# 令和 04 年度　統一テスト
## （理数基礎学力到達度テスト）
## ＜問題冊子①＞必答問題

## 大問１（数学①）

## 試験時間　45 分間

＊解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません＊

【解答する際の注意】

１．大問１専用の解答用紙１枚（裏面もあり）を用いること．

２．マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること．

３．解答の仕方に特に指示が無い場合は，問題文の空欄 $\boxed{\text{A1}}$, $\boxed{\text{A2}}$, ・・・にあてはまるものを該当する解答群（選択肢）から選び，選択肢の番号①，②・・・で答えること．同じ選択肢が複数回あてはまることもある．

４．空欄の中には通常の式では不要な「1」「−1」「0」が当てはまることがある．その場合も，式が成り立つために必要なものとして選択し，解答すること．

５．問題に関する質問は，汚損で読めない等以外は原則認めない．

東北大学　工学部

# 大問1（数学①）必答問題

建築物を設計する際には，気候や立地も考慮したうえで，音，熱，空気，光，水（水蒸気）といった建築環境を適切にする必要がある．本問では，アパートのような集合住宅の一室における屋内温度の変化や分布を考える．屋内温度は，屋内外の間の熱移動および屋内の熱流動に依存する．よって，微小要素における質量保存，運動の法則，エネルギー保存を考えて，熱流動を支配する方程式を導き，それらを解くことによって屋内温度を表す関数を求め，その分布を考察する．

一室に対して，図 1-1 のように座標系をとる．任意の時間 $t$ と位置 $\boldsymbol{r}$ における物理量を，圧力 $P$，温度 $T$，単位質量あたりのエネルギー $E$，流速 $\boldsymbol{v}$，熱流束（単位時間に単位面積を通過する熱）$\boldsymbol{q}$ とおく．質量密度 $\rho$，熱容量 $c$，熱伝導率 $k$ については，一様かつ一定として扱う．屋内のゆっくりした流れを取り扱うため，粘性を無視してよいとする．また，重力の影響は小さいとして考慮しない．

本問では，屋内の空気は窓側で暖められて上昇し，壁側で冷やされて下降するような循環流を想定する．窓側の最上部には空調機が取り付けられており，任意の流速で送風できるようになっている．また，窓側は全面が窓ガラスであるとし，屋内に仕切り壁や家具などは全く無いとする．

ベクトル量は $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{q}$ のように太字で示す．また，微分演算子は次のように定義される．

$$\text{ナブラ}\quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \text{ラプラシアン}\quad \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

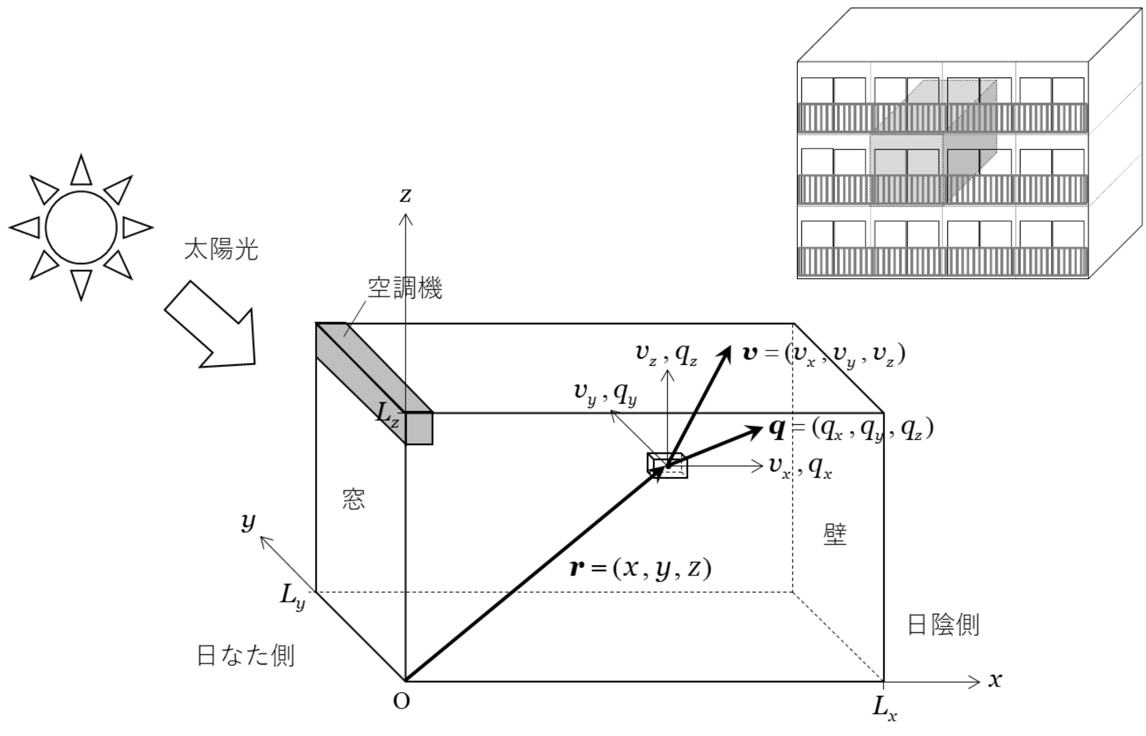



図 1-1 集合住宅の一室の模式図および座標系

1. 熱流動を支配する 3 つの方程式を導く.

(1) 質量の収支を考える.

図 1-2 のように，空間内のある領域を考え，表面を $S$ とし体積を $V$ とする．表面 $S$ 上の任意の微小面要素を $dS$ とし，この要素における外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ ，内向き法線ベクトルを $-\boldsymbol{n}$ とする．一般的なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ では，このような領域の面積分と体積分の間に，次の関係が成り立つ。

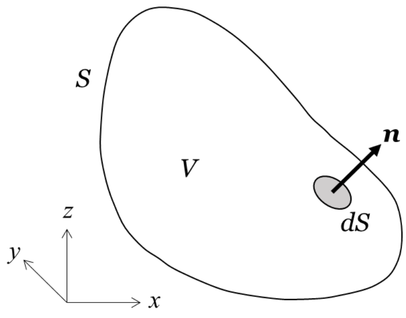



図 1-2 空間内の閉領域と面要素

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

この領域における質量の収支は，「質量の時間変化」＝「正味の流入する質量」となる．ここで，「正味の」とは流入と流出を差し引いたものである．微小面要素 $dS$ に垂直な内向きの速度成分は －$\boxed{\text{A1}}$ なので，単位時間に面 $dS$ を内向きに通過する流体の体積は －$\boxed{\text{A2}}$ ，質量は －$\boxed{\text{A3}}$ と表される．したがって，単位時間にこの領域に流入する質量は －$\boxed{\text{A4}}$ となるが，上記の面積分と体積分の関係より，－$\boxed{\text{A5}}$ と変換できる．これより，単位体積あたりの流入質量は －$\boxed{\text{A6}}$ である．

一方，単位時間・単位体積あたりの質量変化は $\partial\rho/\partial t$ なので，以上より，質量収支式を得る。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\boxed{\text{A6}}$$

これを変形すると，次式となる．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boxed{\text{A7}} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} \qquad (1\text{-}1)$$

式(1-1)を，連続方程式という．本問では，密度 $\rho$ を一様（$\nabla\rho = 0$）かつ一定（$\partial\rho/\partial t = 0$）とする．よって，式(1-1)の左辺はゼロとなり，次式を得る．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

---- $\boxed{\text{A1}}$ ～ $\boxed{\text{A7}}$ の選択肢 --------------------------------------------------------------------------

① $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,dV$　② $\int_V \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\,dV$　③ $\int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$　④ $\int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$　⑤ $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$　⑥ $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

⑦ $\boldsymbol{v}\,dS$　⑧ $\rho\boldsymbol{v}\,dS$　⑨ $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$　⑩ $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$　⑪ $(\nabla\rho)\cdot\boldsymbol{v}$　⑫ $\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}$

⑬ $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$　⑭ $\nabla\rho$　⑮ $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$　⑯ $\rho$　⑰ $\boldsymbol{v}$　⑱ $\rho\boldsymbol{v}$

(2) 運動方程式を考える.

流れ場にある微小部分が，ある時刻に位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ を通過するときの流速を $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ とすると，微小時間 $\Delta t$ の後に位置 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\Delta t=(x+v_x\Delta t,\ y+v_y\Delta t,\ z+v_z\Delta t)$ を通過するときの流速は $\boldsymbol{v}(x+v_x\Delta t,\ y+v_y\Delta t,\ z+v_z\Delta t,\ t+\Delta t)$ となる. これをテイラー展開により 1 次微小量まで取り，微小時間 $\Delta t$ における速度変化 $\Delta\boldsymbol{v}$ 求める. 例えば，$x$ 方向の速度変化 $\Delta v_x$ は次のようになる。

$$\Delta v_x = v_x\Delta t\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\Delta t\frac{\partial\ \boxed{\text{A8}}}{\partial y}+v_z\Delta t\frac{\partial\ \boxed{\text{A9}}}{\partial z}+\Delta t\frac{\partial v_x}{\partial t}$$

ここで $\Delta t\to 0$，$\Delta v_x\to 0$ の極限をとると，$x$ 方向の加速度（流速の時間変化率）を求められる。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+(\boxed{\text{AX}}\cdot\nabla)\boxed{\text{B1}}$$

これは，$y$ 成分，$z$ 成分についても同様に求められる. したがって，加速度は $\partial\boldsymbol{v}/\partial t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ と表される.

本問では重力の影響と粘性を無視するので，微小直方体を考えると，図 1-3 のように圧力のみが各面に作用する. よって，面に作用する力 $\boldsymbol{F}$ の $z$ 成分 $F_z$ は次式で表される.

$$F_z=(\boxed{\text{B2}}-\boxed{\text{B3}})\Delta x\Delta y$$

ここで，$P_{(z+)}=P(x,y,z+\boxed{\text{B4}},t)$ をテイラー展開して 1 次微小量まで残す.

$$P_{(z+)}=P(x,y,z,t)+\boxed{\text{B4}}\frac{\partial P(x,y,z,t)}{\partial z}$$

$P_{(z-)}$ も同じように近似して，$F_z$ を求める.

$$F_z=-\frac{\partial P}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

これは，$x$ 方向，$y$ 方向についても同様である，よって，単位体積あたりに作用する力は $-\nabla P$ となる.

以上より，運動方程式を得る.

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla P \qquad (1\text{-}3)$$

本問では，屋内のゆっくりした流れを対象としているので，$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ を 2 次微小量と見なせて無視できる. よって，式(1-3)は次式となる.

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla P \qquad (1\text{-}4)$$

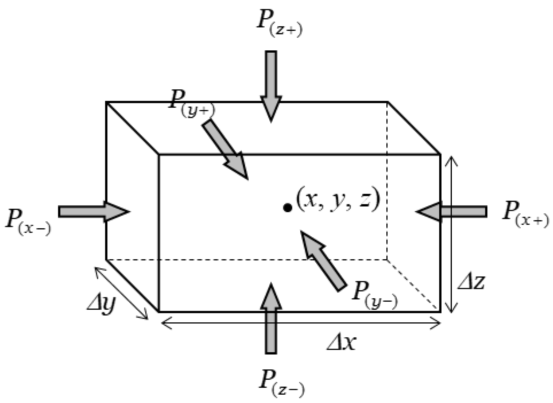



図 1-3 微小直方体に作用する圧力

(3) エネルギーの収支を考える.

流体の単位質量がもつエネルギーを$E$とおくと, 微小要素におけるエネルギー収支は,「エネルギーの時間変化」＝「正味の流入エネルギー」＋「正味の供給エネルギー」となる.

流入エネルギーは, 流れと熱伝導による. 流れによる場合はエネルギーを保持した物質が移動することによりエネルギーが移動し, 熱伝導による場合は温度勾配を駆動力として熱が拡散する. それぞれについて, 問 1(1)の質量収支と同じように考えると, 単位時間・単位体積あたりのエネルギーの流入量は$-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}E)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}$となる.

供給エネルギーは, 為される仕事と与えられる熱である. 単位時間あたりに為される仕事$W$は力$\boldsymbol{F}$により為されるので, $z$方向の力$F_z$により為される仕事$W_z$は次のようになる.

$$W_z=(\boxed{\text{B2}}\ \boxed{\text{B5}}-\boxed{\text{B3}}\ \boxed{\text{B6}})\Delta x\Delta y$$

ここで, テイラー展開を用いて 1 次微小量まで残すと, $z$方向の力$F_z$により為される仕事$W_z$は次式のように求められる.

$$W_z=-\frac{\partial(\boxed{\text{B7}}\ \boxed{\text{B8}})}{\partial\boxed{\text{B9}}}\Delta x\Delta y\Delta z$$

これらは, $x$方向の力$F_x$, $y$方向の力$F_y$により為される仕事についても同様である. よって, 単位時間・単位体積あたりに為される仕事は$-\nabla\cdot(P\boldsymbol{v})$となる. 一方, 単位時間・単位体積あたりに与えられる熱を$Q$とおく.

単位体積あたりのエネルギーの時間変化は$\partial(\rho E)/\partial t$なので, 以上より, エネルギー方程式を得る.

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}=-\rho\nabla\cdot(E\boldsymbol{v})-\nabla\cdot\boldsymbol{q}-\nabla\cdot(P\boldsymbol{v})+Q \tag{1-5}$$

流体の単位質量がもつエネルギー$E$は, エンタルピー$cT$, 圧力による体積仕事$P/\rho$, 運動エネルギー$|\boldsymbol{v}|^2/2$, ポテンシャルエネルギー$gz$ ($g$:重力加速度)の和である. 本問では,「重力の影響を考慮しない. ゆっくりした流れなので$|\boldsymbol{v}|^2$を 2 次微小量と見なせる. 圧力による体積仕事よりもエンタルピーが圧倒的に大きい. 」としている. よって$E=cT$とおく. 熱伝導については, 熱流束は熱伝導率と温度勾配の積であり, $\boldsymbol{q}=-k\nabla T$と表される. これらを代入して式(1-5)を書き換える.

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=-\rho c\nabla\cdot(T\boldsymbol{v})+k\nabla^2T-\nabla\cdot(P\boldsymbol{v})+Q \tag{1-6}$$

---- $\boxed{\text{A8}}$ ～ $\boxed{\text{B9}}$ の選択肢 ---------------------------------------------------------------------------

① $t$　② $x$　③ $y$　④ $z$　⑤ $\boldsymbol{v}$　⑥ $v_x$　⑦ $v_y$　⑧ $v_z$　⑨ $T$　⑩ $P$　⑪ $v_{z(z-)}$　⑫ $v_{z(z+)}$

⑬ $P_{(z-)}$　⑭ $P_{(z+)}$　⑮ $\Delta x$　⑯ $\frac{\Delta x}{2}$　⑰ $\Delta y$　⑱ $\frac{\Delta y}{2}$　⑲ $\Delta z$　⑳ $\frac{\Delta z}{2}$

2. 導出した 3 つの支配方程式を満たすような解析解を求める.

(1) 3 つの方程式を連立させて 1 つの方程式にし, 解析解を得られるように単純化する.

式(1-2),(1-4),(1-6)より, 非定常の熱流動を支配する方程式は次式となる.

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c(\nabla T)\cdot\boldsymbol{v} + k\nabla^2 T + \rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v} + Q \tag{1-7}$$

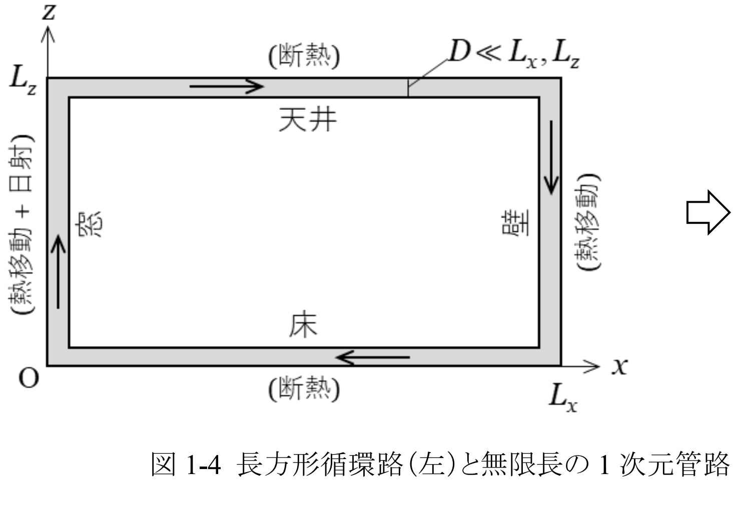
式(1-7)には, 独立変数が $t$ , $x$ , $y$ , $z$ の 4 つ, 従属変数も $T$ , $\boxed{\text{BX}}$ , $\boxed{\text{C1}}$ , $\boxed{\text{C2}}$ の 4 つもあり, 一般的には解析解を得ることは困難なので数値計算を行う. ここでは, 解析解を得られるように独立変数の数を減らし, 温度場 $T$ を求める.

まず, 温度場も流れ場も定常(見かけ上, 時間変化が無い)に達した状態を考えることにして, 独立変数を 1 つ減らす. 式(1-7)において時間の項が無くなるので, 定常状態の熱流動を支配する方程式は次式となる.

$$-\rho c(\nabla T)\cdot\boldsymbol{v} + k\nabla^2 T + Q = 0 \tag{1-8}$$

次に, 現象を単純化することで, 独立変数の数をさらに減らす. 本問では, 側面の壁, 天井, 床は断熱されており, 屋内の空気は窓側で暖められて上昇して壁側で冷やされて下降することを考えているので, $y$ 方向には一様で物質移動も熱移動も無い( $\boxed{\text{C3}} = 0$ , かつ $\boxed{\text{C4}} = 0$ )とする. これにより, 3 次元空間が 2 次元空間に置き換えられる.

ここで, 境界に沿った循環流のみを考えることにする. 窓側最上部の空調機から $x$ 方向に送風がされているとし, 2 次元空間内の熱流動を, 図 1-4 左のような長方形循環路内の熱流動にモデル化する. 循環路の断面は一辺の長さ $D$ の正方形とする. 長さ $D$ が循環路の各辺の長さ $L_x, L_z$ よりも十分に小さいとし, また, 循環路の角における淀みも無いものとして, 図 1-4 右のような無限長の 1 次元管路として取り扱う. 1 次元管路内の流れは一定流速 $v_{\text{in}}$ とする. 境界条件(境界を通して出入りする熱)については, 区間に応じて設定すればよい.



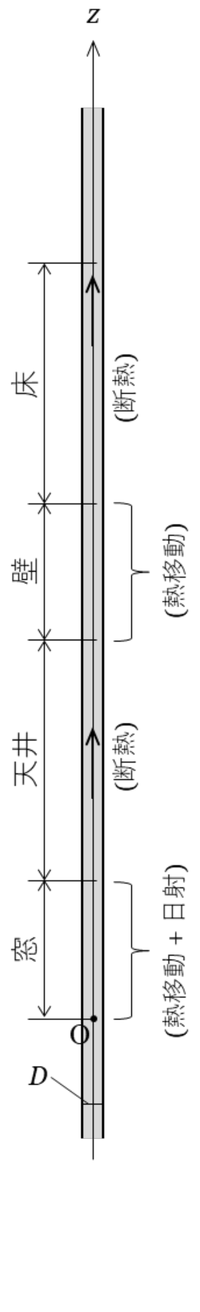




図 1-4 長方形循環路(左)と無限長の 1 次元管路(右)

ここで，与えられる熱 $Q$ としては境界を通して出入りする熱のみを考え，単位時間・単位体積あたりの発熱を $Q = -\beta(T - T_{\mathrm{out}}) + Q_{\mathrm{s}}$ とする．$\beta$ は窓や壁を介した熱の通り易さに対応した係数，$T$ は屋内の温度，$T_{\mathrm{out}}$ は外気温，$Q_{\mathrm{s}}$ は屋内まで到達する日射である．外気温 $T_{\mathrm{out}}$ と日射 $Q_{\mathrm{s}}$ は，実際には太陽の動きに応じて変化するが，ここでは定数とする．

以上より，式(1-8)を 1 次元管路内の熱流動に適用すると，次の常微分方程式を得る．

$$k\frac{d^2T}{dz^2} - \rho c v_{\mathrm{in}}\frac{dT}{dz} - \beta T = -\beta T_{\mathrm{out}} - Q_{\mathrm{s}} \qquad (1\text{-}9)$$

この式が，1 次元の定常熱流動の支配方程式である．

(2) 支配方程式(1-9)の一般解を求める．

一般的に，流れが存在する場合は，熱伝導による熱移動が流れによる熱移動よりも極めて小さく，無視できることが多い．ここでは，熱伝導を無視できないとした場合と無視できるとした場合について，式(1-9)の一般解を求め，後で具体的な数値を入れて，その可否を検討する．

(i) 熱伝導を無視できないとした場合 ($\boxed{\text{C5}} \neq 0$) の一般解を求める．

式(1-9)は非斉次の常微分方程式である．ただし，右辺が定数なので $T^* = T - T_{\mathrm{out}} - Q_{\mathrm{s}}/\beta$ とおくと，式(1-9)を $T^*$ に関する斉次の常微分方程式に書き換えることができる．$T^*$ に関する微分方程式の特性方程式は，判別式が $(\boxed{\text{C6}})^2 + \boxed{\text{C7}} > 0$ となるので，異なる実数解 $\lambda_1, \lambda_2$ を持つ．これより，この微分方程式の一般解は次式となる．

$$T^*(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} \qquad (C_1, C_2\text{：定数})$$

したがって，式(1-9)の一般解を次のように得る．

$$T(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} + \frac{Q_{\mathrm{s}}}{\beta} + T_{\mathrm{out}} \qquad (1\text{-}10)$$

$$\lambda_1 = \boxed{\text{C6}} + \sqrt{(\boxed{\text{C6}})^2 + \boxed{\text{C7}}}, \quad \lambda_2 = \boxed{\text{C6}} - \sqrt{(\boxed{\text{C6}})^2 + \boxed{\text{C7}}}$$

(ii) 熱伝導を無視できるとした場合 ($\boxed{\text{C5}} = 0$) の一般解を求める．

$T^*$ を前問(i)と同じようにおいて解くと，式(1-9)の一般解を次式で得る。$T^*$ に関する斉次の常微分方程式とそれを解く過程を解答用紙裏面の記述欄 1 に書きなさい．

$$T(z) = C_3 \exp(-\boxed{\text{C8}}\, z) + \frac{Q_{\mathrm{s}}}{\beta} + T_{\mathrm{out}} \qquad (C_3\text{：定数}) \qquad (1\text{-}11)$$

---- $\boxed{\text{BX}}$ ～ $\boxed{\text{C8}}$ の選択肢 ----------------------------------------------------------------------

① $v_x$ ② $v_y$ ③ $v_z$ ④ $q_x$ ⑤ $q_y$ ⑥ $q_z$ ⑦ $k$ ⑧ $\rho c v_{\mathrm{in}}$ ⑨ $\beta$

⑩ $\dfrac{\rho c v_{\mathrm{in}}}{k}$ ⑪ $\dfrac{\rho c v_{\mathrm{in}}}{2k}$ ⑫ $\dfrac{\rho c v_{\mathrm{in}}}{\beta}$ ⑬ $\dfrac{\rho c v_{\mathrm{in}}}{2\beta}$ ⑭ $\dfrac{\beta}{\rho c v_{\mathrm{in}}}$ ⑮ $\dfrac{\beta}{2\rho c v_{\mathrm{in}}}$ ⑯ $\dfrac{\beta}{k}$ ⑰ $\dfrac{\beta}{2k}$

3. 定数$C_1, C_2, C_3$を決定し，温度分布を表す関数$T(z)$を得る．

式(1-9)～(1-11)を再掲する．これらは，基本的には窓区間の式である．

$$k\frac{d^2T}{dz^2} - \rho c v_{\mathrm{in}}\frac{dT}{dz} - \beta T = -\beta T_{\mathrm{out}} - Q_{\mathrm{s}} \tag{1-9}$$

$$T(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} + \frac{Q_{\mathrm{s}}}{\beta} + T_{\mathrm{out}} \tag{1-10}$$

$$\lambda_1 = \boxed{\text{C6}} + \sqrt{(\boxed{\text{C6}})^2 + \boxed{\text{C7}}}\text{ , } \lambda_2 = \boxed{\text{C6}} - \sqrt{(\boxed{\text{C6}})^2 + \boxed{\text{C7}}}$$

$$T(z) = C_3 \exp(-\boxed{\text{C8}}\, z) + \frac{Q_{\mathrm{s}}}{\beta} + T_{\mathrm{out}} \tag{1-11}$$

これらの式が，天井，壁，床の各区間ではどのようになるかを考える．

(1) 境界条件（境界を通して出入りする熱）を考える．

天井と床は断熱なので$Q_{\mathrm{s}} = \boxed{\text{C9}}$ かつ$\beta = \boxed{\text{CX}}$ である．よって，もっと簡単な微分方程式と一般解となる．壁では式(1-9)～(1-11)の形となるが，$C_1$，$C_2$，$C_3$，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\beta$，$Q_{\mathrm{s}}$は，窓とは別である．ここで，屋内に到達する日射は窓からのみとするので，壁では $\boxed{\text{D1}}$ $=0$となる．

(2) 窓と壁の区間それぞれの一般解に具体的な数値を入れて$C_1, C_2, C_3$を決定する．

一般的な家庭用空調機の流速である$v_{\mathrm{in}}$ = 0.1 m/s の場合を考える．必要な数値を次のように与え，これらを用いたときの一般解の式(1-10), (1-11)におけるべき指数の係数値を表 1-1 に示す．なお，本問では MKS 単位系を用いる．

部屋の寸法：奥行$L_x = 6$ m，間口$L_y = 3$ m，高さ$L_z = 3$ m

空気の物性値：$k = 2.57\times10^{-2}$ W/(m K)，$\rho = 1.17$ kg/m$^3$，$c = 1.01\times10^3$ J/(kg K)

外気温度$T_{\mathrm{out}} = 5$ ℃，窓から屋内に到達する日射$Q_{\mathrm{s}} = 1000$ W/ m$^3$

熱の通り易さに対応した係数$\beta$　　窓: 68.4 W/(m$^3$ K)，壁: 9.28 W/(m$^3$ K)

表 1-1　式(1-10), (1-11)におけるべき指数の係数値（単位：m$^{-1}$）

| | | |
|---|---|---|
| 式(1-10)の$\lambda_1$ | 窓:　$4.57\times10^3$, | 壁:　$4.57\times10^3$ |
| 式(1-10)の$\lambda_2$ | 窓:　$-5.83\times10^{-1}$, | 壁:　$-7.91\times10^{-2}$ |
| 式(1-11)の$-\boxed{\text{C8}}$ | 窓:　$-5.83\times10^{-1}$, | 壁:　$-7.91\times10^{-2}$ |

まず，$C_1$を決定する．表 1-1 より，本問で考える$z$の範囲では$e^{\lambda_1 z}$は極めて大きな値となることがわかる．例えば$z = 10$ m のとき，窓と壁の両方で$e^{\lambda_1 z}$は約$2.7^{50000}$にもなり，現実の室温としてはあり得ない．よって，$C_1 =$ D2 とするのが妥当である．また，表 1-1 に示すように，べき指数の係数は，熱伝導を考慮した場合の$\lambda_2$と考慮しない場合の $-$ C8 で，有効数字 3 桁まで取っても同じ値をとる．これらのことより，$C_1 =$ D2 としたとき，式(1-10)と式(1-11)は全く同じとなり，同じ解を持つ．

このことは，この流速では熱伝導を無視し得ることを示している．それを確かめるために，式(1-10)において$k \to 0$の極限を考える．このとき，( C6 )$^2$の方が C7 よりも早く D3 なるので，$\lambda_1 \to$ D4 ，$\lambda_2 \to$ D5 となる．この場合，$C_1 \neq$ D2 だと温度$T(z)$が正負どちらかの無限大に発散することになるが，それは現実の物理現象としてあり得ないので，$C_1 =$ D2 とするのが妥当である．これは上述したことと合致する．

したがって，本問のような設定の場合，$v_{\mathrm{in}} \geq 0.1$ m/s では熱伝導を無視できることがわかる（天井と床の区間についても同じような議論をすることができる）．これより，窓と壁では，式(1-10)と式(1-11)は同じになり$C_2 = C_3$となる．また，天井と床では，解くべき微分方程式が$dT/dz = 0$となり，それぞれで定温となる．

次に，窓と壁の区間それぞれの$C_3 (= C_2)$を決定する．天井は定温なので，窓区間の式を用いた天井の温度$T(L_z)$と壁区間の式を用いた天井の温度$T(L_x + L_z)$が等しい．床についても同様で，窓区間の式を用いた床の温度$T(0)$と壁区間の式を用いた床の温度$T(L_x + 2L_z)$が等しい．これらの関係を連立して解くことで，窓と壁の区間それぞれの$C_3 (= C_2)$，天井および床の温度が求められる．

以上より，温度$T(z)$を次のように得る．

| | | |
|---|---|---|
| 窓： | $T(z) = -3.5\exp(-5.83 \times 10^{-1} z) + 19.6$ | $(0 \leq z \leq 3)$ |
| 天井： | $T(z) = 19.0$ | $(3 \leq z \leq 9)$ |
| 壁： | $T(z) = 28.5\exp(-7.91 \times 10^{-2} z) + 5.0$ | $(9 \leq z \leq 12)$ |
| 床： | $T(z) = 16.1$ | $(12 \leq z \leq 18)$ |

---- C9 〜 D5 の選択肢 ----------------------------------------------------------------------------

① 1　② 0　③ $-1$　④ $+\infty$　⑤ $-\infty$　⑥ $k$　⑦ $\rho$　⑧ $c$　⑨ $v_{\mathrm{in}}$　⑩ $\beta$

⑪ $T_{\mathrm{out}}$　⑫ $Q_{\mathrm{s}}$　⑬ $T$　⑭ $\dfrac{dT}{dz}$　⑮ $\dfrac{d^2T}{dz^2}$　⑯大きく　⑰小さく

4. 屋内の温度分布のグラフを描く.

問 3 で求めた温度 $T(z)$ を再掲する.

| | | |
|---|---|---|
| 窓: | $T(z) = -3.5\exp(-5.83\times10^{-1}z)+19.6$ | $(0 \le z \le 3)$ |
| 天井: | $T(z) = 19.0$ | $(3 \le z \le 9)$ |
| 壁: | $T(z) = 28.5\exp(-7.91\times10^{-2}z)+5.0$ | $(9 \le z \le 12)$ |
| 床: | $T(z) = 16.1$ | $(12 \le z \le 18)$ |

解答用紙裏面の記述欄 2 に図 1-5 が印刷されているので, 同じ図上に温度分布のグラフ概形を描きなさい. 必要であれば, 図 1-6 に示された指数関数 $e^{as}$ のグラフを参考にすること.

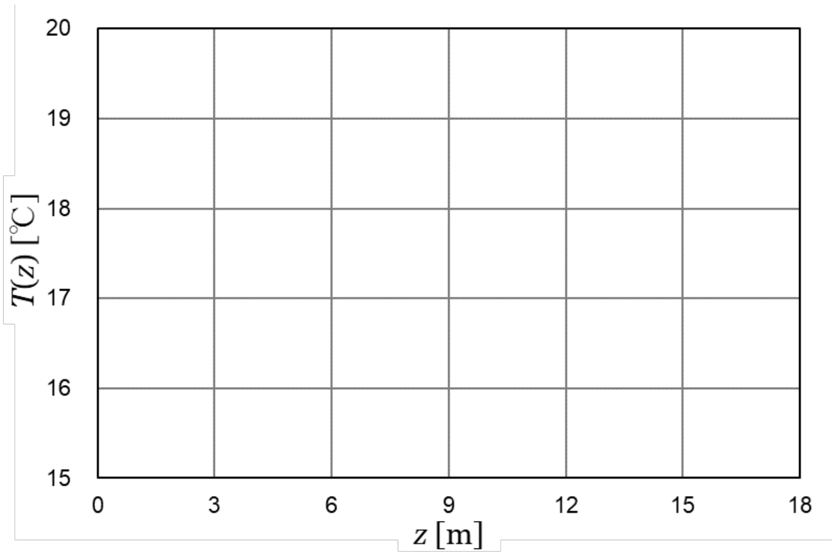



図 1-5　管路に沿った温度分布

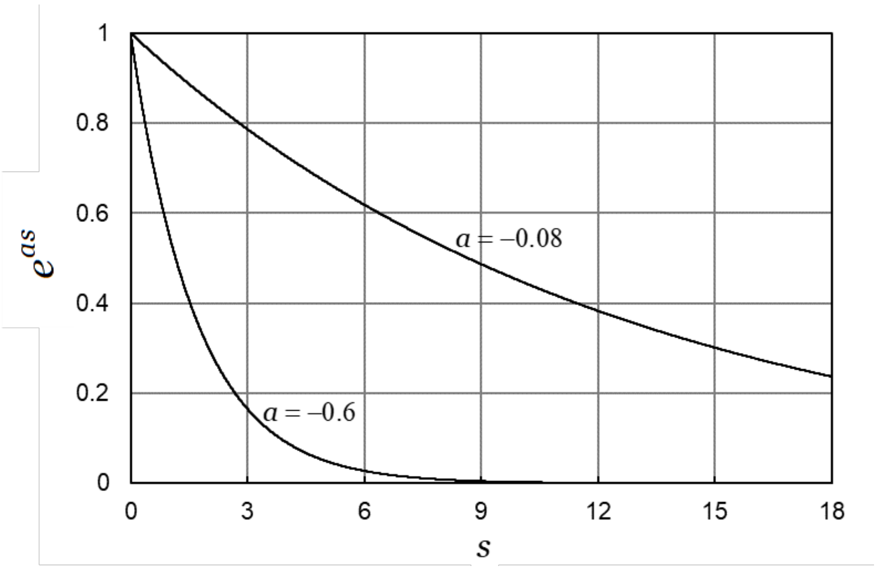



図 1-6　指数関数 $e^{as}$ のグラフ

（参考資料）

本問で用いた数値データを参考までに示しておく。

部屋の寸法（6 畳間＋洗面所）: 奥行 $L_x = 6$ m, 間口 $L_y = 3$ m, 高さ $L_z = 3$ m

管路断面（正方形）の一辺の長さ $D = 0.1$ m

空気の物性値（室温付近）:

熱伝導率 $k = 2.57\times10^{-2}$ W/(m K), 密度 $\rho = 1.17$ kg/m$^3$, 熱容量 $c = 1.01\times10^3$ J/(kg K)

屋内の送風流速 $v_{\mathrm{in}} = 0.1$ m/s, 屋外の平均風速 $v_{\mathrm{out}} = 3$ m/s

外気温度と日射（冬の日中平均）:

外気温度 $T_{\mathrm{out}} = 5$ ℃, 屋内に到達する日射 $q_{\mathrm{s}} = 100$ W/m$^2$ → $Q_{\mathrm{s}} = q_{\mathrm{s}} / D = 1000$ W/ m$^3$

熱の通り易さの係数 $\beta = h / D$:　窓: 68.4 W/(m$^3$ K), 壁: 9.28 W/(m$^3$ K)

熱貫流率 $h$:　窓: 6.84 W/(m$^2$ K), 壁: 0.928 W/(m$^2$ K)

(内部の熱伝導, 表面と空気の間の熱伝達, 表面における放射熱による熱移動を括った係数)

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\alpha_{\text{air-in}} + \alpha_{\text{rad-in}}} + \sum \frac{\delta_i}{k_i} + \frac{1}{\alpha_{\text{air-out}} + \alpha_{\text{rad-out}}}$$

窓や壁の厚み $\delta_i$ と熱抵抗（厚み/熱伝導率）$\delta_i / k_i$

窓（1 枚ガラス）　$\delta = 5\times10^{-3}$ m, $\delta / k = 6.4\times10^{-3}$ K/W

壁（木材+断熱材+コンクリート+モルタル）$\sum \delta_i = 0.2$ m, $\sum (\delta_i / k_i) = 0.938$ K/W

固体表面から空気への対流熱伝達係数 $\alpha_{\mathrm{air}} = 5.6 + 3.9v$ （$v \le 4.9$ m/s の場合の実験式)

室内側: 5.99 W/(m$^2$ K), 室外側: 17.3 W/(m$^2$ K)

固体表面における放射熱伝達係数（室内外）$\alpha_{\mathrm{rad}} = 4.63$ W/(m$^2$ K)

＜学生のみなさんへ＞

統一テストの大問１は工学的総合問題です。みなさんは、大学に入ってすぐに学科の専門科目を学びたいのだと思いますが、専門科目を学ぶためには高校までに学ぶ内容に加えて、さらに高度な数学・物理学・化学が必要です。大問１の工学的総合問題は、大学で学ぶ理数系基礎科目の内容が工学の中でどのように使われるのかを、簡単な例を用いて段階的に示しています。式が具体的に何を表わしているかを、是非意識するようにしましょう。

＊統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP　http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/

問合せメールアドレス　eng-edu@grp.tohoku.ac.jp