mathbf{a}_5] = \boxed{\text{A9}}$ となり, $A\mathbf{x}=\mathbf{a}_5$ の解においては, $\boxed{\text{AX}}$. よって, $\boxed{\text{B1}}$ となり, 解の自由度は 1 である. ここで, その計算過程を上記の記述欄に続けて簡潔に書きなさい.

(3) $\alpha = \boxed{\text{B2}}$ のときは $r = \boxed{\text{B3}}$ であり, $\text{rank } A \ \boxed{\text{B4}} \ \text{rank } [A \mid \mathbf{a}_5] = \boxed{\text{B5}}$ となり, $A\mathbf{x}=\mathbf{a}_5$ の解においては, $\boxed{\text{B6}}$. よって, $\boxed{\text{B7}}$ となり, 解の自由度は 2 である. ここでも, その計算過程を上記の記述欄にさらに続けて簡潔に書きなさい.

A1 **A2** **A4** **A6** **A7** **A9** **B2** **B3** **B5** の解答群 _____

- ① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2 ⑥ -1
 ⑦ 0 ⑧ 1 ⑨ 2 ⑩ 3 ⑪ 4 ⑫ 5
 ⑬ 6 ⑭ ± 1 ⑮ ± 2 ⑯ ± 3 ⑰ ± 4 ⑱ ± 5
-

A3 **A8** **B4** の解答群 _____

- ① $\simeq$ ② $=$ ③ $\neq$ ④ $>$ ⑤ $<$ ⑥ $\in$
-

A5 **AX** **B6** の解答群 _____

- ① 各々ただ1つの x, y, z, w が存在する ② x, y, z, w が無数存在する
 ③ $x = 0$ かつ y, z, w が無数存在する ④ $y = 0$ かつ x, z, w が無数存在する
 ⑤ $w = 0$ かつ x, y, z が無数存在する ⑥ 自明な解が存在する ⑦ x, y, z, w が存在しない
-

B1 **B7** の解答群 (s, t : 任意定数) _____

- ① $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 ⑤ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ⑥ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑦ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 ⑧ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 ⑩ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
-

2. 行列式, 逆行列, 余因子行列およびベクトル空間の基底に関する以下の間に答えなさい.

(1) 実数 β, γ を含む行列を $B = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \gamma \\ \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \end{bmatrix}$ ($\beta \neq 0$) とすると, その行列式は

$|B| = \text{B8}$ となる. したがって, $\beta \neq \text{B9}$ の場合には B が正則となるので逆

行列が存在し, $B^{-1} = \text{BX} \begin{bmatrix} \text{C1} & \text{C2} & \text{C3} \\ \text{C4} & \text{C5} & \text{C6} \\ \gamma^2 & \text{C7} & \text{C8} \end{bmatrix}$ と求められる.

(2) $\mathbf{R}^n$ における 2 組の基底 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ と $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ の間に

$$[\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n] = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{の関係があるとき,}$$

n 次正方行列 $P = [p_{ij}]$ を基底変換の行列といい, 座標成分の変換式を導くのに有用である. 両基底は正則であるので, $P = \text{C9} \ \text{CX}$ となる.

ここで, 具体例として $n = 3$ をとりあげ, 上記 (1) の $\beta = 1, \gamma = 0$ の場合の行列

$$B \text{ を } [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3] \text{ として, また } [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ とすると,}$$

$P = \begin{bmatrix} \text{D1} & \text{D2} & \text{D3} \end{bmatrix}$ と求められる. 以上より, 直交デカルト座標

(x, y, z) において, xy 平面を z 軸のまわりに角度 θ だけ回転させて XYZ 軸になっ

たときの座標の変換式は, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{D1} & \text{D2} & \text{D3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ のように得られる.

B8 **BX** の解答群 _____

- | | | | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|--|-----------------------------------|--|
| ① $\beta - \gamma$ | ② $(\beta - \gamma)^{-1}$ | ③ $\gamma - \beta$ | ④ $(\gamma - \beta)^{-1}$ | ⑤ $\beta + \gamma$ |
| ⑥ $(\beta + \gamma)^{-1}$ | ⑦ $\beta^2 - \gamma^2$ | ⑧ $(\beta^2 - \gamma^2)^{-1}$ | ⑨ $\gamma^2 - \beta^2$ | ⑩ $(\gamma^2 - \beta^2)^{-1}$ |
| ⑪ $\beta^2 + \gamma^2$ | ⑫ $(\beta^2 + \gamma^2)^{-1}$ | ⑬ $\beta^3 - \gamma^3$ | ⑭ $(\beta^3 - \gamma^3)^{-1}$ | ⑮ $\beta^3 + \gamma^3$ |
| ⑯ $(\beta^3 + \gamma^3)^{-1}$ | ⑰ $\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma$ | ⑱ $(\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma)^{-1}$ | ⑲ $\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma$ | ⑳ $(\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma)^{-1}$ |

B9 および **C1** ~ **C8** の解答群 _____

- | | | | | | |
|----------------------|---------------------|------------------|-----------------|----------------------|---------------------|
| ① -2β | ② $-\beta$ | ③ $-\beta^2$ | ④ $-\beta^3$ | ⑤ β | ⑥ β^2 |
| ⑦ β^3 | ⑧ -2γ | ⑨ $-\gamma$ | ⑩ $-\gamma^2$ | ⑪ $-\gamma^3$ | ⑫ γ |
| ⑬ γ^2 | ⑭ γ^3 | ⑮ $-\beta\gamma$ | ⑯ $\beta\gamma$ | ⑰ $-\beta^2\gamma^2$ | ⑱ $\beta^2\gamma^2$ |
| ⑲ $-\beta^3\gamma^3$ | ⑳ $\beta^3\gamma^3$ | | | | |

C9 **CX** **D1** **D2** **D3** の解答群 _____

- | | | | |
|--|--|---|---|
| ① $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n]$ | ② $ \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n $ | ③ $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n]^{-1}$ | ④ $ \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n ^{-1}$ |
| ⑤ $[\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_n]$ | ⑥ $ \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_n $ | ⑦ $[\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_n]^{-1}$ | ⑧ $ \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_n ^{-1}$ |
| ⑨ $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ | ⑩ $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ | ⑪ $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ | ⑫ $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ |
| | | | ⑬ $\begin{matrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{matrix}$ |
| | | | ⑭ $\begin{matrix} -\sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{matrix}$ |
| ⑮ $\begin{matrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{matrix}$ | ⑯ $\begin{matrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{matrix}$ | ⑰ $\begin{matrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{matrix}$ | ⑱ $\begin{matrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{matrix}$ |
| | | | ⑲ $\begin{matrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{matrix}$ |
| | | | ⑳ $\begin{matrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{matrix}$ |

3. 2次元ベクトル空間から3次元ベクトル空間への線形写像 ($f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$) における

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \quad \text{について以下の問に答えなさい.}$$

(1) $f = Ax = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D4}} & \boxed{\text{D5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ より f の行列 $A = \begin{bmatrix} \boxed{\text{D4}} & \boxed{\text{D5}} \end{bmatrix}$ を得

るので, f の像の次元は $\dim(\text{Im } f) = \boxed{\text{D6}}$, その基底の組は $\{\boxed{\text{D7}}, \boxed{\text{D8}}\}$ と求められる.

ここで, f は $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} \boxed{\text{D4}} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \boxed{\text{D5}} \end{bmatrix}$ と表されることと,

$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ の写像を考慮すると, f の像是 $\boxed{\text{D9}}$ と $\boxed{\text{DX}}$ で定まる $\boxed{\text{E1}}$ で

あることが分かる.

(2) 一方, $\{g_1, g_2\}$ を $\mathbf{R}^2$ の基底, $\{h_1, h_2, h_3\}$ を $\mathbf{R}^3$ の基底とすると, 両基底間の関係は f の行列 A を用いて $[f(g_1) f(g_2)] = A [g_1 g_2] = [h_1 h_2 h_3] Q$ と表すことができ, $\boxed{\text{E2}}$ Q を線形写像 f の表現行列という.

ここで, $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{g_1, g_2\}$ を $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{R}^3$ の基底 $\{h_1, h_2, h_3\}$ を

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ と与えた場合の表現行列 Q は, $f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \boxed{\text{E3}}$, $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

$= \boxed{\text{E4}}$ となるので, $Q = \begin{bmatrix} \boxed{\text{E5}} & \boxed{\text{E6}} \end{bmatrix}$ と求められる.

D4 **D5** の解答群 _____

- ① $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- ⑦ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ⑧ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ⑨ $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ⑩ $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ ⑪ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ⑫ $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- ⑬ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ⑭ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ⑮ $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ⑯ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑰ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ ⑱ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ⑲ $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

D6 **E1** **E2** の解答群 _____

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 0
- ⑦ $\mathbf{R}^2$ 内の原点を通る直線 ⑧ $\mathbf{R}^2$ 内の原点を通らない直線 ⑨ $\mathbf{R}^2$ 内の原点を通る平面 ⑩ $\mathbf{R}^2$ 内の原点を通らない平面 ⑪ $\mathbf{R}^3$ 内の原点を通る直線 ⑫ $\mathbf{R}^3$ 内の原点を通らない直線 ⑬ $\mathbf{R}^3$ 内の原点を通る平面 ⑭ $\mathbf{R}^3$ 内の原点を通らない平面
- ⑮ 2×2 行列 ⑯ 2×3 行列 ⑰ 3×2 行列 ⑱ 3×3 行列 ⑲ 3×4 行列
- ⑳ 4×4 行列

D7 **D8** **D9** **DX** の解答群 _____

- ① $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑤ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ⑥ $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ⑦ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑩ $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

E3 ~ **E6** の解答群 _____

- ① $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$
- ⑦ $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑩ $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ⑪ $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ ⑫ $\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$

大問 3 (数学③)

1. 級数の収束を判定する際に、対応する無限積分の収束・発散によって調べる積分判定法が有用なことがある．以下に与えられる級数 C についてこの積分収束法を用いて収束する実数 k の範囲を求めなさい．

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$$

- (1) 正項級数 S_n が与えられたときを考える．適切な正値単調減少関数 $f(x)$ を用い、 x を $x_1=1, x_2=2, x_3=3, \dots, x_n=n$ と順に自然数で選ぶ．この級数の各項を $a_n = f(n)$ とすれば次式が成立して、この級数を関数で表すことができる．

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

x_i の間隔が 1 であるから、図に示すように、 S_n は実線で囲まれた長方形群の面積の和に等しい．よって、次の定積分より大きい．

A1

A2

 $\int f(x) dx$

一方、図中の点線で囲まれた長方形群の面積の和は、 a_2 に等しい面積の長方形から a_{n+1} に等しい面積の長方形までの和を T_{n+1} として

A3

 $T_{n+1} = \sum_{i=$

A4

 $f(i)$

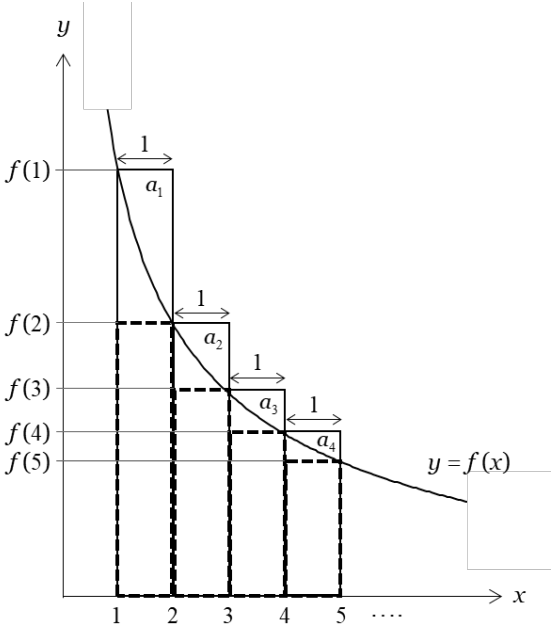
である．ここで、 S_{n+1} を $f(1)$ から $f(n+1)$ までの和として

$$S_{n+1} = T_{n+1} + f(1)$$

と定義する． $x=1$ から ∞ までの無限積分と無限級数について面積を比べると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{A5}} - f(\text{A6}) \leq \int_1^{\infty} f(\text{A7}) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{A8}}$$

の関係が成立する．無限積分が収束すれば級数の上限と下限になるので級数も収束する．一方、積分が発散すれば級数は発散する．



(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{x^k}$$

とおくと，問(1)より，級数 C は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$$

と書くことができるので，この級数に対応する無限積分を考える．この積分は $k =$ A9 で場合分けされる．

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{AX} & (k < \text{A9}) \\ \text{B1} & (k = \text{A9}) \\ \text{B2} & (k > \text{A9}) \end{cases}$$

以上より，級数が収束するのは k B3 A9 の場合である．

--- A1 ~ B2 の選択肢 -----

① 1 ② 2 ③ 3 ④ $n-1$ ⑤ n ⑥ $n+1$ ⑦ $x-1$ ⑧ x ⑨ $x+1$

⑩ $k-1$ ⑪ k ⑫ $k+1$ ⑬ $\frac{1}{k-1}$ ⑭ $\frac{1}{k}$ ⑮ $\frac{1}{k+1}$ ⑯ -1 ⑰ 0 ⑱ $-\infty$ ⑲ ∞

--- B3 の選択肢 -----

① $<$ ② $\leq$ ③ $=$ ④ $\geq$ ⑤ $>$

2. 広義積分 $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy$ を以下の手順で求めなさい. ただし, 領域 D は第 1 象限全体である.

(1) 領域 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ に含まれる領域として, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$ と $D_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq R\}$ を考える. 領域 D , D_1 , D_2 を解答用紙裏面の記述欄 1 に図示しなさい. 3 つの領域の位置関係が分かるように, 1 つの xy 座標系に描くこと.

(2) 領域 D_1 , D_2 の上で $f(x, y)$ を積分し, 各々における $R=1$ および $R \rightarrow \infty$ のときの値を求めなさい.

まず, 領域 D_1 の上で積分する.

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy &= \int_0^{\boxed{\text{B4}}} dx \int_0^{\boxed{\text{B5}}} \frac{1}{(x+y+1)^3} dy \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \boxed{\text{B6}} - \frac{\boxed{\text{B7}}}{\boxed{\text{B8}}+1} + \frac{\boxed{\text{B9}}}{\boxed{\text{BX}}+1} \right\} \end{aligned}$$

よって, $R=1$ では $\frac{1}{\boxed{\text{C1}}}$, $R \rightarrow \infty$ では $\frac{1}{\boxed{\text{C2}}}$ となる.

次に, 領域 D_2 の上で積分する.

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy &= \int_0^{\boxed{\text{C3}}} dx \int_0^{\boxed{\text{C4}}} \frac{1}{(x+y+1)^3} dy \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \boxed{\text{C5}} - \frac{\boxed{\text{C6}}}{\boxed{\text{C7}}+1} - \frac{\boxed{\text{C8}}}{(\boxed{\text{C9}}+1)^2} \right\} \end{aligned}$$

よって, $R=1$ では $\frac{1}{\boxed{\text{CX}}}$, $R \rightarrow \infty$ では $\frac{1}{\boxed{\text{D1}}}$ となる.

(3) 前問(2)より, $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy = \frac{1}{\boxed{\text{D2}}}$ と求められる.

--- $\boxed{\text{B4}} \sim \boxed{\text{D2}}$ の選択肢 -----

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 7 ⑧ 8 ⑨ 9 ⑩ 0
 ⑪ x ⑫ y ⑬ $x+y$ ⑭ $R+x$ ⑮ $R-x$ ⑯ $R+y$ ⑰ $R-y$ ⑱ R ⑲ $2R$ ⑳ R^2

3. 関数 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ に関する次の問に答えなさい．必要であれば次の概数値を用いること． $\ln 2 = 0.7, \ln 3 = 1.1, \ln 5 = 1.6, \ln 7 = 1.9, \ln 11 = 2.4, \ln 13 = 2.6, \ln 17 = 2.8$.

(1) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ の 1 次導関数および 2 次導関数を求め，解答用紙裏面の記述欄 2 に書きなさい．

(2) テイラー展開を利用して， $x = 2$ 近傍における関数 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ の 1 次近似式 y_1 と 2 次近似式 y_2 を求めよ． $(x - 2)$ の項の係数は，既約分数で答えよ．

$$1 \text{ 次近似式 } f(x) \approx y_1 = \ln \boxed{\text{D3}} + \frac{\boxed{\text{D4}}}{\boxed{\text{D5}}}(x - 2)$$

$$2 \text{ 次近似式 } f(x) \approx y_2 = \ln \boxed{\text{D3}} + \frac{\boxed{\text{D4}}}{\boxed{\text{D5}}}(x - 2) - \frac{3}{25}(x - 2)^2$$

(3) $x = 2$ 近傍の $x = 31/16$ における近似値を求め，関数値との誤差を確認する．

1 次近似式による値 1.55944

2 次近似式による値 1.55897

関数値 1.55897

このように，小数点以下 5 桁まで取っても，この関数の場合は 1 次近似でも誤差 $\boxed{\text{D6}}\%$ という高い精度で値を得ることができ，2 次近似では関数値と一致する．

(4) 解答用紙裏面の記述欄 3 に，関数 $y = \ln(x^2 + 1)$ と 1 次近似式 $y = y_1$ のグラフ概形を描きなさい．両方のグラフを 1 つの xy 座標系に描くこと．グラフ上には，極値点，変曲点，交点，接点も明記すること．

--- $\boxed{\text{D3}}$ ～ $\boxed{\text{D6}}$ の選択肢 -----

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 7 ⑧ 8 ⑨ 9 ⑩ 10
 ⑪ 11 ⑫ 16 ⑬ 25 ⑭ 36 ⑮ 49 ⑯ 0.0003 ⑰ 0.003 ⑱ 0.03 ⑲ 0.3 ⑳ 0

大問4（物理学 ①）

剛体の運動について以下の問に答えよ．本問ではベクトルを， $\mathbf{A}$ などのように太字で表し，2つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の内積（スカラー積）を $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ，外積（ベクトル積）を $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ と表す．また，物理量の時間微分をドットで表すことがある．たとえば dq/dt を $\dot{q}$ ， d^2q/dt^2 を $\ddot{q}$ などのように表す．

1. 剛体が一様重力場の中で運動するときの角運動量と重力によるトルクについて考える．慣性座標系の座標原点 O を基準にした，剛体内の位置 $\mathbf{r}$ における剛体の密度（単位体積当たりの質量）を $\rho(\mathbf{r})$ ，速度を $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ とすると， O を基準にした剛体の角運動量 $\mathbf{L}$ は次式で定義される．

$$\mathbf{L} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \boxed{\text{A1}} \, dx \, dy \, dz$$

ただし，積分記号の添え字 V は，積分領域が剛体の占める領域であることを示す．

また，重力加速度ベクトルを $\mathbf{g}$ とすると， O を基準にした重力によるトルク $\mathbf{N}$ は次式で定義される．

$$\mathbf{N} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \boxed{\text{A2}} \, dx \, dy \, dz$$

剛体の質量 M と重心の位置 $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \, dx \, dy \, dz$ を使うと，この式を次のように書き換えることができる．

$$\mathbf{N} = M \boxed{\text{A3}}$$

剛体を微小領域に分割して，各微小領域を質点と見なし，質点に対するニュートンの運動方程式を適用すると，剛体の角運動量に対する次の運動方程式が導かれる．

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \tag{1}$$

$\boxed{\text{A1}}$ ～ $\boxed{\text{A3}}$ の解答群

- | | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|--|--|
| ① $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ | ② $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ | ③ $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ | ④ $\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}$ | ⑤ $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ |
| ⑥ $\mathbf{g} \times \mathbf{r}$ | ⑦ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$ | ⑧ $\mathbf{v} \times \mathbf{g}$ | ⑨ $\mathbf{g} \times \mathbf{v}$ | ⑩ $\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}$ |
| ⑪ $\mathbf{R} \times \mathbf{g}$ | ⑫ $\mathbf{g} \times \mathbf{R}$ | ⑬ $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{g}$ | ⑭ $\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{g}$ | ⑮ $\mathbf{g} \times \dot{\mathbf{R}}$ |

(空白ページ)

2. 図 1 のように、長さ l で細くて軽い棒の一端に質量 M の小球を取り付ける．棒の他端 O を支点にして、この棒がなめらかに回転できるように、一様重力場中に吊り下げる．棒と小球で構成される系をひとつの剛体と見なして、この剛体の運動について調べよう．ただし、棒の太さと質量および小球の大きさは無視できるものとする．そうすると、この剛体の重心の位置は小球の位置に一致する．

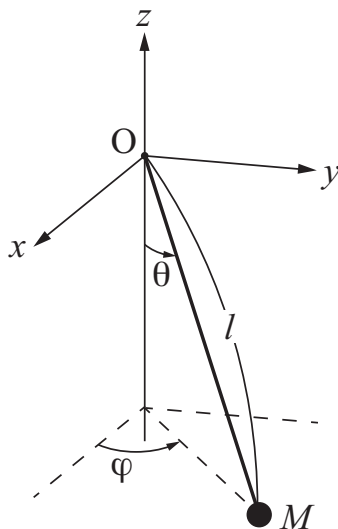


図 1: 細くて軽い棒の一端に小球を取り付け、他端 O を支点として吊り下げる．

- (1) 図 1 のように、 O を原点として、水平面内に x 軸と y 軸をとり、鉛直上向きに z 軸をとる． z 軸の負の側の半直線と棒のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とし、棒を xy 面に射影した像を x 軸の正方向から測った角度を φ ($-\infty < \varphi < \infty$) とする．小球の位置ベクトル $\mathbf{R}$ を直交座標成分で表すと

$$\mathbf{R} = l(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \boxed{\text{A4}})$$

となる．したがって、重力加速度の大きさを g とすると、剛体に作用する重力による（点 O を基準にした）トルク $\mathbf{N}$ は

$$\mathbf{N} = Mgl(\boxed{\text{A5}}, \boxed{\text{A6}}, \boxed{\text{A7}}) \quad (2)$$

で与えられる．

$\boxed{\text{A4}} \sim \boxed{\text{A7}}$ の解答群

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ① $\cos \theta$ | ② $\sin \theta$ | ③ $-\cos \theta$ | ④ $-\sin \theta$ |
| ⑤ $\cos \theta \cos \varphi$ | ⑥ $\cos \theta \sin \varphi$ | ⑦ $\sin \theta \cos \varphi$ | ⑧ $\sin \theta \sin \varphi$ |
| ⑨ $-\cos \theta \cos \varphi$ | ⑩ $-\cos \theta \sin \varphi$ | ⑪ $-\sin \theta \cos \varphi$ | ⑫ $-\sin \theta \sin \varphi$ |
| ⑬ 0 | | | |

- (2) 図 1 において, $0 < \theta < \pi$ の範囲で, θ が一定の値をもつ運動が起きるための条件を, 運動方程式 (1) を用いて求めよう.

その準備として, 点 O を基準にした剛体の角運動量 $\mathbf{L}$ (小球の角運動量に等しい) について考える. 小球の速度 $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = l\dot{\varphi}(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \boxed{\text{A8}})$$

であるから, 剛体の角運動量 $\mathbf{L}$ は次のようになる.

$$\mathbf{L} = \boxed{\text{A9}}(\cos\theta\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\theta\sin\varphi, \boxed{\text{AX}}) \quad (3)$$

$\boxed{\text{A8}} \sim \boxed{\text{AX}}$ の解答群

① $\cos\theta$	② $\sin\theta$	③ $\cos^2\theta$	④ $\sin^2\theta$
⑤ $\cos\theta\sin\theta$	⑥ $-\cos\theta$	⑦ $-\sin\theta$	⑧ $-\cos^2\theta$
⑨ $-\sin^2\theta$	⑩ $-\cos\theta\sin\theta$	⑪ 0	⑫ $Ml\dot{\varphi}$
⑬ $Ml^2\dot{\varphi}$	⑭ $Ml\dot{\varphi}^2$		

式 (2) と式 (3) を運動方程式 (1) に代入して, 両辺の z 成分を比べると, $0 < \theta < \pi$ を仮定していることに注意して, 次の関係が得られる.

$$\ddot{\varphi} = \boxed{\text{B1}} \quad (4)$$

この結果と運動方程式の x 成分から, 次の関係が得られる.

$$\dot{\varphi}^2 = \boxed{\text{B2}} \quad (5)$$

運動方程式の y 成分からも同じ関係が得られる. ここで, 式 (5) の左辺の取り得る値は $0 \leq \dot{\varphi}^2 < \infty$ の範囲にあるので, この式から, θ の可能な範囲が $\boxed{\text{B3}}$ であることがわかる.

式 (4) と式 (5) と $\boxed{\text{B3}}$ が, θ が一定の値をもつ運動が起きるための条件である.

$\boxed{\text{B1}} \sim \boxed{\text{B3}}$ の解答群

① $\frac{g}{l}\cos\theta$	② $\frac{g}{l}\sin\theta$	③ $-\frac{g}{l}\cos\theta$	④ $-\frac{g}{l}\sin\theta$
⑤ $\frac{g}{l\cos\theta}$	⑥ $\frac{g}{l\sin\theta}$	⑦ $-\frac{g}{l\cos\theta}$	⑧ $-\frac{g}{l\sin\theta}$
⑨ 0	⑩ $0 < \theta < \pi/3$	⑪ $0 < \theta < \pi/2$	⑫ $0 < \theta < \pi$

3. 図 2(a) のように、質量 M 、長さ $2l$ の細くて均質な剛体棒を、その一端 O を支点として、ある鉛直面内でなめらかに回転できるように、一様重力場中に吊り下げる．この図のように、点 O を原点として、この鉛直面内の水平方向に y 軸をとり、鉛直上向きに z 軸をとる． x 軸は紙面の裏から表を向く．この棒の x 軸のまわりの慣性モーメントは $I = 4Ml^2/3$ である．図 2(a) のように、 z 軸の負の側の半直線を基準にして、反時計回りに測った棒の角度を θ とする ($-\infty < \theta < \infty$) ．

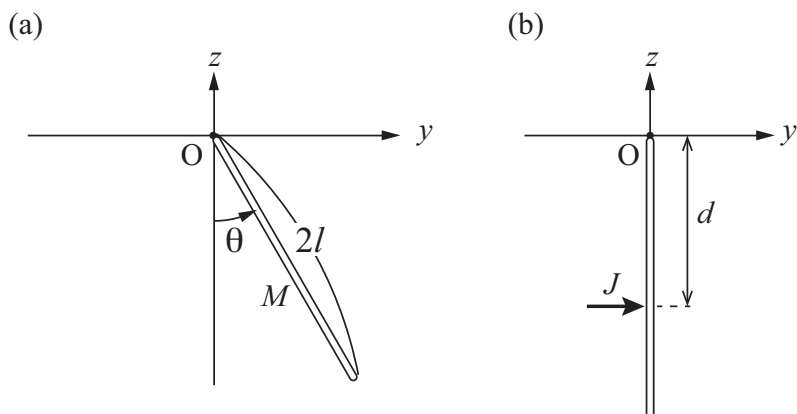


図 2: 剛体棒が、その一端 O を支点として yz 面内で運動する．

このような、 yz 面内の運動では、点 O を基準にした棒の角運動量の y 成分と z 成分は 0 であり、 x 成分は $\dot{\theta}$ を用いて $L_x = \text{B4}$ と表される．

図 2(b) に示すように、 $\theta = 0$ の位置に棒が静止している状況で、点 O からの距離が d の棒上の点に、水平右向きの撃力を加える場合の運動を考える．撃力による力積の大きさを J とする．運動方程式 (1) を用いて、撃力を加えた直後の棒の回転角速度 $\dot{\theta}$ の値 ω_0 を求めると、 $\omega_0 = \text{B5}$ となる．

撃力を加えた後で、任意の θ において、 $\dot{\theta} = 0$ となることがなければ、棒は振動せずに回転を続ける．角速度 $\dot{\theta}$ と回転角 θ の関係は、 B6 保存則を利用すると、導くことができ、重力加速度の大きさを g として、次の結果を得る．

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 + \text{B7} \cdot \text{B8}$$

したがって、 $\omega_0^2 > \text{B9}$ であれば、棒は回転を続けることがわかる．

B4 ~ B7 , B9 の解答群			
① $I\dot{\theta}$	② $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	③ $Ml\dot{\theta}$	④ $Ml^2\dot{\theta}$
⑤ $\frac{J}{I}$	⑥ $\frac{Jd}{I}$	⑦ $\frac{J}{M}$	⑧ $\frac{J}{Ml^2}$
⑨ $\frac{Jd}{Ml^2}$	⑩ $\frac{g}{2l}$	⑪ $\frac{g}{l}$	⑫ $\frac{3g}{2l}$
⑬ $\frac{2g}{l}$	⑭ $\frac{3g}{l}$	⑮ $\frac{4g}{l}$	⑯ 運動量
⑰ 角運動量	⑱ エネルギー		
B8 の解答群			
① $\cos \theta$	② $(1 - \cos \theta)$	③ $(\cos \theta - 1)$	④ $\sin \theta$
⑤ $(1 - \sin \theta)$	⑥ $(\sin \theta - 1)$		

大問 5 (物理学②)

理想気体内の 1 次元波動に関する以下の問に答えなさい。

ここでは図 1 の断面積 S のシリンダを考え、その左端は、原点で x 軸に垂直に設置した気密振動板で x 方向に微小変位できる。右端は $x = l$ で気密固定壁として、両端も含めすべて断熱壁のシリンダ内に理想気体が密封されている。理想気体は粘性のない圧縮性流体である。振動板から気体に作用する応力と気体の圧力が原点でつり合う静止状態では、気体の圧力が p_0 、シリンダ内体積が $V_0 (= Sl)$ 、気体密度が ρ_0 、気体の絶対温度が T_0 とする。

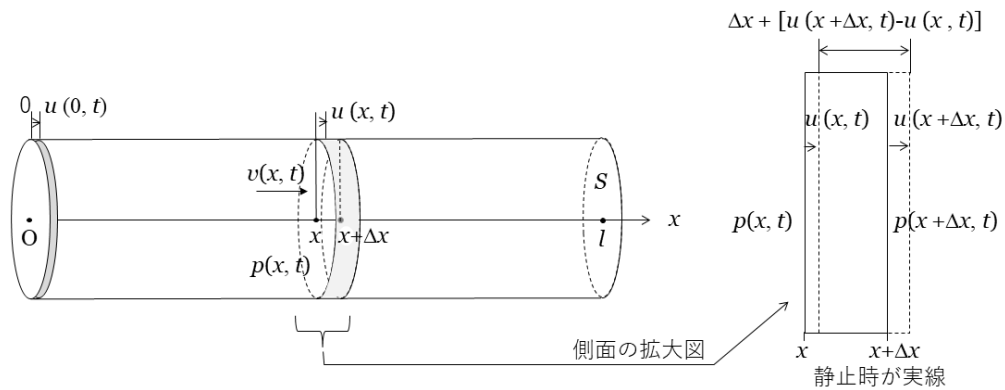


図 1

シリンダ内気体の静止時に座標区間 $[x, x+\Delta x]$ にあった幅 Δx の微小領域の気体を考える。その静止時体積を $\Delta V_0 (= S \Delta x)$ とする。その微小領域気体の時刻 t における静止時からの変位を $u(x, t)$ とする。ここで時刻 t における振動板の x 軸正向きの変位 $u(0, t)$ は振幅 b ($\ll l$) を用いて次式で与えられる。

$$u(0, t) = b \sin \omega t \quad (1)$$

ω は角振動数である。シリンダの右端は固定壁であるから

$$u(l, t) = 0 \quad (2)$$

である。これらがシリンダ内 1 次元波動関数の満たすべき境界条件である。

1. 応力とひずみの関係

ここで気体の比熱比 γ は $\gamma=c_p/c_v$ (定数 >1) である. c_p と c_v はそれぞれ気体の定圧比熱と定積比熱である. 振動板の運動に伴って起こる気体の運動は座標と時間に依存する. 断熱圧縮された時の (x,t) における微小領域気体の体積を ΔV , 圧力を p とすると断熱圧縮の式

$$p\Delta V^\gamma = p_0\Delta V_0^\gamma \quad (3)$$

が成り立つ. 幅 Δx の微小領域気体の圧力の静止時からの微小増分 (以後音圧という) $p'(x,t)$ ($=p(x,t)-p_0$) と伸びひずみ $\varepsilon(x,t)$ との関係を求める. この問題では条件 $|p'(x,t)/p_0| \ll 1$ が成り立つとする. 幅 Δx の微小領域気体の x 方向の伸びひずみ ε も $|\varepsilon| \ll 1$ とする. 図1右の拡大図より

$$\varepsilon(x,t) = [\boxed{\text{A1}} - u(x,t)] / \Delta x$$

であるから, Δx の無限小極限を考え微分表記をすると次の式が得られる.

$$\varepsilon = \boxed{\text{A2}} \quad ((x,t) \text{ を省略}) \quad (4)$$

断熱圧縮の式(3)に $p'(x,t)$ と $u(x,t)$ と $\Delta V_0 = S \Delta x$ の関係をを用いると次式が成り立つ.

$$p\Delta V^\gamma = \boxed{\text{A3}} \cdot (1 + \boxed{\text{A4}}) \cdot (1 + \boxed{\text{A2}})^\gamma = p_0\Delta V_0^\gamma$$

実数 α が $|\alpha| \ll 1$ であれば2次微小量を見捨て1次近似式 $(1+\alpha)^\gamma \approx 1+\gamma\alpha$ が成り立つから, ヤング率を E としたときの引張応力 $(-p')$ と伸びひずみ ε の比例関係

$$-p' = E\varepsilon, \quad E = \boxed{\text{A5}} \quad (5)$$

が得られる. $\boxed{\text{A5}}$ は気体の体積弾性率に等しい. すなわち変位 $u(x,t)$ から音圧 $p'(x,t)$ を求めることができる. また微小領域気体の x 軸正方向の速度 $v(x,t)$ は, 変位 $u(x,t)$ の $\boxed{\text{A6}}$ 微分によりを求めることができる.

A1～A6 の選択肢

- | | | | | | |
|-------------------|---------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------|--------------------------|
| ① $u(x,t)$ | ② $u(x+\Delta x,t)$ | ③ $\frac{\partial u}{\partial x}$ | ④ $-\frac{\partial u}{\partial x}$ | ⑤ $p_0\Delta V_0$ | ⑥ $p_0\Delta V_0^\gamma$ |
| ⑦ $p_0V_0^\gamma$ | ⑧ p'/p_0 | ⑨ $(\gamma-1)p_0$ | ⑩ γp_0 | ⑪ 空間 | ⑫ 時間 |

微小領域気体の密度 $\rho(x,t)$ は体積に逆比例する性質 $\rho\Delta V = \rho_0\Delta V_0$ より次式が成り立つ.

$$\rho(x,t) = \boxed{\text{A7}} \rho_0$$

これより密度変動量 $\rho'(x,t)$ ($= \rho(x,t) - \rho_0$) も変位 $u(x,t)$ から求めることができる. ここで条件 $|\rho'(x,t)/\rho_0| \ll 1$ が成り立つとして 1 次近似により密度の変動量 $\rho'(x,t)$ は

$$\rho'(x,t) = \boxed{\text{A8}} \rho_0 \quad (6)$$

となる. 式(4), (5), (6)から音圧 $p'(x,t)$ と密度変動量 $\rho'(x,t)$ との比例関係が得られる.

$$p'(x,t) = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \rho'(x,t) \quad (7)$$

ここまで用いた条件 $|\varepsilon| \ll 1$, $|\rho'(x,t)/\rho_0| \ll 1$, $|p'(x,t)/p_0| \ll 1$ が波動方程式の導出に必要な条件である. 次に波動方程式を導出し, それを解いて変位 $u(x,t)$ を求める.

A7～A8 の選択肢

- ① $u(x,t)$ ② $-u(x,t)$ ③ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ④ $-\frac{\partial u}{\partial x}$ ⑤ $(1 + \frac{\partial u}{\partial x})$ ⑥ $(1 + \frac{\partial u}{\partial x})^{-1}$

2. 波動方程式導出の基となる質量の保存則と運動方程式

時刻 t でシリンダ内区間 $[x, x+\Delta x]$ にある微小領域気体の微小時間 Δt 後の変化を考える. ここでは気体速度 $v(x,t)$ を用いて, 微小領域気体の Δt 後の移動量は $|v\Delta t| \ll \Delta x$ である場合を考える. そうすると, Δt 間に微小領域への気体の出入りが微小体積内気体量に比べてずっと少ない. 質量保存則により, 質量の変化は Δt の間に左側から入る質量と右側から出る質量の差より次式が成り立つ.

$$\rho(x,t+\Delta t)S\Delta x - \rho(x,t)S\Delta x = - [\boxed{\text{A9}} - \rho(x,t)v(x,t)] S\Delta t$$

両辺を $S\Delta x\Delta t$ で割り, Δt と Δx の無限小極限を考え, 微分方程式で表すと次式となる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad ((x,t) \text{ を省略}) \quad (8)$$

次に区間 $[x, x+\Delta x]$ にある微小領域気体に作用する x 軸正方向きの力は, 微小領域の左側と右側に作用する圧力の差から決まり, 微小領域にある気体の微小時間 Δt 後の運動量の変化をもたらす. 微小領域気体の運動量の増分は次式となる.

$$[\rho(x, t + \Delta t)v(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)v(x, t)]S\Delta x = - [\boxed{AX}] S\Delta t$$

両辺を $S\Delta x\Delta t$ で割り、 Δt と Δx の無限小極限を考えれば、次の微分方程式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\boxed{B1}) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad ((x, t) \text{ を省略}) \quad (9)$$

A9～AX, B1 の選択肢

- ① $\rho(x + \Delta x, t)$ ② $\rho(x + \Delta x, t)v(x + \Delta x, t)$ ③ $\rho(x + \Delta x, t)v(x, t)$
 ④ $p(x + \Delta x, t) - p(x, t)$ ⑤ $p(x, t + \Delta t) - p(x, t)$ ⑥ v ⑦ ρv ⑧ ρv^2

3. 波動方程式

次に、式(8)と式(9)から波動方程式を導く。音圧 $p'(x, t)$ と密度変動量 $\rho'(x, t)$ との関係は式(7)ですでに得ている。式(9)の両辺を x で偏微分して式(7)と式(8)を代入すると次の波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad c^2 = \boxed{B2} \quad (10)$$

c が音速である。

同様に、音圧 $p'(x, t)$ と変位 $u(x, t)$ との関係を示す式(4)と式(5)を式(9)に代入すれば2次微小量を見捨てることで次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11)$$

これが、変位 $u(x, t)$ の波動方程式である。

B2 の選択肢

- ① γp_0 ② $\frac{p_0}{\rho_0}$ ③ $\frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ ④ $\gamma p_0 p_0$

4. 定在波

波動方程式(11) の解のうち，境界条件(1)と(2)を満たすものを求めるために，

$$u(x,t) = f(x) \sin \omega t \quad (12)$$

という解を仮定する．境界条件(1)と(2)より， $f(x)$ は次の条件を満たさなければならない．

$$f(0) = b, \quad f(l) = 0 \quad (13)$$

式(12)の $u(x,t)$ を波動方程式(11)に代入し波数 $k = \omega / c$ を用いると $f(x)$ が満たす方程式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f \quad (14)$$

が得られる．この微分方程式の一般解を

$$f(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (15)$$

とおく．境界条件(13)より A と B が決定される．

$$A = \boxed{\text{B3}} \quad B = \boxed{\text{B4}}$$

したがって次式 $f(x)$ と変位 $u(x,t)$ の解を得る．

$$f(x) = \frac{b}{\sin kl} \sin k(l-x) \quad (16)$$

$$u(x,t) = \frac{b}{\sin kl} \sin k(l-x) \cdot \sin \omega t \quad (17)$$

B3～B4 の選択肢

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|-----------------|-----------------|
| ① 0 | ② b | ③ $b / \sin kl$ | ④ $b / \cos kl$ |
| ⑤ $\frac{b \sin kl}{\cos kl}$ | ⑥ $-\frac{b \cos kl}{\sin kl}$ | | |

シリンダ内最大変位振幅は式(17)より整数 $n (\neq 0)$ を用いて $kl = \boxed{\text{B5}}$ のときに無限大になる（但し $n = 0$ は振動しないので対象外）．この波数が共鳴波数 k_{rn} である．しかし，共鳴波数では波動方程式を導出する際の条件 $|\varepsilon| \ll 1$ に反する．共鳴波数を除いて，許容できる $k > 0$ ($n > 0$)の波数域を次に考える．

たとえば $kl = (n - 0.5)\pi$ とすれば，最大伸びひずみは式(4)より $|kb|$ となり， n が小さければ条件 $|\varepsilon| \ll 1$ を満たす． $0 < kl < 0.5\pi$ であれば kl が0に近い値では，式(17)からシリンダ内は左端の振幅と比べて $\boxed{\text{B6}}$ 振幅の振動となる．

ここで $l = 1 \text{ m}$ ， $b = 1 \text{ mm}$ としてシリンダ内最大の変位振幅が3 mm以上を許容しない場合，共鳴波数 k_{rn} に近い波数 k の許容範囲は $|k_{rn} - k|l \boxed{\text{B7}}$ である．許容される波数 k における変位 u の定在波の振幅の例を図2に示す．

（補足： $\sin 0.07\pi = 0.218$ ， $\sin 0.09\pi = 0.279$ ， $\sin 0.11\pi = 0.339$ ， $\sin 0.15\pi = 0.454$ ）

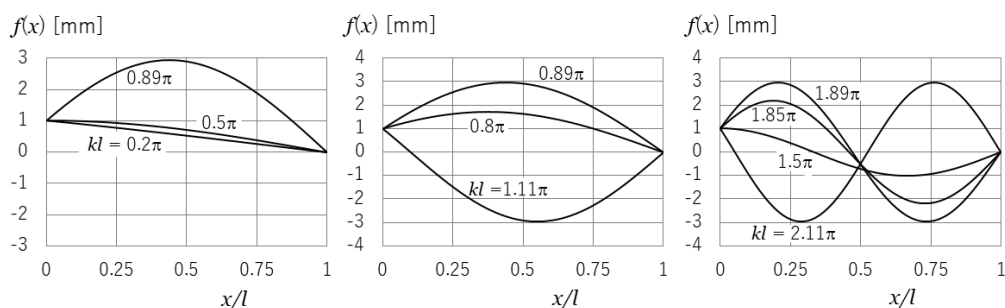


図2 シリンド内許容波数の変位 u の定在波振幅の例（図中の 0.5π 等は kl の値）

式(4),(6),(7) と式(17)をもとに $\rho'(x,t)$ の振幅は **B8** $\left| \frac{\cos k(l-x)}{\sin kl} \right|$, $p'(x,t)$ の振幅は

B9 $\left| \frac{\cos k(l-x)}{\sin kl} \right|$ となる．これらの振幅より，波動方程式(11)と(13)を導くために用い

た3条件 $|\varepsilon| \ll 1$, $|\rho'(x,t)/\rho_0| \ll 1$, $|p'(x,t)/p_0| \ll 1$ の中で **BX** が振動板の振幅 b をも

B5～B6, B8～B9 の選択肢 （注：B7 は次の選択肢）

① $n\pi$	② $(2n-1)\pi/2$	③ $(2n-1)\pi c/2l$	④ $\rho_0 kb$
⑤ $n\pi c/l$	⑥ $\gamma p_0 kb$	⑦ kb	⑧ $p_0 kb$
⑨ $\gamma \rho_0 kb$	⑩ ckb	⑪ kb/c	⑫ 大
		⑬ 小	

B7 の選択肢

① $>0.07\pi$	② $>0.11\pi$	③ $<0.11\pi$	④ $<0.15\pi$
--------------	--------------	--------------	--------------

BX の選択肢

① $ \varepsilon \ll 1$	② $ \rho'(x,t)/\rho_0 \ll 1$	③ $ p'(x,t)/p_0 \ll 1$
-------------------------	-------------------------------	-------------------------

大問 6 (化学①)

必要があれば，以下の物理定数値を使うこと．

プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	電子の質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
電子の電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$	真空中での光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

1. 電磁波の量子エネルギーおよび電子線の波長に関する以下の設問(1)～(4)に答えよ．

(1) 波長 λ の電磁波の量子エネルギー E は以下の式で計算できる．空欄に適切なものを下の①～④のうちから1つ選べ．ここで， ν は振動数である． A1 , A2

$$E = h \frac{\text{A1}}{\text{A2}}$$

- ① λ ② m_e ③ c ④ ν

(2) 波長 600 nm の電磁波の量子エネルギーとして最も適切なものを，下の①～⑧のうちから1つ選べ． A3

- ① $2.01 \times 10^{-72} \text{ J}$ ② $1.01 \times 10^{-57} \text{ J}$ ③ $1.33 \times 10^{-48} \text{ J}$ ④ $1.77 \times 10^{-46} \text{ J}$
 ⑤ $3.77 \times 10^{-45} \text{ J}$ ⑥ $2.49 \times 10^{-21} \text{ J}$ ⑦ $3.32 \times 10^{-19} \text{ J}$ ⑧ $4.37 \times 10^{-10} \text{ J}$

(3) 速度 v の電子線の波長 λ_B は以下の式で計算できる．空欄に適切なものを下の①～④のうちから1つ選べ．ここで， ν は振動数である． A4 , A5

$$\lambda_B = h \frac{1}{\text{A4 \text{A5}}$$

- ① v ② m_e ③ c ④ ν

(4) 速度 200 km s^{-1} の電子線の波長として最も適切なものを，下の①～⑧のうちから1つ選べ． A6

- ① $1.11 \times 10^{-47} \text{ m}$ ② $1.11 \times 10^{-44} \text{ m}$ ③ $2.07 \times 10^{-20} \text{ m}$ ④ $2.07 \times 10^{-17} \text{ m}$
 ⑤ $3.64 \times 10^{-9} \text{ m}$ ⑥ $3.64 \times 10^{-6} \text{ m}$ ⑦ $1.09 \times 10^0 \text{ m}$ ⑧ $1.09 \times 10^3 \text{ m}$

2. 波動方程式および水素類似原子の波動関数に関連する以下の記述 $a \sim e$ には誤っているものが2つある。その組み合わせを、下の①～⑩のうちから1つ選べ。 A7

- a シュレーディンガーの波動方程式を解いて得られる関数を波動関数または、振幅関数という。
- b ボルンは、振幅関数の2乗が座標 x, y, z に電子を見出す確率に比例することを提案した。
- c 1つの核と1つの電子で構成される最も簡単な系である水素類似原子では、電子は核を中心とする球対称ポテンシャルにあり、電子のポテンシャルエネルギーは、核からの距離 r と運動エネルギー $(1/2)mv^2$ の関数になる。
- d 方位量子数 $l = 0$ の波動関数は、核からの距離 r と角度変数 θ と ϕ を含む球対称性関数であり、これにより表される電子の状態を s 状態という。
- e 方位量子数 $l = 1$ の場合は p 状態と呼び、磁気量子数 $m_l = 0, \pm 1$ に対応する3つの状態に分けられる。この3つの状態のエネルギーが全く等しいため、このような p 状態を3重に縮退しているという。

- | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| ① a と b | ② a と c | ③ a と d | ④ a と e | ⑤ b と c |
| ⑥ b と d | ⑦ b と e | ⑧ c と d | ⑨ c と e | ⑩ d と e |

3. 有効核電荷に関連する以下の記述 $a \sim e$ には正しいものが2つある。最も適切な組み合わせを、次のページの①～⑩のうちから1つ選べ。参考として、表1に第1～第3周期の元素 (H～Ar) について、各軌道の有効核電荷数 Z^* を示す。 A8

- a 1電子原子系では、電子には核から正電荷の影響を直接受けるのに対し、多電子系では静電場の一部が中和されてしまう。この中和効果を遮蔽効果という。
- b 遮蔽効果によって、内側の電子に届く静電場が強められることで、外側の電子に届く核の正電荷が減少したようになる。この見かけの正電荷を有効核電荷 ($+Z^*e$) という。
- c 元素の電気陰性度や原子、イオンのサイズを見積もるときには、有効核電荷を決して用いることはない。
- d 電子の数が増えると主量子数の大きい殻まで電子が占有するようになるが、このような殻では軌道間のエネルギー差が接近しているため電子雲が複雑に絡み合うものの、軌道のエネルギー準位が逆転することはない。
- e 最外殻電子は内殻電子に比較して有効核電荷数 ($+Z^*$) が大幅に減少しており、同じ原子の価電子について s 軌道電子、p 軌道電子とも接近した値を示す。

表 1 各軌道の有効核電荷数, Z^*

	H							He
Z	1							2
1s	1.00							1.69
	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
Z	3	4	5	6	7	8	9	10
1s	2.69	3.68	4.68	5.67	6.66	7.66	8.65	9.64
2s	1.29	1.91	2.58	3.22	3.85	4.49	5.13	5.76
2p			2.42	3.14	3.83	4.45	5.10	5.76
	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar
Z	11	12	13	14	15	16	17	18
1s	10.63	11.61	12.59	13.57	14.56	15.54	16.52	17.51
2s	6.57	7.39	8.21	9.02	9.82	10.63	11.43	12.23
2p	6.80	7.83	8.96	9.94	10.96	11.98	12.99	14.01
3s	2.51	3.31	4.12	4.90	5.64	6.37	7.07	7.76
3p			4.07	4.29	4.89	5.48	6.12	6.76

- ① a と b ② a と c ③ a と d ④ a と e ⑤ b と c
 ⑥ b と d ⑦ b と e ⑧ c と d ⑨ c と e ⑩ d と e

4. 化学結合に関連する以下の設問(1)～(5)に答えよ.

(1) Li_2 の分子軌道の配置は, $(\sigma_{1s})^2(\sigma_{1s}^*)^2(\sigma_{2s})^2$ である. 結合次数として最も適切なものを, 下の選択肢から 1 つ選べ. A9

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 0

(2) HF の双極子モーメントの実験値は $6.10 \times 10^{-30} \text{ C m}$ である. 一方, HF 核間距離の実測値から完全に電子が移動したものとして計算した双極子モーメントの値は $14.7 \times 10^{-30} \text{ C m}$ である. このとき, HF のイオン性の割合として最も適切なものを, 下の選択肢から 1 つ選べ. AX

- ① 240% ② 140% ③ 70% ④ 60% ⑤ 40%

(3) アセチレンの炭素原子がつくる混成軌道として最も適切なものを, 下の選択肢から 1 つ選べ. B1

- ① sp 軌道 ② sp^2 軌道 ③ sp^3 軌道 ④ dsp^3 軌道 ⑤ d^2sp^3 軌道

(4) ブタジエンの炭素原子がつくる混成軌道として最も適切なものを, 下の選択肢から 1 つ選べ. B2

- ① 全て sp 軌道 ② 全て sp^2 軌道 ③ sp 軌道と sp^2 軌道
④ 全て dsp^3 軌道 ⑤ 全て d^2sp^3 軌道 ⑥ dsp^3 軌道と d^2sp^3 軌道

(5) ベンゼンの炭素間の結合は何重結合か, 下の選択肢から 1 つ選べ. B3

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0.5 ⑤ 1.5 ⑥ 2.5

(空白ページ)

5. 固体のバンド構造について、図1を参考に以下の文章を読み、設問 (1)～(2)に答えよ。

1つの金属原子のまわりを8個もしくは12個の割合で金属原子が取り囲み、金属結晶が形成される。原子の最外殻の原子軌道は相互に重なり合い、分子軌道のようなものが金属全体に広がる。金属原子は **B4** の **B5** 価電子を持っており、金属全体に行き渡る。価電子を放出した正電荷の原子芯は価電子の作り出す電子雲に取り囲まれる。この電子雲を多数の原子が共有することで原子間の結合が成立する。これを金属結合という。金属結合には **B6** 。

図1に示すように、巨視的な金属内には膨大な数の原子が存在しているので、それぞれの原子からつくられる分子軌道の数もきわめて多くなる。その分子軌道間のエネルギー差は小さく、事実上、連続と見なしても差し支えない。このような分子軌道の集合をバンド(帯)という。金属に電位差を与えると、電子はエネルギーを獲得し、**B7** から空のバンドに昇位しながら、**B8** 電位の方向に沿って移動する。すなわち、電流を生ずる。

図1のように、**B7** と空のバンド(帯)の間を **B9** と呼び、電子はその **B9** のエネルギーをとることが許されない。1つのバンド(帯)が全部電子で埋まり、次の上位のバンド(帯)までの **B9** の幅が大きいと、電子は空のバンドに移ることが困難になる。このような物質は **BX** で電気を通さない。電子が熱程度のエネルギーによって空のバンドに移ることができるような、幅の狭い **B9** をもつ物質が **C1** である。したがって、**C1** は温度を上げると **C2** が **C3** 。

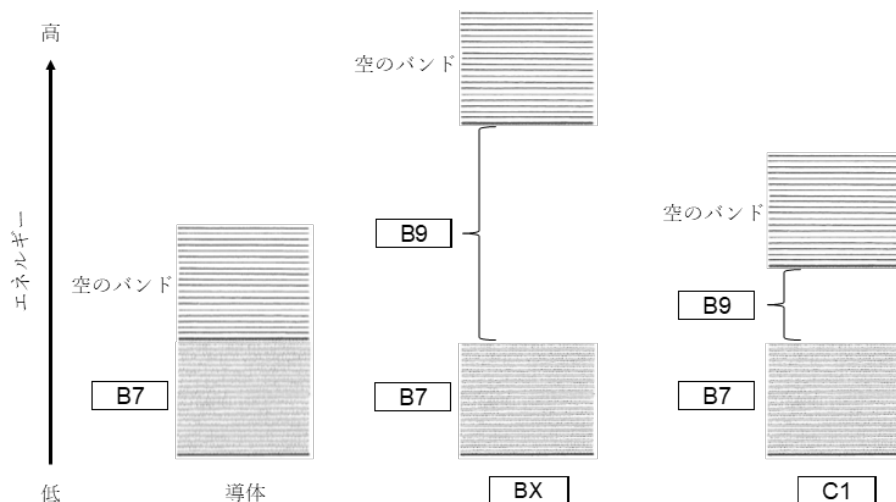


図1 固体のバンド構造

(1) **B4** ～ **B6** に当てはまる語句として最も適切なものを下の選択肢から1つずつ選べ.

- | | | |
|----------|---------|-------------|
| ① 小さい | ② 大きい | ③ 方向性がない |
| ④ 方向性がある | ⑤ 電気陰性度 | ⑥ イオン化エネルギー |
| ⑦ 電子親和力 | | |

(2) **B7** ～ **C3** に当てはまる語句として最も適切なものを下の選択肢から1つずつ選べ.

- | | | |
|---------|-------------|------------|
| ① 充満バンド | ② 禁止バンド | ③ 半導体 |
| ④ 絶縁体 | ⑤ 電気伝導度 | ⑥ 電気陰性度 |
| ⑦ 電子親和力 | ⑧ イオン化エネルギー | ⑨ 活性化エネルギー |
| ⑩ 増大する | ⑪ 変わらない | ⑫ 減少する |
| ⑬ 正 | ⑭ 中性 | ⑮ 負 |

大問 7 (化学②)

以下の問に答えよ。空欄 **A1** ～ **C2** にあてはまる最も適切なものを、選択肢からそれぞれ1つずつ選べ。ただし、特に指定しない場合は、温度、体積、圧力をそれぞれ T , V , P で表す。同様に、熱、仕事をそれぞれ q , w で、エンタルピー、内部エネルギーをそれぞれ H , U で表す。

1. 熱力学の第二法則について考える。これは、変化の方向を規定する経験則である。**A1** は、この法則を、図1に示すように、「熱機関が高熱源から熱をもらい仕事をするとき、低熱源に熱を全く排出させないで全部の熱を仕事に変えることはできない」と表現している。これに対し、高熱源から熱をもらい、低熱源に排出しないで熱を100%仕事に変える機関を **A2** という。しかし、我々は経験上このようなことは不可能であることを知っている。自発的な変化の方向と、その不可逆性の程度を定量的に表わすため、以下に示すエントロピー S という熱力学的な状態量が導入される。

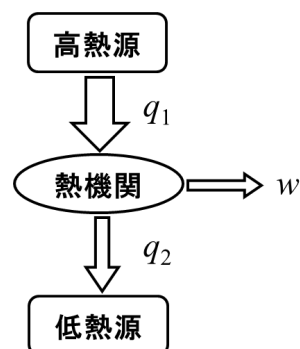


図1 熱機関の熱の流れ(q_1, q_2)と仕事(w)

まず、状態 A から状態 B に可逆的に変化するときのエントロピーの変化量 ΔS は次式で表される。

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta q}{T} = S_B - S_A \quad (1)$$

等温可逆変化においては、熱の移動量 q_T を用いて

$$\Delta S = \frac{q_T}{T} \quad (2)$$

となる。外界と系の間で熱が移動するとき、その移動する方向によって q_T の符号が変わる。すなわち、系に熱が入るとき、 ΔS は正となりエントロピーは増大する。反対に系から熱が出るとき、 ΔS は負となりエントロピーが減少する。

そこで、液体が気体になる場合の相変化に伴うエントロピーの変化を考える。液体(相1) → 気体(相2)の変化が一定の圧力、温度の下で進行するとき、 ΔS は次式で表される。

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} = \frac{q}{T} \quad (3)$$

q は液体が気化するとき吸収する熱量、すなわち気化熱である。ここで、圧力が一定であることを考慮すると、 ΔS はさらに次式で表される。

$$\Delta S = \boxed{\text{A3}} \quad (4)$$

気化のとき、エントロピーが $\boxed{\text{A4}}$ 。固体から液体への変化（融解）や固体から気体への変化（昇華）のような相変化の場合も同様に取り扱うことができる。

例えば、氷の融解熱は 6.0 kJ/mol 、水の蒸発熱は 40 kJ/mol である。これより、 1 mol の水が 0°C (273 K) で融解するときのエントロピー変化を求めると、 $\boxed{\text{A5}}$ $\text{J/(K}\cdot\text{mol)}$ となる。また、水が 100°C (373 K) で蒸発するときのエントロピー変化も同様に求めると、融解によるエントロピー変化の $\boxed{\text{A6}}$ 倍となる。

(1) $\boxed{\text{A1}}$, $\boxed{\text{A2}}$

- | | | |
|-----------|-------------|-------------|
| ① Planck | ② Kelvin | ③ Boltzmann |
| ④ Gibbs | ⑤ Arrhenius | ⑥ Clausius |
| ⑦ 第一種永久機関 | ⑧ 第二種永久機関 | ⑨ 第三種永久機関 |

(2) $\boxed{\text{A3}}$

- | | | |
|----------------------|------------------------|------------------------|
| ① $\Delta U \cdot T$ | ② $\frac{\Delta U}{T}$ | ③ $\frac{T}{\Delta U}$ |
| ④ $\Delta H \cdot T$ | ⑤ $\frac{\Delta H}{T}$ | ⑥ $\frac{T}{\Delta H}$ |

(3) $\boxed{\text{A4}}$

- | | | |
|--------|--------|---------|
| ① 増加する | ② 減少する | ③ 変わらない |
|--------|--------|---------|

(4) $\boxed{\text{A5}}$, $\boxed{\text{A6}}$

- | | | | | |
|--------|-------|------|--------|--------|
| ① 0.02 | ② 0.2 | ③ 2 | ④ 20 | ⑤ 0.05 |
| ⑥ 0.5 | ⑦ 5 | ⑧ 50 | ⑨ 0.08 | ⑩ 0.8 |
| ⑪ 8 | ⑫ 80 | | | |

2. 液相 - 気相平衡について考える．液相と気相からなる二成分系の温度を一定に保った場合，この系の組成比を定めると蒸気圧が決まる．一般に多成分系において，溶液と平衡にある蒸気中の i 成分の分圧 p_i は，溶液中の i 成分のモル分率 x_i に比例する．これを式で表すと

$$p_i = p_i^\circ x_i \quad (1)$$

となる．ここで， p_i° は純液体 i が同じ温度で単独で示す平衡蒸気圧である．上式の関係性を **A7** と呼ぶ．例えば，A, B からなる二成分系では，

$$p_A = \text{A8} \cdot \text{A9} \quad (2)$$

$$p_B = \text{AX} \cdot \text{B1} \quad (3)$$

となる．実際の溶液では **A7** からのずれを示すが，**B2** (x_A または x_B が 1 に近い溶液) ではこれに近い蒸気圧を示す．**A7** に厳密に従う溶液を **B3** という．**B3** と平衡にある蒸気の全圧を P とすると， $x_A + x_B = 1$ であるため，次式が得られる．

$$P = p_A + p_B = p_A^\circ + \text{B4} x_B \quad (4)$$

これより， P は x_B に伴い直線的に変化する．

図 2 は，実際の A, B からなる二成分系の溶液の分圧曲線 (実線) を **B3** 曲線 (破線) と比較したものである．一般に，**B3** からのずれには分子間の相互作用が関与している．例えば，A と B 間の相互作用が A 同士，B 同士よりも強いときは **B5** なる．アセトンとクロロホルムの二成分系はその一例であり，両成分の間に相互的に強い結合が存在する．

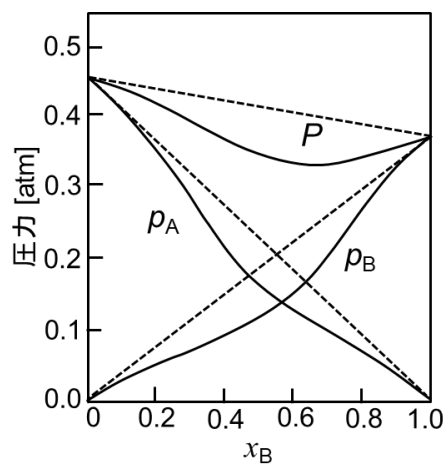


図2 A, B からなる二成分系溶液の分圧 (p_A, p_B) と全圧 (P) の模式図

(1) **A7**

- | | | |
|---------------|-------------------------|--------------|
| ① Trouton の規則 | ② Gibbs の相律 | ③ Raoult の法則 |
| ④ Henry の法則 | ⑤ Clausius–Clapeyron の式 | |

(2) **A8** ~ **B1** , **B4**

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| ① p_A° | ② p_B° | ③ P |
| ④ $(p_A^\circ - p_B^\circ)$ | ⑤ $(p_B^\circ - p_A^\circ)$ | ⑥ $(p_B^\circ + p_A^\circ)$ |
| ⑦ x_A | ⑧ x_B | |

(3) **B2** , **B3** , **B5**

- | | | |
|----------|----------|----------|
| ① 濃厚溶液 | ② 緩衝溶液 | ③ 希薄溶液 |
| ④ 理想溶液 | ⑤ 実在溶液 | ⑥ 電解質溶液 |
| ⑦ 融解しやすく | ⑧ 昇華しやすく | ⑨ 気化しやすく |
| ⑩ 融解しにくく | ⑪ 昇華しにくく | ⑫ 気化しにくく |

3. 反応速度の表し方について考える．反応が進行しているときは，時間と共に反応物が減少し生成物が増大する．反応速度は，単位時間あたりに変化する反応物または生成物の物質量（変化速度）を用いて表される．次のような反応を考える．



反応速度 v_1 は時間と共に変わるので，次のように微分の形で示される． C_i は i 成分のモル濃度を表す．

$$v_1 = -\frac{1}{a} \frac{dC_A}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{dC_B}{dt} = \boxed{\text{B6}} \frac{dC_C}{dt} = \boxed{\text{B7}} \frac{dC_D}{dt} \quad (2)$$

前述の反応(1)の右方向への速度は，反応物の濃度の関数として，次式のように表されるものとする．

$$v_1 = k_1 \cdot C_A^{n_A} \cdot C_B^{n_B} \quad (3)$$

k_1 を右方向（または正方向）への速度定数と呼ぶ．べき数 n_A, n_B は必ずしも係数 a, b に等しいとは限らない．反応物 A に対して n_A 次，B に対して n_B 次などというが，反応全体に対しては $n (= \boxed{\text{B8}})$ 次反応， n を反応次数と呼ぶ． n は整数とは限らず，分数の場合もある．反応次数は測定によって求められる値で，反応の仕組みを調べるときの重要な手掛かりとなる．

反応(1)が進むに従って生成物の濃度が高くなり，それに伴い逆方向の反応がより進行するようになる．



この反応の速度式は，同様に

$$v_2 = k_2 \cdot (\boxed{\text{B9}}) \quad (5)$$

と書くことができる．従って，全体としての反応速度は正方向と逆方向の速度差，すなわち

$$v = v_1 - v_2$$

で表される．正方向に進む速度と逆方向に進む速度が完全につり合い，全体としての反応速度 v がゼロの状態になるとき，速度論的に見た反応の $\boxed{\text{BX}}$ という．

例えば, アンモニア生成反応



において, C_{NH_3} の変化速度は, 実験で測定された時間当たりの変化量に基づき, 次のように求められた.

$$\frac{dC_{\text{NH}_3}}{dt} \cong \frac{\Delta C_{\text{NH}_3}}{\Delta t} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ mol}/(\text{dm}^3 \cdot \text{s}) \quad (7)$$

この値を用いて, C_{N_2} の変化速度を求めると C1 $\text{mol}/(\text{dm}^3 \cdot \text{s})$ となる. 同様に C_{H_2} の変化速度を求めると C2 $\text{mol}/(\text{dm}^3 \cdot \text{s})$ となる.

(1) B6 , B7

- | | | | |
|----------|---------|----------|---------|
| ① $-1/c$ | ② $1/c$ | ③ $-c/a$ | ④ c/a |
| ⑤ $-c/b$ | ⑥ c/b | ⑦ $-1/d$ | ⑧ $1/d$ |
| ⑨ $-d/a$ | ⑩ d/a | ⑪ $-d/b$ | ⑫ d/b |

(2) B8 , B9

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| ① $n_A \cdot n_B$ | ② $n_B - n_A$ | ③ $n_A - n_B$ | ④ $n_A + n_B$ |
| ⑤ $C_A^{n_A} \cdot C_B^{n_B}$ | ⑥ $-C_A^{n_A} \cdot C_B^{n_B}$ | ⑦ $C_C^{n_C} \cdot C_D^{n_D}$ | ⑧ $-C_C^{n_C} \cdot C_D^{n_D}$ |

(3) BX

- | | | | |
|---------|--------|---------|--------|
| ① 停止状態 | ② 定常状態 | ③ 非定常状態 | ④ 平衡状態 |
| ⑤ 非平衡状態 | | | |

(4) C1 , C2

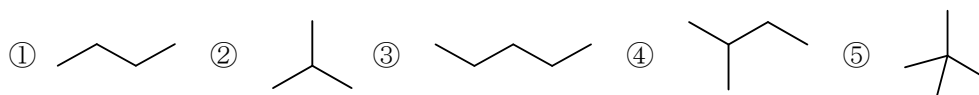
- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① -0.1×10^{-4} | ② -0.5×10^{-4} | ③ -1.0×10^{-4} | ④ -2.0×10^{-4} |
| ⑤ -3.0×10^{-4} | ⑥ -4.0×10^{-4} | ⑦ -5.0×10^{-4} | ⑧ -6.0×10^{-4} |
| ⑨ 0.1×10^{-4} | ⑩ 0.5×10^{-4} | ⑪ 1.0×10^{-4} | ⑫ 2.0×10^{-4} |
| ⑬ 3.0×10^{-4} | ⑭ 4.0×10^{-4} | ⑮ 5.0×10^{-4} | ⑯ 6.0×10^{-4} |

大問 8 (化学③)

1. 以下の化合物①～⑤の沸点について，下記の(1)～(4)にあてはまるものをそれぞれ1つ選べ．

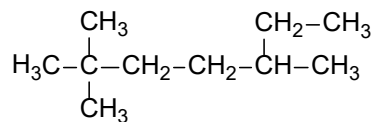
- (1) 最も沸点の高いもの
 (2) 最も沸点の低いもの
 (3) 2番目に沸点の高いもの
 (4) 2番目に沸点の低いもの

A1
A2
A3
A4



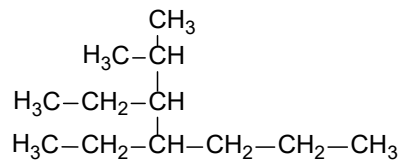
2. 下記の(1)，(2)の化合物の IUPAC 名として適切なものを，それぞれ①～④のうちから1つ選べ．

- (1) A5



- ① 3,6,6,6-テトラメチルヘキサン ② 2,2,5-トリメチルヘプタン
 ③ 4-エチル-1,1,1-トリメチルペンタン ④ 5-エチル-2,2-ジメチルヘキサン

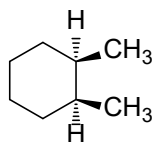
- (2) A6



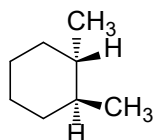
- ① 4-エチル-3-(1-メチルエチル)ヘプタン ② 3-エチル-2-メチル-4-プロピルヘキサン
 ③ 3,4-ジエチル-2-メチルヘプタン ④ 3-(1-メチルエチル)-4-プロピルヘキサン

3. 下記の(1), (2)の化合物 A, B および C, D の立体配置として正しい組み合わせを,
①～④のうちからそれぞれ 1 つ選べ.

(1) A7



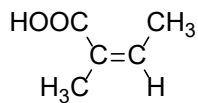
A



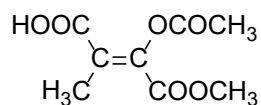
B

- ① 化合物 A が *cis* 体, 化合物 B が *cis* 体
- ② 化合物 A が *cis* 体, 化合物 B が *trans* 体
- ③ 化合物 A が *trans* 体, 化合物 B が *cis* 体
- ④ 化合物 A が *trans* 体, 化合物 B が *trans* 体

(2) A8



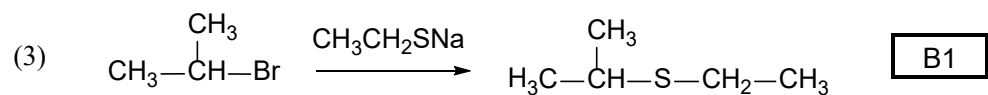
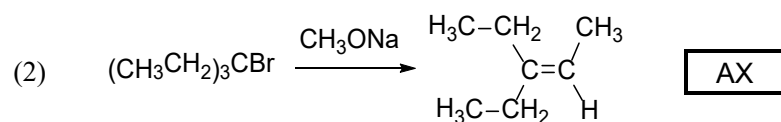
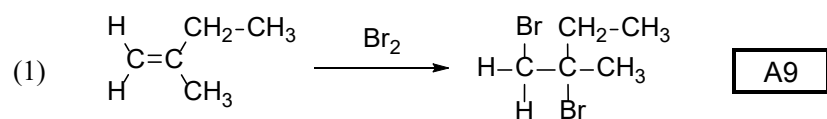
C



D

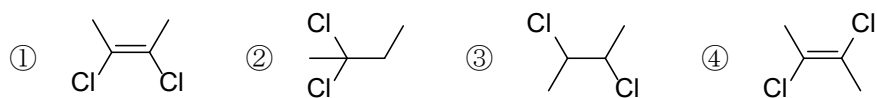
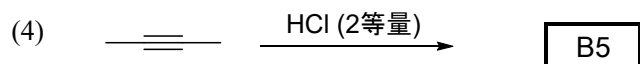
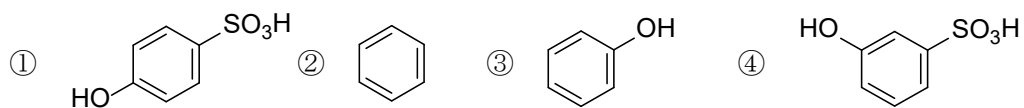
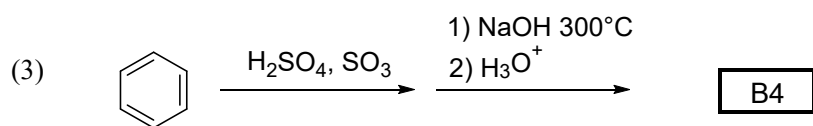
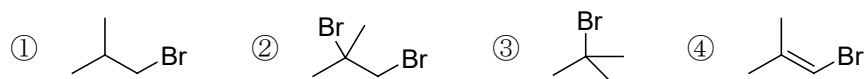
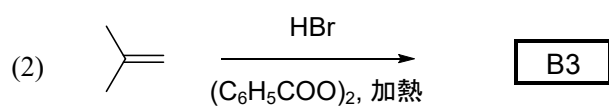
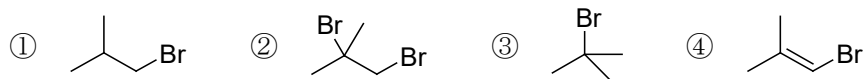
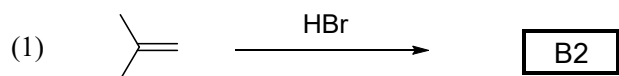
- ① 化合物 C が *E* 体, 化合物 D が *E* 体
- ② 化合物 C が *E* 体, 化合物 D が *Z* 体
- ③ 化合物 C が *Z* 体, 化合物 D が *E* 体
- ④ 化合物 C が *Z* 体, 化合物 D が *Z* 体

4. 下記の(1)～(3)の反応の分類について、①～⑧のうちから最も適切な反応を1つ選べ.

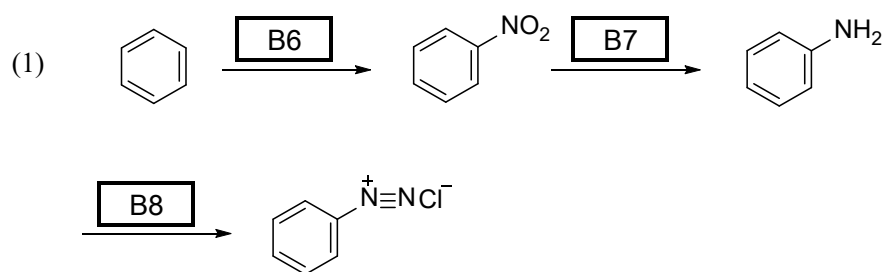


- ① 求電子付加反応 ② 求核付加反応 ③ 一分子求核置換反応 (S_N1)
 ④ 転位反応 ⑤ 求電子置換反応 ⑥ 二分子求核置換反応 (S_N2)
 ⑦ 一分子脱離反応 (E1) ⑧ 二分子脱離反応 (E2)

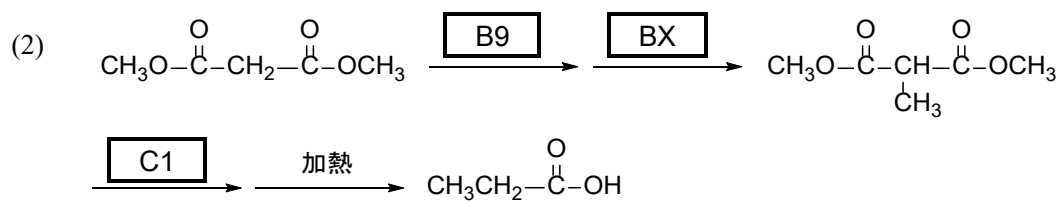
5. 下記の(1)～(4)の反応の主生成物を，1つずつ①～④のうちから選べ.



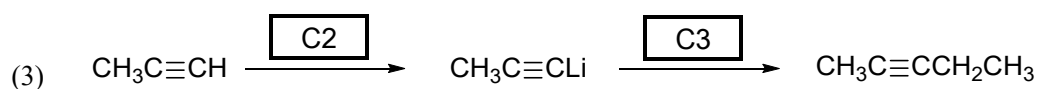
6. 下記の(1)～(3)の合成経路に用いられる最適な反応剤を、それぞれ与えられた選択肢のうちから1つ選べ。



- ① $\text{H}_2\text{N}-\text{NH}_2$ ② $\text{HNO}_3, \text{H}_2\text{SO}_4$ ③ FeCl_3
 ④ $\text{H}_2, \text{Pd/C}$ ⑤ HNO_2, HCl ⑥ AlCl_3



- ① $\text{CH}_3\text{ONa}, \text{CH}_3\text{OH}$ ② CH_3Br ③ CH_2I_2
 ④ $\text{HCl}, \text{H}_2\text{O}$ ⑤ $(\text{CH}_3\text{CO})_2\text{O}$ ⑥ H_2O_2



- ① LiAlH_4 ② $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Br}$ ③ $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{Li}$
 ④ $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{MgBr}$

(空白ページ)

＜試験を終えた学生のみなさんへ＞

統一テストは入学試験や定期試験のように合否を決める試験ではありません。あくまでも、本学工学部の 1 年次を終了した学生であれば身に付けておいて欲しい数学・物理学・化学の基礎学力を測る試験です。つまり、出題された問題は全て、学生のみなさんに出来て欲しいものばかりです。分からなかった問題について、また、選択しなかった問題についても、教科書等を見ながら再度考えてみてください。統一テストを受験することにより、そして試験成績を知ることにより、自分自身の理数系基礎学力を客観的に振り返り、次の学習へと役立てることを期待しています。

＊統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp