

令和 06 年度 統一テスト

(理数基礎学力到達度テスト)

<問題冊子①> 必答問題

大問 1 (数学①)

試験時間 45 分間

解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません

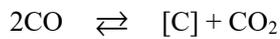
【解答する際の注意】

1. 大問 1 専用の解答用紙 1 枚 (裏面もあり) を用いること.
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること.
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は, 問題文の空欄 **A1**, **A2**, … にあてはまるものを該当する解答群 (選択肢) から選び, 選択肢の番号①, ② … で答えること. 同じ選択肢が複数回あてはまることもある.
4. 空欄の中には通常の数式では不要な「1」「-1」「0」が当てはまることがある. その場合も, 式が成り立つために必要なものとして選択し, 解答すること.
5. 問題に関する質問は, 汚損で読めない等以外は原則認めない.

大問1(数学①)必答問題

鉄鋼は、多くの用途に使われている代表的な材料であり、その基本元素は鉄と炭素である。大気圧における鉄と炭素の系の状態図を図 1-1 に示す。目的に応じた鉄鋼材料とするために、引張強さ、粘り強さ(靱性)、硬さ(耐摩耗性)などの性質が、炭素濃度 u や温度 T に依存することを利用する。ここでは、荷重も摩擦も受ける小型の鉄鋼製部品(歯車や連結ピンなど)に注目する。

このような使用条件に耐えるためには、内部は粘り強く、表面近傍は硬くなければならない。そのために、低炭素濃度の鉄鋼に浸炭処理を施して、表面近傍のみを高炭素濃度にする。浸炭では、原子状の炭素 $[C]$ が鉄鋼中に浸透する。広く用いられるガス浸炭では、炭素は鉄鋼表面において、例えば次のような平衡反応により鉄鋼に供給される。



本問では、図 1-1 の灰色の楕円で示す領域におけるガス浸炭処理により、鉄鋼(γ 相)に炭素が浸透する過程を考える。鉄鋼内の物質収支を考えることで炭素の移動を支配する方程式を立て、その方程式を解くことで炭素濃度分布の時間変化を調べる。なお、鉄鋼中の炭素濃度の変化は、炭素の拡散のみにより起こるとする。

簡単のため、厚さ $2L$ の鉄鋼角棒のガス浸炭処理を考える。図 1-2 のように、角棒の中心を原点とした直角座標系を取る。時刻 t のとき任意の位置 (x, y, z) において、各物理量は次の通りである。

ρ : 鉄鋼の密度(次元:[質量][長さ]⁻³)

u : 鉄鋼中の炭素濃度(質量分率)

κ : 鉄鋼中の炭素の拡散係数(次元:[長さ]²[時間]⁻¹)

$\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$: 鉄鋼中の炭素の拡散流束ベクトル(次元:[質量][長さ]^{A1}[時間]^{A2})

ここで流束とは、単位時間あたりに単位面積を通過する量と定義される。

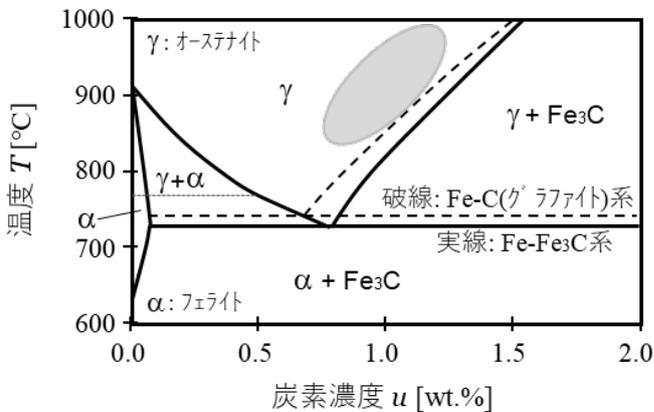


図 1-1 鉄と炭素の系の状態図と本問の浸炭処理領域

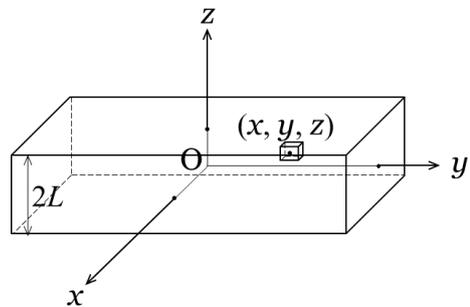


図 1-2 角棒における直角座標系

1. 鉄鋼内の炭素の挙動を支配する方程式を求める。

図 1-3 のような微小直方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ における炭素の物質収支を考える。この微小体積における物質収支は、「質量の時間変化」=「正味の流入質量」となる。正味の流入量とは、微小体積と周囲の間における総流入量と総流出量の差し引きである。流束ベクトルの各成分の正の向きは各軸の正の向きと同じとする。 $\rho u = f(x, y, z, t)$ と置く。簡単のため、例えば、 $f(x, y, z, t + \Delta t)$ を $f_{t+\Delta t}$ 、 $J(x + \Delta x/2, y, z, t)$ を $J_{x+\Delta x/2}$ と表記する。これより、微小時間 Δt の間の微小体積における物質収支式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (f_{t+\Delta t} - f) \Delta x \Delta y \Delta z = & (J_x \boxed{\text{A3}}_{\Delta x/2} - J_x \boxed{\text{A4}}_{\Delta x/2}) \Delta y \Delta z \Delta t \\ & + (J_y \boxed{\text{A3}}_{\Delta y/2} - J_y \boxed{\text{A4}}_{\Delta y/2}) \Delta z \Delta x \Delta t \\ & + (J_z \boxed{\text{A3}}_{\Delta z/2} - J_z \boxed{\text{A4}}_{\Delta z/2}) \Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (1-1)$$

式(1-1)の左辺第 1 項をテイラー 1 次近似すると次式となる。

$$f_{t+\Delta t} = f + (\boxed{\text{A5}}) \frac{\partial f}{\partial t}$$

他の項もテイラー 1 次近似することで、式(1-1)は次式となる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) \quad (1-2)$$

拡散は濃度差により起こるので、拡散流束ベクトルは次のように表される。

$$\mathbf{J} = -\kappa \boxed{\text{A6}} \quad (1-3)$$

式(1-3)を式(1-2)に代入し、 f に ρu を戻すと、式(1-2)は次のようになる。

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\text{div}\{-\kappa \text{grad}(\rho u)\} \quad (1-4)$$

式(1-4)は複雑なので、変数を減らす。まず、物性値を考える。浸炭処理により炭素濃度を高くしても 2 wt.%(重量百分率)程度までのことなので、鉄鋼の密度 ρ の変化は無視できる。また、温度一定のときは拡散係数 κ も一定である。次に、独立変数を考える。3 方向から同じように炭素が浸透するので、簡単のために、本問では z 方向のみの炭素の移動を考える。

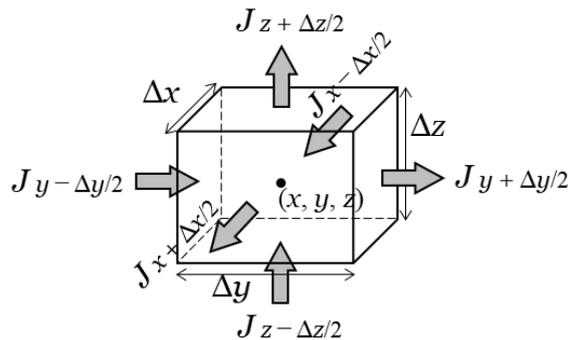


図 1-3 微小直方体の各面における流束

----- $\boxed{\text{A1}} \sim \boxed{\text{A6}}$ の選択肢 -----

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -2 ⑥ -3 ⑦ $\Delta t / 2$ ⑧ $-\Delta t / 2$ ⑨ Δt ⑩ $-\Delta t$

⑪ $t + \Delta t / 2$ ⑫ $t - \Delta t / 2$ ⑬ $t + \Delta t$ ⑭ $t - \Delta t$ ⑮ + ⑯ -

⑰ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ ⑱ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$ ⑲ $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ ⑳ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$

したがって、式(1-4)は、次の偏微分方程式(非定常1次元拡散方程式)になる。

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} \quad (1-5)$$

2. 浸炭処理における初期状態および境界条件を考える。

浸炭処理では、図 1-4(a)のように鉄鋼表面の炭素濃度と温度を変化させる。本問では簡単のために、図 1-4(b)のように表面の炭素濃度も温度も瞬時に変化すると仮定する。また、鉄鋼内部の温度も瞬時に変化して一様になるとする。

浸炭処理の前は、いずれの位置でも炭素濃度は鉄鋼の元の濃度 u_0 である。 $t=0$ の直後、目標濃度よりも高い表面濃度 u_1 および温度 T_1 に上げ、その状態を時刻 t_1 まで保持する。 $t=t_1$ の直後、目標とする濃度と同程度の表面濃度 u_2 および温度 T_2 に下げ、その状態を時刻 t_2 まで保持する。 $t=t_2$ で処理を終える。ここで、 $u_0 < u_2 < u_1$ 、 $T_0 < T_2 < T_1$ である。なお、角棒の対称性より、

A7 おいては濃度の **A8** はないとする。これらの条件を式で表わすと次のようになる。

第1段階 ($0 \leq t \leq t_1$): 温度 T_1 における拡散係数 κ_1

初期状態 ($t=0$): $u(z,0) = \mathbf{A9}$ (1-6a)

境界条件 ($0 < t \leq t_1$): $u(L,t) = \mathbf{AX}$ (1-6b), $\frac{\partial u(0,t)}{\partial z} = 0$ (1-6c)

