

令和 03 年度 統一テスト

(理数基礎学力到達度テスト)

<問題冊子①> 必答問題

大問 1 (数学①)

試験時間 45 分間

解答開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません

【解答する際の注意】

1. 大問 1 専用の解答用紙 1 枚 (裏面もあり) を用いること.
2. マーク式解答と記述式解答の混合なので注意すること.
3. 解答の仕方に特に指示が無い場合は, 問題文の空欄 **A1**, **A2**, … にあてはまるものを該当する解答群 (選択肢) から選び, 選択肢の番号①, ② … で答えること. 同じ選択肢が複数回あてはまることもある.
4. 空欄の中には通常の式では不要な「1」「-1」「0」が当てはまることがある. その場合も, 式が成り立つために必要なものとして選択し, 解答すること.
5. 問題に関する質問は, 汚損で読めない等以外は原則認めない.

大問1(数学①)必答問題

粒子加速器のひとつであるサイクロトロンは、物理的な実験のみならず医療における検査や治療にも用いられている。サイクロトロンはだまかには、図 1-1 に示すように、中央に入射された荷電粒子が、電場で加速されることが磁場で向きを曲げられて円弧を描くことを繰り返し、目的とするエネルギーを得て射出される、という仕組みである。半円形の 2 つのデュー電極では磁場のみで電場が無く、電極間隙では電場のみで磁場が無い。

本問では、電磁場における 1 個の荷電粒子の運動を考える。手順としては、最初に任意の電磁場における運動について、運動の支配方程式を立てて解き、運動を表す関数を得る。その後で、サイクロトロンという特殊な電磁場における荷電粒子の運動を考える。

以降、ベクトルを太字で表記し、時間の関数の微分については、例えば関数 u であれば、1 階微分を du/dt または \dot{u} と表記する。また、 i は虚数単位である。

電磁場は、電場(電界) \mathbf{E} 、電束密度 \mathbf{D} 、磁界 \mathbf{H} 、磁束密度 \mathbf{B} で表されるが、ここでは、荷電粒子の運動を決める \mathbf{E} と \mathbf{B} のみを扱う。一様な電場 $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ と一様な磁束密度 $\mathbf{B}=(0, 0, B)$ の中を、質量 m 、電荷 $q (> 0)$ の荷電粒子が動くことを考える。図 1-2 のように、任意の時刻 t における粒子の位置を $\mathbf{r}=(x, y, z)$ 、速度を $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ とおく。時刻 $t = 0$ では、位置 $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ 、速度 $\mathbf{v}_0=(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ で与えられるとする。

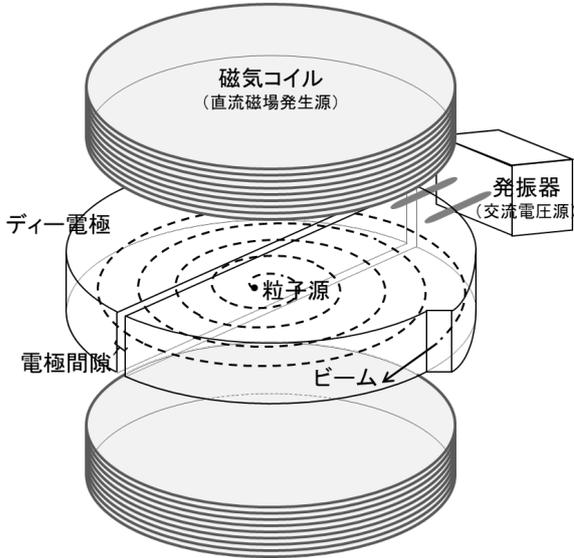


図 1-1 サイクロトロンの構成要素

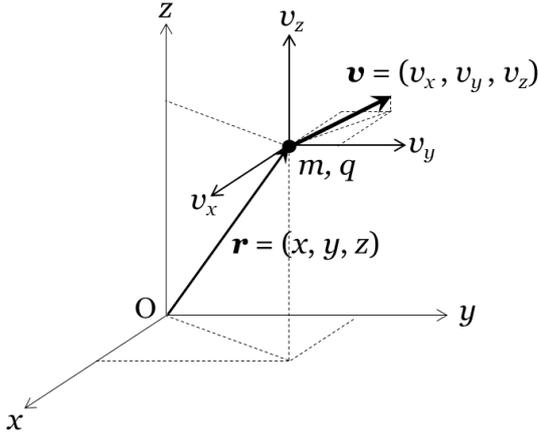


図 1-2 時刻 t における荷電粒子の位置 \mathbf{r} と速度 \mathbf{v}

1. 任意の電磁場における荷電粒子の運動の支配方程式を立てる.

荷電粒子には磁氣的な力 $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ と電氣的な力 $q\mathbf{E}$ が作用するので, 運動方程式は次式で与えられる.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \quad (1-1)$$

(1) まず, 一般的な $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の場合の各軸方向の支配方程式を得る.

式(1-1)の運動方程式は, 例えば, x 軸方向には次のようになる.

$$m \frac{dv_x}{dt} = q(\boxed{\text{A1}} - \boxed{\text{A2}} + E_x)$$

よって, 式(1-1)を列ベクトルと行列を用いて表すと次式となる.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{q}{m} \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \frac{q}{m} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

式(1-2)の右辺第 1 項における 3 次正方行列の階数は 2 である.

(2) \mathbf{B} の方向に z 軸の方向を合わせた $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ の場合の各軸方向の支配方程式を得る.

式(1-2)より, 各軸方向の運動方程式は次のようになる.

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}(v_y B + E_x), \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}(-v_x B + E_y), \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z \quad (1-3)$$

式(1-3)より, x 方向と y 方向の運動は互いに関係しているが, z 方向の運動は独立していることが分かる. したがって, 電場 \mathbf{E} と速度 \mathbf{v} を, 磁束密度 \mathbf{B} に垂直なベクトル(添え字 \perp)つまり $\boxed{\text{A3}}$ に投影したものと, \mathbf{B} に平行なベクトル(添え字 \parallel)つまり $\boxed{\text{A4}}$ に投影したものに分けて考えてよく, 次式のように表される.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel = (E_x, E_y, 0) + (0, 0, E_z), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel = (v_x, v_y, 0) + (0, 0, v_z)$$

---- $\boxed{\text{A1}} \sim \boxed{\text{A4}}$ の選択肢 -----

- ① x 軸 ② y 軸 ③ z 軸 ④ xy 平面 ⑤ yz 平面 ⑥ zx 平面 ⑦ E_x ⑧ E_y ⑨ E_z
 ⑩ $v_x B_x$ ⑪ $v_x B_y$ ⑫ $v_x B_z$ ⑬ $v_y B_x$ ⑭ $v_y B_y$ ⑮ $v_y B_z$ ⑯ $v_z B_x$ ⑰ $v_z B_y$ ⑱ $v_z B_z$

2. 連立微分方程式を解き、速度および位置の関数を得る.

(1) 連立微分方程式(1-3)を独立した微分方程式に分離する.

式(1-3)より, x 方向と y 方向の運動方程式は, 列ベクトルと行列を用いると次式で表される.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \frac{q}{m} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値は, 選択肢番号の若い順に, $\lambda_1 = \boxed{\text{A5}}$ および $\lambda_2 = \boxed{\text{A6}}$

と求められる. よって, 固有値 $\lambda_1 = \boxed{\text{A5}}$ に対応する固有ベクトルは, 例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{\text{A7}} \end{bmatrix}$ で

あり, 固有値 $\lambda_2 = \boxed{\text{A6}}$ に対応する固有ベクトルは, 例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{\text{A8}} \end{bmatrix}$ である. これらの

固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \boxed{\text{A7}} & \boxed{\text{A8}} \end{bmatrix}$ をつくと, その逆行列は

$X^{-1} = \frac{1}{\boxed{\text{A9}}} \begin{bmatrix} \boxed{\text{A8}} & -1 \\ -\boxed{\text{A7}} & 1 \end{bmatrix}$ となる. したがって, 行列 X を変換行列として行列 A を対

角化することができ, $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \boxed{\text{AX}} & \boxed{\text{B1}} \\ \boxed{\text{B2}} & \boxed{\text{B3}} \end{bmatrix}$ を得る. ここで, 未知関数の列ベクトル

$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$ を, 別の未知関数 $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ が行列 X により変換されたものと考え, $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ とな

る. したがって, 式(1-4)を考慮すると次式を得る.

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{bmatrix} = \frac{qB}{m} \boxed{\text{B4}} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + \frac{q}{m} \boxed{\text{B5}} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

---- $\boxed{\text{A5}} \sim \boxed{\text{B5}}$ の選択肢 -----

- ① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ i ⑥ $-i$ ⑦ $2i$ ⑧ $-2i$ ⑨ A ⑩ X
 ⑪ A^{-1} ⑫ X^{-1} ⑬ AX ⑭ XA ⑮ $A^{-1}X$ ⑯ $X^{-1}A$ ⑰ $A^{-1}XA$ ⑱ $X^{-1}AX$ ⑲ 0

(2) 得られた微分方程式を解き、速度および位置の関数を得る。

表記を簡単にするために $qB/m \equiv \omega$ とおき、式(1-5)を書き直すと次式を得る。

$$\frac{du_x}{dt} - i\omega u_x = \frac{q}{2m}(E_x - iE_y) \quad (1-6a)$$

$$\frac{du_y}{dt} + i\omega u_y = \frac{q}{2m}(E_x + iE_y) \quad (1-6b)$$

非斉次微分方程式である式(1-6a)と式(1-6b)を、各々、定数変化法で解く。まず、式(1-6a)の右辺を0とした斉次方程式を解き、斉次解 $u_x = c_{1x}$ B6 (c_{1x} :定数)を得る。ここで、 c_{1x} を改めて t の関数として考え、斉次解の式の両辺を t で微分する。

$$\frac{dc_{1x}}{dt} = \left\{ \frac{d}{dt}(\text{ B7 }) + (\text{ B8 }) \right\} e^{-i\omega t}$$

これは、式(1-6a)より次式のように整理できる。

$$\frac{dc_{1x}}{dt} = \frac{q}{2m} \{ (\text{ B9 }) + (\text{ BX }) \} e^{-i\omega t}$$

これより、 c_{1x} を t の関数として求めることができ、さらに u_x を得る。同様に式(1-6b)を解くと u_y を得る。ただし、 u_x と u_y における積分定数を、各々 c_{2x} と c_{2y} とする。

$$u_x = c_{2x} e^{i\omega t} + \frac{1}{2B} \{ (\text{ C1 }) + (\text{ C2 }) \}$$

$$u_y = c_{2y} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2B} (-iE_x + E_y)$$

これらを、 $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ に代入する。

---- B6 ~ C2 の選択肢 -----

- ① u_x ② $-u_x$ ③ iu_x ④ $-iu_x$ ⑤ $i\omega u_x$ ⑥ $-i\omega u_x$ ⑦ ωt ⑧ $-\omega t$ ⑨ $i\omega t$ ⑩ $-i\omega t$
 ⑪ $e^{i\omega t}$ ⑫ $e^{-i\omega t}$ ⑬ E_x ⑭ $-E_x$ ⑮ iE_x ⑯ $-iE_x$ ⑰ E_y ⑱ $-E_y$ ⑲ iE_y ⑳ $-iE_y$

オイラーの公式より得る, $e^{i\omega t} = \cos \omega t + (\text{C3})$ および $e^{-i\omega t} = \text{C4} + (\text{C5})$ を利用して式を整理する. 初期速度 $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ より積分定数を得られるので, 荷電粒子の速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を時間の関数として次のように得る. つまり, 式(1-3)の特殊解である.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x0} - \frac{E_y}{B} & v_{y0} + \frac{E_x}{B} \\ v_{y0} + \frac{E_x}{B} & -v_{x0} + \frac{E_y}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_y}{B} \\ -\frac{E_x}{B} \end{bmatrix} \quad (1-7ab)$$

$$v_z = \frac{q}{m} E_z t + v_{z0} \quad (1-7c)$$

式(1-7ab)より, \mathbf{v}_\perp が時間に依存するベクトルと時間に依存しない定ベクトルの和であることが分かる. また, 式(1-7ab)から得られる2式から t を消去すると, v_x と v_y の関係を表す式を得る.

$$\left(v_x - \frac{E_y}{B} \right)^2 + \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right)^2 = \left(v_{x0} - \frac{E_y}{B} \right)^2 + \left(v_{y0} + \frac{E_x}{B} \right)^2 \equiv \rho^2 \quad (1-8)$$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ なので, 式(1-7)の両辺をさらに時間で積分する. 初期位置 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ より積分定数を得られるので, 荷電粒子の位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を時間の関数として次のように得る.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} v_{x0} - \frac{E_y}{B} & v_{y0} + \frac{E_x}{B} \\ v_{y0} + \frac{E_x}{B} & -v_{x0} + \frac{E_y}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{C6} \\ \text{C7} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{E_y}{B} \\ -\frac{E_x}{B} \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} v_{y0} + \frac{E_x}{B} \\ -v_{x0} + \frac{E_y}{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (1-9ab)$$

$$z = \frac{q}{2m} E_z t^2 + v_{z0} t + z_0 \quad (1-9c)$$

式(1-9ab)は, 次のように整理できる.

$$\left[x - \left\{ \frac{E_y}{B} t + \frac{1}{\omega} \left(v_{y0} + \frac{E_x}{B} \right) + x_0 \right\} \right]^2 + \left[y - \left\{ -\frac{E_x}{B} t - \frac{1}{\omega} \left(v_{x0} - \frac{E_y}{B} \right) + y_0 \right\} \right]^2 = \left(\frac{\rho}{\omega} \right)^2 \quad (1-10)$$

よって荷電粒子は, xy 平面と平行な半径 ρ/ω の円運動を基に, z 方向には C8 運動をするような, 螺旋運動をする. ただし, 螺旋の中心座標に時間 t が入っているので, xy 平面に投影した螺旋中心の位置は時間とともに $(\text{C9}, \text{CX}, 0)$ の方向にずれていく. また, 問2で表記を簡単にするためにおいた $qB/m \equiv \omega$ は, 実はこの螺旋運動の D1 である. 質量 m と電荷 q は粒子の種類により固有の値をとるので, 磁束密度 \mathbf{B} が一様かつ一定であれば, ω は電場 \mathbf{E} や初期速度 \mathbf{v}_0 に依らず一定となる.

----- **C3** ~ **D1** の選択肢 -----

- ① $\cos \omega t$ ② $-\cos \omega t$ ③ $i \cos \omega t$ ④ $-i \cos \omega t$ ⑤ $\sin \omega t$ ⑥ $-\sin \omega t$ ⑦ $i \sin \omega t$ ⑧ $-i \sin \omega t$
 ⑨ E_x/B ⑩ $-E_x/B$ ⑪ E_y/B ⑫ $-E_y/B$ ⑬ 等速度 ⑭ 等加速度 ⑮ 周期 ⑯ 振幅
 ⑰ 振動数 ⑱ 角振動数
-

(3) 螺旋中心がずれていく方向を確認して、ベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ を作図する。

電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} の外積は $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = (E_y B, -E_x B, 0)$ となるので、 xy 平面に投影した螺旋中心は $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ の速度でその方向にずれていくことが分かる。 $\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B} / B^2$ も同じ方向である。これは、図 1-3 のように \mathbf{E} と \mathbf{E}_\perp と \mathbf{B} の始点を合わせると、これら 3 つのベクトルが同じ平面上にあり、かつ、 \mathbf{E} から \mathbf{B} に回す方向と \mathbf{E}_\perp から \mathbf{B} に回す方向が同じだからである。また、 $\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ と求められるので、 \mathbf{E} と \mathbf{B} でつくられる平行四辺形の面積と、 \mathbf{E}_\perp と \mathbf{B} でつくられる長方形の面積は等しい。

電場の単位は V m^{-1} (ボルト毎メートル = $\text{J m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{A}^{-1}$)、磁束密度の単位は T (テスラ = $\text{J m}^{-2} \text{A}^{-1}$) である。図 1-3 では、 1V m^{-1} と 1T が同じ長さになるように描いている。例えば、各成分の値が $B > E_y > E_x > 1$ という関係にある場合、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ はどのように表されるか。解答用紙裏面の記述欄 1 に図 1-3 が印刷されているので、同じ図上に $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ を表すベクトル(矢印)を作図しなさい。必要な補助線も点線で描くこと。

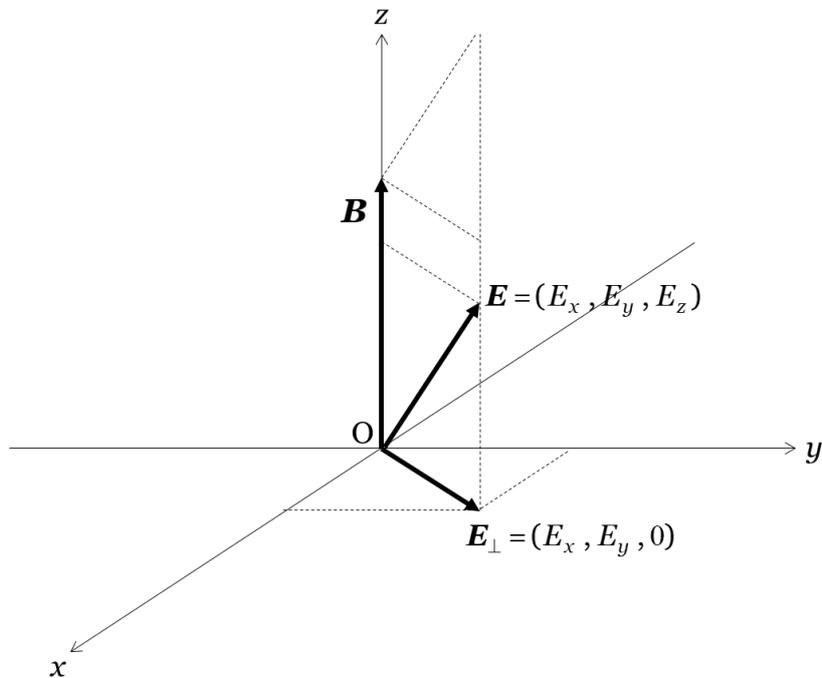


図 1-3 電場 \mathbf{E} および磁束密度 \mathbf{B} の向き

3. 荷電粒子の運動の速度と軌道, 荷電粒子に作用する力を考える.

式(1-8)より, $v_x v_y$ 平面の原点に各時刻 t における \mathbf{v}_\perp の始点を重ねたときの終点の軌跡は, 図 1-4 のような円になり, \mathbf{v}_\perp の向きと大きさが周期的に変化することがわかる.

粒子は図 1-5 のような 3 次元の螺旋軌道を描く. 螺旋中心の移動速度は(, , $qE_z t / m + v_{z0}$)であるため, 軌道は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の方向には一定間隔でずれて, z 方向には間隔が段々大きくなる螺旋となる. なお, \mathbf{E} と \mathbf{B} が直交するような場合 ($E_z = 0$) は, z 方向にも一定間隔の螺旋軌道となる.

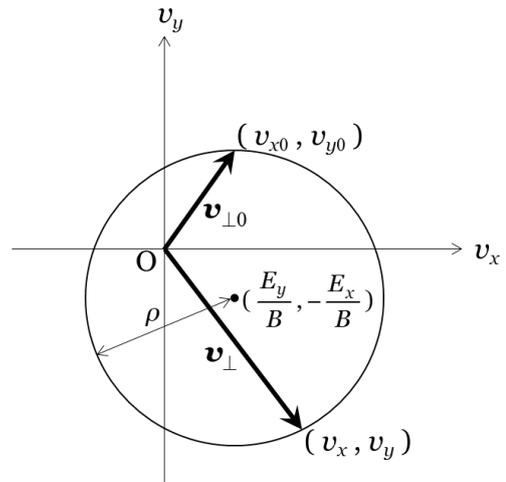


図 1-4 \mathbf{v}_\perp の速度円 ($\mathbf{v}_{\perp 0}$ と円中心は一例)

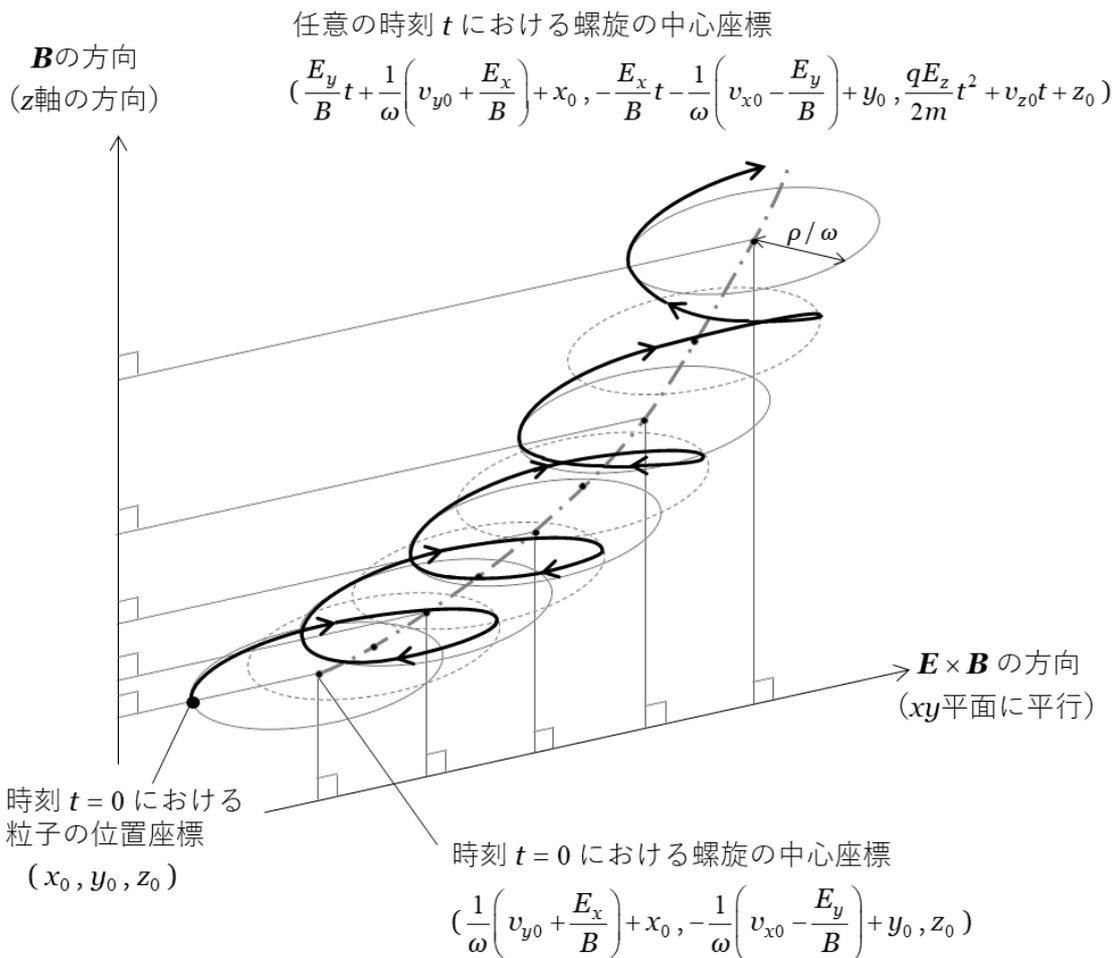


図 1-5 任意の電磁場における荷電粒子の運動の軌跡(初期位置は一例)

図 1-6 に、この 3 次元の螺旋運動を xy 平面に投影したときの 1 周分を示す。ある時刻に、粒子が 3 次元の螺旋軌道上のある点を速度 \mathbf{v} で通過する。それを xy 平面に投影すると、点 Q を速度 \mathbf{v}_\perp で通過することになる。図 1-6 では 1 V m^{-1} と 1 m s^{-1} が同じ長さになるように描かれており、点 Q では \mathbf{E}_\perp と \mathbf{v}_\perp の矢印の長さは同じであるとする。このとき、粒子に作用する電気的な力 $q\mathbf{E}_\perp$ の向きは **D2** であり、磁気的な力 $q(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ の向きは **D3** である。
 ---- **D2** と **D3** の選択肢 (下図の中の①~⑩. 矢印は $\pi/4$ 間隔) -----

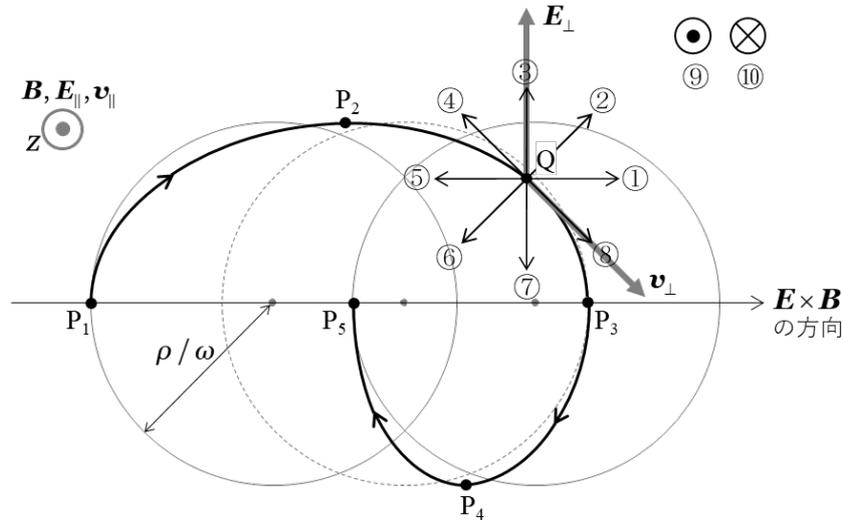


図 1-6 xy 平面に投影した螺旋運動の 1 周分 ($P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5$)

粒子は、電気的な力により加速されるため、 \mathbf{v}_\perp が **D4** の方向を向くときに最も加速される。ただし、回転運動なので、速度は加速度より位相が $\pi/2$ 遅れる。よって $|\mathbf{v}_\perp|$ は、 \mathbf{v}_\perp が **D5** の方向を向く (粒子が点 **D6** を通過する) ときに最大となり、その **D7** 周期後に最小となる。これにより、**D5** の方向に進んだ距離と同じ距離を逆の方向に戻ることができず、中心がずれていく螺旋運動となる。

粒子に作用する磁気的な力が螺旋運動の向心力である。 xy 平面に投影した螺旋の曲率半径を R_c とすると、 $|q(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B})| = mR_c\omega^2$ が成り立つ。つまり、 $|\mathbf{v}_\perp| = R_c\omega$ が導出される。よって、粒子が点 **D6** を通過するときに、向心力の大きさも曲率半径 R_c も **D8** となる。

なお、粒子の軌道形状は、基本は螺旋であるが、初期速度に依存して変化する。

---- **D4** ~ **D8** の選択肢 -----

- ①最大 ②最小 ③等速度 ④等加速度 ⑤ \mathbf{E}_\perp ⑥ $-\mathbf{E}_\perp$ ⑦ \mathbf{B} ⑧ $-\mathbf{B}$
 ⑨ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ⑩ $-\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ⑪ P_1 ⑫ P_2 ⑬ P_3 ⑭ P_4 ⑮ $1/4$ ⑯ $1/2$ ⑰ $3/4$ ⑱ 1

4. サイクロトロンにおける荷電粒子の運動とエネルギーを考える.

冒頭で述べたように, デー電極では磁場のみ, 電極の間隙では電場のみである. よって, デー電極中の電場は $\mathbf{E}_{\text{dee}} = (0, 0, 0)$, 磁束密度は $\mathbf{B}_{\text{dee}} = (0, 0, B)$ であり, 電極間隙中の電場は $\mathbf{E}_{\text{gap}} = (0, E, 0)$, 磁束密度は $\mathbf{B}_{\text{gap}} = (0, 0, 0)$ である. 荷電粒子をサイクロトロンを中心に入射すると, 螺旋中心のずれが無い状態で, 水平面上で渦巻き運動をする. サイクロトロン電極間隙の幅を d , 最外周円半径を R とする. 本問では簡単のために, 図 1-7 のように, 時刻 0 に荷電粒子を速さ 0 で点 O に入射することを考える.

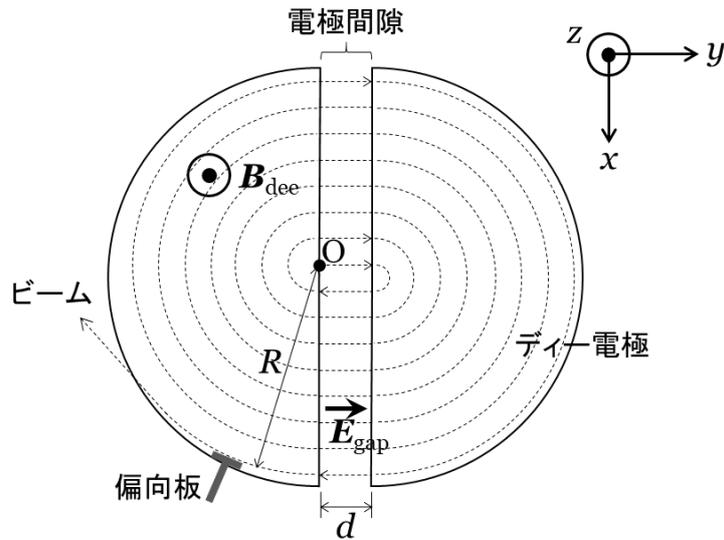


図 1-7 サイクロトロンの模式図(電極間隙を誇張している)

(1) 荷電粒子の運動と速さを考える.

間隙では磁場が無いので, 粒子は等加速度運動をする. 間隙を n 回通過すると速度 \mathbf{v}_n ($|\mathbf{v}_n| = v_n$) になるとする. デー電極の中では電場が無いので, 速さ v_n で電極に入ると半径 v_n / ω の円運動を半周して, 速さ v_n のまま間隙に出る. これが繰り返されて, 図 1-8 のように速さ v_n が大きくなり, それに伴って円運動の半径も大きくなる.

(2) 間隙における電場を考える.

サイクロトロンでは, デー電極中における円運動と同じ ω の高周波電圧をかける. 電位差により電場が生じるので, 電場も同じ ω で変動する. ただし, 間隙に出るとき粒子の速度と電場の向きを合わせる必要がある. よって, ここでは振幅を E_a として $\mathbf{E} = E_a \cos \omega t$ と表すことができる.

解答用紙裏面の記述欄 2 に図 1-8 が印刷されているので, $|\mathbf{v}_n|$ のグラフに対応させて \mathbf{E} のグラフの概略を描きなさい.

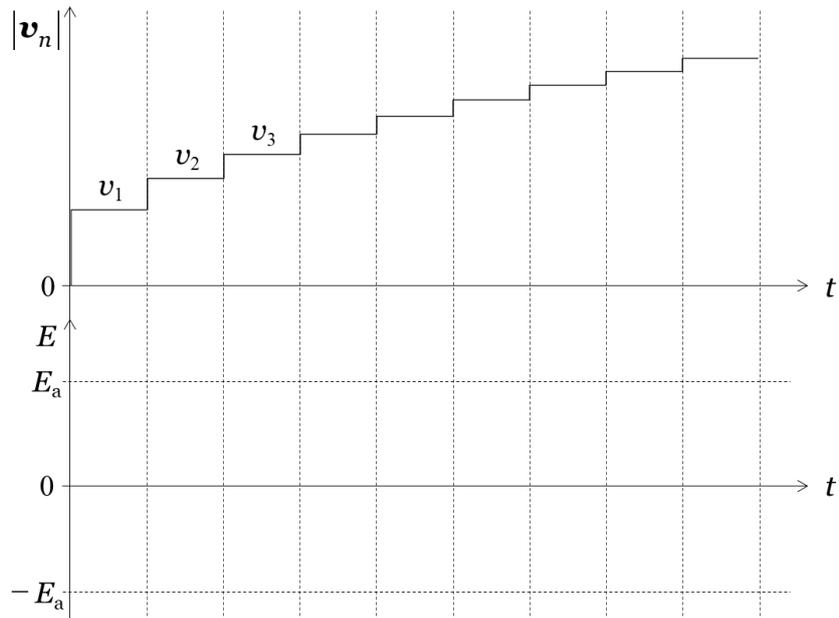


図 1-8 サイクロトロンにおける荷電粒子の速さと間隙中の電場の時間変化
(間隙通過に要する時間は考慮に入れていない)

(3) 医療用の小型サイクロトロンを考え、具体的な数値で粒子が得るエネルギーを求める。

小型のサイクロトロン ($R = 1.0 \text{ m}$, $d = 10 \text{ mm}$) を用いて、陽子 H^+ ($m = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) を, $B = 1.0 \text{ T}$, $E_a = 1.0 \times 10^4 \text{ kV m}^{-1}$ の条件下で加速して射出する. このときの周波数は 15 MHz となり, 周期は $6.9 \times 10^{-8} \text{ s}$ となる.

間隙の電位差は $E_a d$ なので, 陽子は間隙を通過するたびに $qE_a d = 1.6 \times \boxed{\text{D9}}$ J (0.1 MeV) の電気エネルギーをもらい, これが運動エネルギーに変換されることで速さが増加する. 最外周の円運動の区間 (偏向板の手前) における向心力は $mR\omega^2 = 1.5 \times 10^{-11} \text{ N}$ であり, 最終的に $\boxed{\text{DX}} = 7.5 \times \boxed{\text{E1}}$ J (47 MeV) のエネルギーを持って, 速さ $9.4 \times 10^4 \text{ km s}^{-1}$ で射出される. このような陽子線を癌病巣にピンポイントで照射することが, 癌治療のひとつとして行われている.

なお, 速さが光速 ($3.0 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$) に近づいてくると, 粒子にエネルギーをいくら与えても加速できなくなる. これは, 粒子の見かけの $\boxed{\text{E2}}$ が大きくなっているからである.

----- $\boxed{\text{D9}} \sim \boxed{\text{E2}}$ の選択肢 -----

①質量 ②電荷 ③振動数 ④エネルギー ⑤仕事

⑥ $\frac{mR\omega}{2}$ ⑦ $\frac{mR\omega^2}{2}$ ⑧ $\frac{mR^2\omega^2}{2}$ ⑨ $mR\omega$ ⑩ $mR^2\omega^2$

⑪ 10^{-11} ⑫ 10^{-12} ⑬ 10^{-13} ⑭ 10^{-14} ⑮ 10^{-15} ⑯ 10^{-16} ⑰ 10^{-17} ⑱ 10^{-18} ⑲ 10^{-19}

<学生のみなさんへ>

統一テストの大問1は工学的総合問題です。みなさんは、大学に入ってからすぐに学科の専門科目を学びたいのだと思いますが、専門科目を学ぶためには高校までに学ぶ内容に加えて、さらに高度な数学・物理学・化学が必要です。大問1の工学的総合問題は、大学で学ぶ理数系基礎科目の内容が工学の中でどのように使われるのかを、簡単な例を用いて段階的に示しています。式が具体的に何を表わしているかを、是非意識するようにしましょう。

*統一テストの内容に関する意見を工学教育院の問合せメールアドレスにお寄せください。

工学教育院 HP <http://www.iee.eng.tohoku.ac.jp/>

問合せメールアドレス eng-edu@grp.tohoku.ac.jp