第2段階 ($t_1 \leq t \leq t_2$): 温度 T_2 における拡散係数 κ_2

初期状態 ($t=t_1$): $u(z,t_1)$ は第1段階の終期状態 (1-6d)

境界条件 ($t_1 < t \leq t_2$): $u(L,t) = \mathbf{B1}$ (1-6e), $\frac{\partial u(0,t)}{\partial z} = 0$ (1-6f)

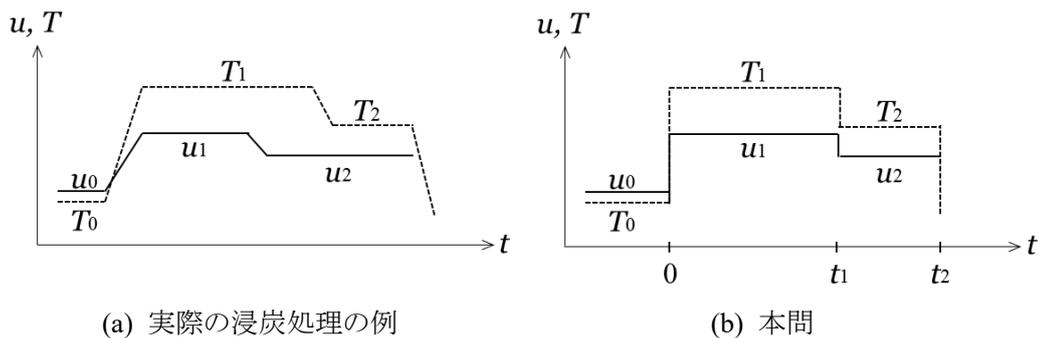


図 1-4 浸炭処理における鉄鋼表面の炭素濃度および温度のプロファイル

----- **A7** ~ **B1** の選択肢 -----

- ① u ② u_0 ③ u_1 ④ u_2 ⑤ $u_0 - u_1$ ⑥ $u_1 - u_2$ ⑦ $u_0 - u_2$ ⑧ z ⑨ $L/2$ ⑩ L
 ⑪ t ⑫ t_0 ⑬ t_1 ⑭ t_2 ⑮ 0 ⑯ ∞ ⑰ 表面 ⑱ 中央 ⑲ 勾配 ⑳ 発散

3. 第1段階の境界条件と初期状態を満たす解を求める.

$u^* = u - u_1$ を導入する. u_1 が定数なので, 偏微分方程式の形は式(1-5)と同じである.

$$\frac{\partial u^*(z,t)}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 u^*(z,t)}{\partial z^2} \quad (1-5)^*$$

初期状態(1-6a)と境界条件(1-6b),(1-6c)は次のように書き換えられる.

$$\text{初期状態: } u^*(z,0) = u_0 - u_1 \quad (1-6a)^*$$

$$\text{境界条件: } u^*(L,t) = 0 \quad (1-6b)^*, \quad \frac{\partial u^*(0,t)}{\partial z} = 0 \quad (1-6c)^*$$

(1) 偏微分方程式(1-5)*を変数分離して2つの常微分方程式に分け, 各々の一般解を求める.

関数 $u^*(z,t)$ が各独立変数の関数の積で与えられるとする.

$$u^*(z,t) = g(z)h(t) \quad (1-7)$$

式(1-7)を偏微分方程式(1-5)*に代入して整理すると, 次式を得る.

$$\frac{1}{\kappa_1 \boxed{\text{B2}}} \boxed{\text{B3}} = \frac{1}{\boxed{\text{B4}}} \boxed{\text{B5}} \quad (1-8)$$

式(1-8)において, 左辺は $\boxed{\text{B6}}$ を含まず, 右辺は $\boxed{\text{B7}}$ を含まない. よって, 両辺とも z, t のいずれも含まないので, ある定数 β となる. これより, 2つの常微分方程式を得る.

$$\frac{dh(t)}{dt} - \kappa_1 \beta h(t) = 0 \quad (1-9a),$$

$$\frac{d^2g(z)}{dz^2} - \beta g(z) = 0 \quad (1-9b)$$

任意定数 $c_1 \sim c_6$ を用いて, 式(1-9a),(1-9b),(1-5)*の一般解を得る. ただし, これらの一般解の形は, 定数 β がゼロかそうでないかに依存する.

	$\beta = 0$ の場合	$\beta \neq 0$ の場合
式(1-9a)の一般解	$h(t) = c_1$	$h(t) = c_4 e^{\kappa_1 \beta t}$
式(1-9b)の一般解	$g(z) = c_2 z + c_3$	$g(z) = c_5 e^{\boxed{\text{B8}}} + c_6 e^{-\boxed{\text{B8}}}$

解答用紙裏面の記述欄 1 に, $\beta = 0$ と $\beta \neq 0$ の各々の場合について, 式(1-9b)を解いて $g(z)$ を得る過程を書きなさい.

---- $\boxed{\text{B2}} \sim \boxed{\text{B8}}$ の選択肢 -----

- ① z ② $\sqrt{\beta z}$ ③ βz ④ $\kappa_1 \beta z$ ⑤ t ⑥ $\sqrt{\beta t}$ ⑦ βt ⑧ $\kappa_1 \beta t$ ⑨ $g(z)$ ⑩ $h(t)$
- ⑪ $\frac{dg(z)}{dz}$ ⑫ $\frac{dg(z)}{dt}$ ⑬ $\frac{dh(t)}{dz}$ ⑭ $\frac{dh(t)}{dt}$ ⑮ $\frac{d^2g(z)}{dz^2}$ ⑯ $\frac{d^2g(z)}{dzdt}$ ⑰ $\frac{d^2g(z)}{dt^2}$
- ⑱ $\frac{d^2h(t)}{dz^2}$ ⑲ $\frac{d^2h(t)}{dzdt}$ ⑳ $\frac{d^2h(t)}{dt^2}$

(2) 境界条件を満たす式(1-5)*の解を求める.

境界条件(1-6b)*, (1-6c)*を満たす定数を決定する.

	$\beta = 0$ の場合	$\beta \neq 0$ の場合
式(1-6b)*を満たすには	$c_2L + c_3 = 0$	$c_5e^{\boxed{B9}} + c_6e^{-\boxed{B9}} = 0$
式(1-6c)*を満たすには	$\boxed{BX} = 0$	$\boxed{C1} = 0$
式(1-6b)*と(1-6c)*を満たすには	$\boxed{BX} = \boxed{C2} = 0$	$e^{\boxed{B9}} + e^{-\boxed{B9}} = 0$

$\beta = 0$ の場合, 式(1-5)*の解は $u^*(z, t) = 0$ となる. これは, 空間や時間による濃度の変化が無いことになるので本問では意味が無い. $\beta \neq 0$ の場合, β を正の実数定数 μ を用いて表す. $\beta = \mu^2 > 0$ のとき, 常に $e^{\boxed{B9}} + e^{-\boxed{B9}} > 0$ となる. $\beta = -\mu^2 < 0$ のときは, $e^{\boxed{B9}} + e^{-\boxed{B9}} = \boxed{C3}$ となり, $\boxed{C3}$ は $\mu L = (2n-1)\pi/2$ (n : 自然数) のとき 0 になる.

解答用紙裏面の記述欄 2 に, $\beta > 0$ では $e^{\boxed{B9}} + e^{-\boxed{B9}} > 0$ となることを指数関数のグラフを描いて説明しなさい. また, $\beta < 0$ では $e^{\boxed{B9}} + e^{-\boxed{B9}} = \boxed{C3}$ となる過程を書きなさい.

以上より, c_4c_5 を任意定数 c_7 とおくと, 次式を得る.

$$u^*(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{7n} \exp\left\{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \kappa_1 t\right\} \cos\frac{(2n-1)\pi z}{2L} \quad (1-10)*$$

---- $\boxed{B9} \sim \boxed{C3}$ の選択肢 -----

- ① c_1c_2 ② c_1c_3 ③ $c_2 + c_3$ ④ $c_2 - c_3$ ⑤ c_4c_5 ⑥ c_4c_6 ⑦ $c_5 + c_6$ ⑧ $c_5 - c_6$ ⑨ $\sqrt{\beta}L$ ⑩ βL
 ⑪ $\kappa_1\beta L$ ⑫ μL ⑬ $i\mu L$ ⑭ $2\cos\mu L$ ⑮ $2\sin\mu L$ ⑯ $2i\cos\mu L$ ⑰ $2i\sin\mu L$

(3) 初期状態も満たす式(1-5)*の解を求める.

式(1-10)*より, 初期状態(1-6a)*は次のように表される.

$$u^*(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{7n} \cos\frac{(2n-1)\pi z}{2L} = u_0 - u_1 \quad (1-11)*$$

このままでは係数 c_{7n} を得られないため, 右辺の $u_0 - u_1$ ($u_0 < u_1$) をフーリエ級数展開して三角関数の重ね合わせで近似する.

周期 $2p$ の関数 $q(z)$ のフーリエ展開は次式で表され, フーリエ係数 A_0, A_m, B_m は $z = 0$ を挟んだ 1 周期分の区間 $[-p, p]$ での積分で得られるので, これらを適用する.

$$q(z) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m \cos\frac{m\pi z}{p} + B_m \sin\frac{m\pi z}{p} \right\} \quad (1-12)$$

$$A_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p q(z) dz, \quad A_m = \frac{1}{p} \int_{-p}^p q(z) \cos \frac{m\pi z}{p} dz, \quad B_m = \frac{1}{p} \int_{-p}^p q(z) \sin \frac{m\pi z}{p} dz$$

式(1-11)*の関数を $u^*(z, 0) \equiv u^*(z)$ と置いてフーリエ展開する. この $u^*(z)$ の場合は, 区間 $[-2L, 2L]$ で積分する. $u^*(z)$ は余弦関数の重ね合わせで表されるので偶関数である. よって, $u_0 - u_1$ を周期 $4L$ の偶関数として拡張する. 拡張した関数のグラフを図 1-5 に示す.

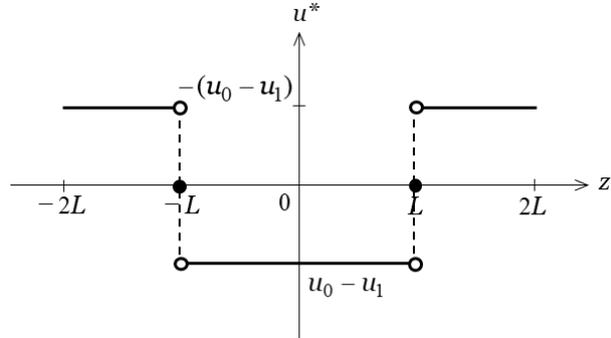


図 1-5 偶関数として拡張した関数のグラフ

式(1-12)を $u^*(z)$ に適用したとき, B_m の被積分関数は奇関数なので, $B_m = 0$ である.

A_0 と A_m の被積分関数は偶関数なので, 積分範囲を $[0, 2L]$ にして積分結果を 2 倍にすればよい. 計算すると, $A_0 = 0$ である. A_m については次の通りである.

余弦関数の重ね合わせとして表した $u^*(z)$ の場合は, A_m は次のように計算される.

$$\begin{aligned} A_m &= c_{7n} \frac{1}{L} \int_0^{2L} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2L} \cos \frac{m\pi z}{2L} dz \\ &= c_{7n} \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \left\{ \cos \frac{(2n-1+m)\pi z}{2L} + \cos \frac{(2n-1-m)\pi z}{2L} \right\} dz \end{aligned}$$

A_m は, $m = 2n - 1$ のとき c_{7n} (), $m = 2n$ のとき c_{7n} () をとる. 一方, $u_0 - u_1$ を拡張した関数として表された $u^*(z)$ の場合は, A_m は次のように計算される.

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L} \int_0^{\text{C6}} (\text{C7}) \cos \frac{m\pi z}{2L} dz + \frac{1}{L} \int_{\text{C6}}^{2L} (\text{C8}) \cos \frac{m\pi z}{2L} dz \\ &= \frac{4(u_0 - u_1)}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \end{aligned}$$

ここで $\sin(m\pi/2)$ は, $m = 2n - 1$ のとき 1 と -1 を交互にとるので $(-1)^{\text{C9}}$ と表すことができ, $m = 2n$ のとき 0 をとる. したがって, 2 つの計算結果より, c_{7n} を次のように決定する.

$$c_{7n} = \frac{4(u_0 - u_1)}{(2n-1)\pi} (-1)^{\text{C9}} \tag{1-13}^*$$

式(1-13)*を式(1-10)*に入れて, 式(1-5)*の解を得る.

- ~ の選択肢 -----
- ① 1 ② -1 ③ 0 ④ $L/2$ ⑤ $-L/2$ ⑥ L ⑦ $-L$ ⑧ $2L$ ⑨ $-2L$
 ⑩ $(u_0 - u_1)/2$ ⑪ $-(u_0 - u_1)/2$ ⑫ $u_0 - u_1$ ⑬ $-(u_0 - u_1)$ ⑭ $2(u_0 - u_1)$ ⑮ $-2(u_0 - u_1)$
 ⑯ n ⑰ $n-1$ ⑱ $2n-1$ ⑲ $4n-1$ ⑳ $4n-3$

(4) 境界条件と初期状態を満たす式(1-5)の解を求める。

式(1-5)*の解に $u^* = u - u_1$ を戻すと、式(1-5)の解を得る。

$$u(z,t) = u_1 + u^*(z,t) = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{7n} \exp\left\{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \kappa_1 t\right\} \cos\frac{(2n-1)\pi z}{2L} \quad (1-14)^*$$

式(1-14)*の総和記号の中を v_n とおく。

$$v_n(z,t) = \frac{4(u_0 - u_1)}{(2n-1)\pi} (-1)^{\boxed{\text{C9}}} \exp\left\{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \kappa_1 t\right\} \cos\frac{(2n-1)\pi z}{2L} \quad (1-15)^*$$

(5) 第1段階における炭素濃度の空間分布と時間変化を考察する。

式(1-14)*, (1-15)*から, n, t, z の変化に伴う各部分の変化を考える. 空間分布を表す余弦関数の周期 ($\boxed{\text{CX}}$) / ($\boxed{\text{D1}}$) は, n が大きくなるにつれて小さくなる. 時間変化を表す指数関数は, n が大きくなるにつれて, また, 時間 t が経過するにつれて, $\boxed{\text{D2}}$. 係数の絶対値 $|c_{7n}|$ は, n が大きくなるにつれて $\boxed{\text{D3}}$.

各部分のこれらの挙動から, n が $\boxed{\text{D4}}$ ほど, v_n の総和である $u^*(z,t)$ に及ぼす影響が大きいがわかる. また, 十分に時間が経つ ($t \rightarrow \infty$) と, いずれの位置 z においても $u^*(z,t) \rightarrow \boxed{\text{D5}}$ となり, 炭素濃度は $u(z,t) \rightarrow \boxed{\text{D6}}$ となる. ただし, 実際の浸炭処理においては, 表面近傍のみを高い炭素濃度にして硬くし, あまり内部には炭素が侵入しないようにしたいので, なるべく短い時間で処理を終わらせる.

後述する具体的な数値を用いると, 第1段階の終期状態は, $n=6$ までの重ね合わせでかなり近似できる. 第1段階の初期 ($t=0$) と終期 ($t=t_1$) における, u^* , $n=6$ までの v_n の総和, v_1, v_6 のグラフを図 1-6 に示す. ここで, v_4 のグラフを考える.

v_n の振幅を決めるのは, $|c_{7n}|$ と時間項である. $n=4$ のとき, $|c_{7n}|$ は $n=1$ のときの $1/7$ 倍であり, 時間項は $n=1$ のときの $\exp\{-(7^2 - 1^2)(\pi/2L)^2 \kappa_1 t\}$ 倍である. この $\exp\{-(7^2 - 1^2)(\pi/2L)^2 \kappa_1 t\}$ は, $t=0$ において 1 倍, $t=t_1$ において約 0.7 倍となる. また, $t=t_1$ における v_1 の振幅は, $t=0$ におけるものとはほぼ同じ (0.99 倍) である.

解答用紙裏面の記述欄 3 に図 1-6 が印刷されているので, 図の(a)と(b)の各々に v_4 のグラフを描きなさい.

---- $\boxed{\text{CX}}$ ~ $\boxed{\text{D6}}$ の選択肢 -----

- ① 1 ② -1 ③ 0 ④ ∞ ⑤ u_0 ⑥ u_1 ⑦ $u_0 - u_1$ ⑧ L ⑨ $2L$ ⑩ $4L$ ⑪ n ⑫ $n-1$
 ⑬ $2n-1$ ⑭ $4n-1$ ⑮ $4n-3$ ⑯ 大きい ⑰ 大きくなる ⑱ 小さい ⑲ 小さくなる

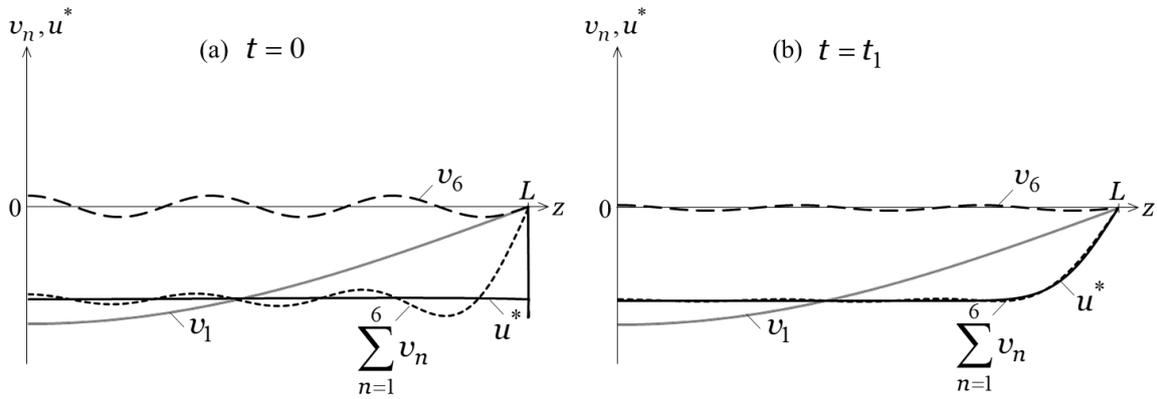


図 1-6 第 1 段階の初期と終期における u^* , $\sum_{n=1}^6 v_n$, v_1 , v_6 のグラフ

4. 第 2 段階の境界条件と初期状態を満たす式(1-5)の解を求める.

$u^{**} = u - u_2$ を導入する. 偏微分方程式の形は, やはり式(1-5)と同じである.

$$\frac{\partial u^{**}(z,t)}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 u^{**}(z,t)}{\partial z^2} \quad (1-5)^{**}$$

第 1 段階と同様に考える. 第 2 段階の初期状態の式(1-6d)は, 式(1-14)*に $t = t_1$ を入れたものとなる. c_7 を用いて式(1-10)*を得たのと同様に, c_8 を任意定数として境界条件を満たす解を得る. その解が初期状態も満たすように, 式(1-13)*で c_{7n} を決定したのと同様に c_{8n} を決定する.

$$c_{8n} = \left[\frac{4(u_1 - u_2)}{(2n-1)\pi} + \frac{4(u_0 - u_1)}{(2n-1)\pi} \exp \left\{ - \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 \kappa_1 t_1 \right\} \right] (-1)^{\boxed{C9}} \quad (1-13)^{**}$$

これより, 式(1-5)**の解を得る. $u^{**} = u - u_2$ を戻し, t を $t - t_1$ に置き換えると, 式(1-5)の解を次式で得る.

$$u(z,t) = u_2 + u^{**}(z,t) = u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{8n} \exp \left\{ - \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 \kappa_2 (t - t_1) \right\} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2L} \quad (1-14)^{**}$$

5. 具体的な数値を用いて, 鉄鋼中の炭素濃度分布の時間変化と浸炭深さについて考察する.

角棒の厚さを $2L = 16 \text{ mm}$ とする. 鉄鋼の硬さは炭素濃度 $0.8 \text{ wt.}\%$ 付近で最大であることから, 表面から深さ 0.5 mm までは炭素濃度 $0.6 \sim 1.0 \text{ wt.}\%$ としたい. また, 有効な硬さとなる炭素濃度の目安が $0.4 \text{ wt.}\%$ であることから, 深さ 1.0 mm までは $0.4 \text{ wt.}\%$ 以上にしたい. このために, 各段階の処理条件を次のようにする.

元の鉄鋼: $u_0 = 0.2 \text{ wt.}\%$

第 1 段階: $u_1 = 1.2 \text{ wt.}\%$, $T_1 = 930 \text{ }^\circ\text{C}$, $\kappa_1 = 4.0 \times 10^{-2} \text{ mm}^2 \text{ h}^{-1}$, $t_1 = 7 \text{ h}$

第 2 段階: $u_2 = 0.8 \text{ wt.}\%$, $T_2 = 850 \text{ }^\circ\text{C}$, $\kappa_2 = 2.2 \times 10^{-2} \text{ mm}^2 \text{ h}^{-1}$, $t_2 = 8 \text{ h}$

式(1-14)*, (1-14)**に, これらの数値を入れると, 炭素濃度分布の時間変化は図 1-7 のようになる. 深さ 0.5 mm より深部の炭素濃度分布は, 第 1 段階の終期 ($t = 7$ h) と処理終了時 ($t = 8$ h) であまり変わらない. これより, 次のことがわかる.

第 1 段階は, 表面の炭素濃度を高くすることで炭素を内部に速く侵入させる過程である. 第 2 段階は, 主には表面近傍の炭素濃度を目標濃度近くにまで **D7** 過程である. この過程では, 表面近傍では **D8** に向かって炭素が移動し, 表面では脱炭が起こる.

この浸炭処理により, 炭素は **D9** mm 程度の深さまで侵入した. 深さ 1.0 mm で 0.4 wt.% 程度, 深さ 0.5 mm で **DX** wt.% 程度, 深さ約 0.2 mm で最大濃度 0.86 wt.% となった. よって, 深さと炭素濃度の目標を達成できた.

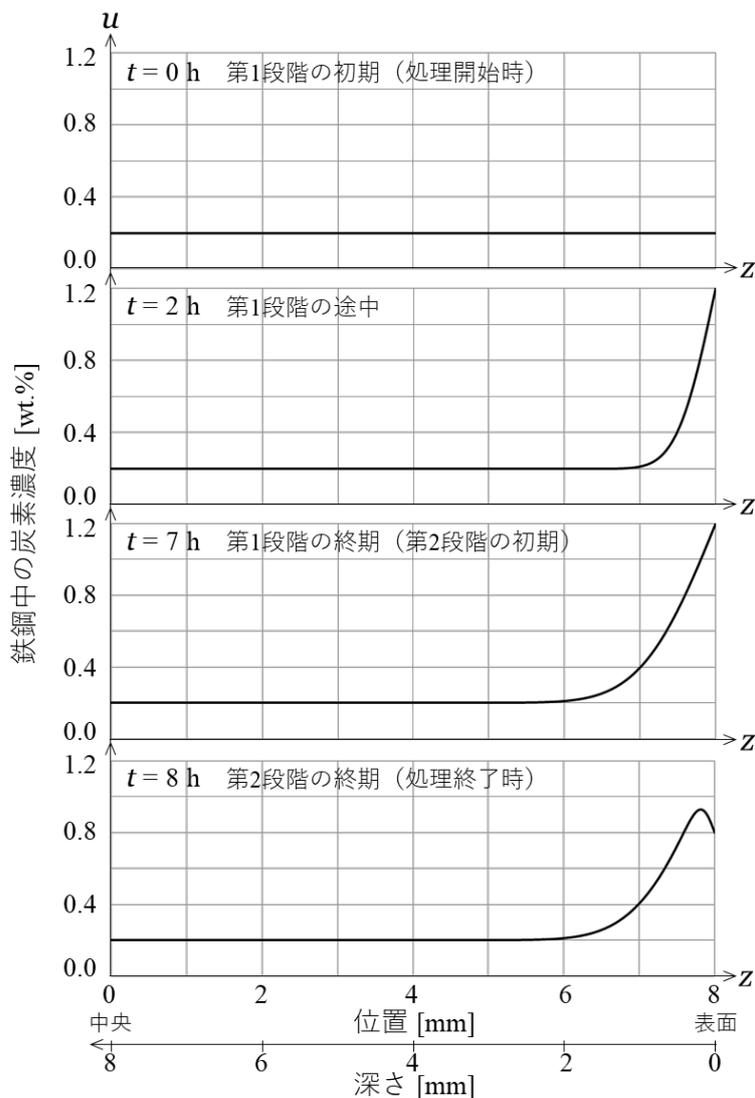


図 1-7 鉄鋼角棒の厚み方向の炭素濃度分布の時間変化 ($t = 0, 2, 7, 8$ 時間)

- **D7** ~ **DX** の選択肢 -----
- ① 0.1 ② 0.2 ③ 0.3 ④ 0.4 ⑤ 0.5 ⑥ 0.6 ⑦ 0.7 ⑧ 0.8
 ⑨ 0.9 ⑩ 1.0 ⑪ 1.1 ⑫ 1.2 ⑬ 1.5 ⑭ 2.0 ⑮ 2.5 ⑯ 3.0
 ⑰上げる ⑱下げる ⑲内部 ⑳表面
-

(参考資料)

ガス浸炭では、処理したい鉄鋼製部品を炉に入れ、炭素源を含む気体を、高温にした炉内に流し通す。本問冒頭の平衡反応式は、炭素源が一酸化炭素の場合である。処理中は、炉内の気体の平衡炭素濃度(カーボンポテンシャル)を制御して、鉄鋼表面の炭素濃度を保持する。

浸炭処理においては、目的とする深さまで硬くする(炭素濃度を上げる)のに必要な処理時間を見積もるために、浸炭深さ d と処理時間 t の関係が重要である。元の炭素濃度よりも高い濃度になった深さを全浸炭深さ d_{tot} といい、硬さの目安とした 0.4 wt.%となる深さを有効浸炭深さ d_{eff} という。硬さの目安とはビッカース硬さで 550HV である。

実際の浸炭処理では、 $d = K\sqrt{t}$ で表される経験式を用いる。ここで温度係数 K は、拡散係数、表面濃度、元の濃度などを包括する。第1段階の条件では、 d_{tot} には $K = 0.647$ 、 d_{eff} には $K = 0.283$ である。一方、本問では、式(1-5)の解(1-14)*、(1-14)**を用いて浸炭深さを得られる。ここでは、0.21 wt.%(元の濃度から5%増)となる深さを全浸炭深さ d_{tot} として求めた。

経験式と式(1-5)の解による浸炭深さの時間変化を図 1-8 に示す。式(1-5)の解による値は、 d_{tot} も d_{eff} も経験式による値の 1.3 倍程度に収まり、よく合致する。違いが出る理由としては、実際には、鉄鋼はケイ素、マンガン、リン、硫黄を含むこと、目的に応じて他の元素も含むこと、表面炭素濃度と内部温度は瞬時には変化しないこと等が考えられる。

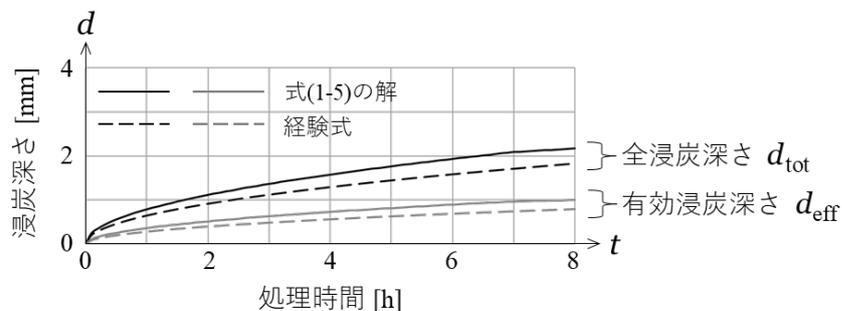


図 1-8 式(1-5)の解と経験式による浸炭深さ

<学生のみなさんへ>

統一テストの大問1は工学的総合問題です。みなさんは、大学に入ってからすぐに学科の専門科目を学びたいのだと思いますが、専門科目を学ぶためには高校までに学ぶ内容に加えて、さらに高度な数学・物理学・化学が必要です。大問1の工学的総合問題は、大学で学ぶ理数系基礎科目の内容が工学の中でどのように使われるのかを、簡単な例を用いて段階的に示しています。式が具体的に何を表わしているかを、是非意識するようにしましょう。

*統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp