『工科系の物理学基礎』第10章〜第12章の補充問題

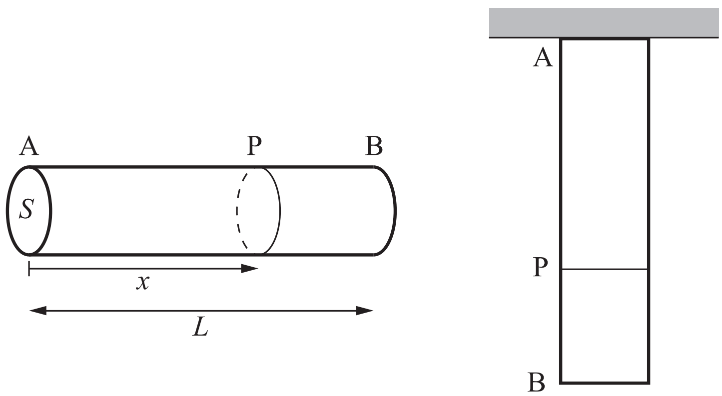
2023年10月27日版

第10章の補充問題

10.2 応力

問題 10.2-S1

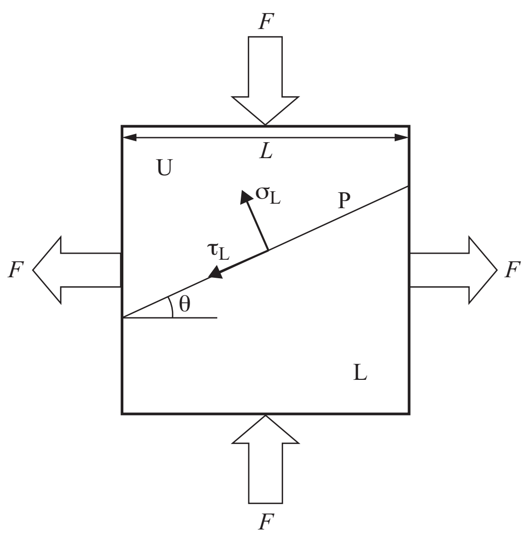
断面積 S，長さ L，質量 M の一様な金属棒がある．棒の両端のそれぞれの面を A，B とよぶ．面 A から距離 x の点を通り棒の中心軸に垂直な面を P とする（下図左参照）．この棒の面 A を天井に固定し，B を下にして鉛直に吊す（下図右参照）．このとき，面 P に作用する応力を求めよ．ただし，重力加速度を g として，応力を S，L，M，x，g を用いて表せ．



〔註〕 天井から吊された棒は，棒自身の重さ（自重）のため，わずかに伸びる（この現象は例題 10.6-2 で扱う）．問題文中の L と x は棒に外力が作用していないときの長さと距離を表す．本問の解答は，棒の伸びには依存しない．

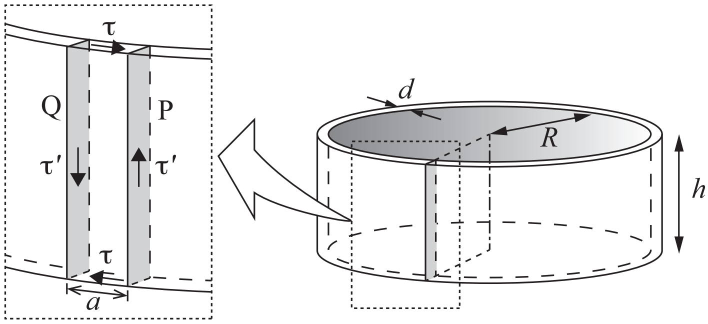
問題 10.2-S2

一辺の長さが L の一様な立方体がある．この立方体の上下の各面に一様な圧縮力 F が，左右の各面に一様な引張り力が作用している．下面と θ（$0 \leq \theta \leq \pi/2$）の角をなす平面 P により，立方体を上部 U と下部 L に分ける（右図参照）．面 P において L から U に作用する法線応力 σ_{L} とせん断応力 τ_{L} を，$\sigma = F/L^2$ と θ を用いて表せ．ただし，法線応力が上向きのとき $\sigma_{\mathrm{L}} > 0$，せん断応力が左向きのとき $\tau_{\mathrm{L}} > 0$ とする．また，立方体内の応力は場所によらないものとする．



問題 10.2-S3

内半径 R，厚さ d，高さ h の一様な中空円筒がある（下図参照）．厚さは半径に比べて十分に小さい．この円筒の上面に，上から見て反時計回りの一様なせん断応力 τ を作用させ，底面には逆向きで同じ大きさのせん断応力を作用させる．この円筒の中心軸を含む平面と円筒が交わる一つの面 P およびそれと同様の面 Q を考える（下図拡大図参照．円筒の外側から見て，Q は P の左側にある）．二つの面 P と Q のなす角が十分小さいと仮定すると，これらの面は互いに平行であり，これらの面にはさまれる領域は直方体であると近似できる．面 P と Q との微小距離を a として，この直方体の外側の領域から，面 P を介して直方体に作用する接線応力 τ' を求めよ．この応力が上向きのとき $\tau' > 0$ とする．また，この面上では法線応力はゼロであると仮定してよい．



〔註〕　教科書 10.6 節で棒のねじり変形について学ぶ．ねじれた棒の一部には，本問で考察するせん断応力が作用する．

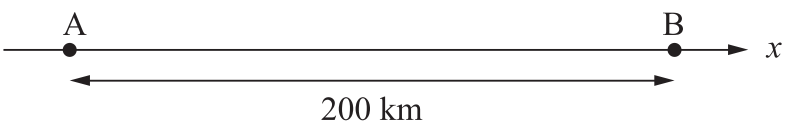
10.3 ひずみ

問題 10.3-S1

東北地方の日本海沿岸の地点 A と，その真東 200 km の位置にある太平洋沿岸の地点 B を考える．この 2 点を結ぶ東向きの直線を x 軸として，以下の問に答えよ．

(a) 点 A が x 軸負の向きに 1 cm，点 B が x 軸負の向きに 3 cm 動いたとき，AB 間のひずみが一様だと仮定して，そのひずみを求めよ．

(b) 点 A が x 軸正の向きに 1 m，点 B が x 軸正の向きに 5 m 動いたとき，AB 間のひずみが一様だと仮定して，そのひずみを求めよ．

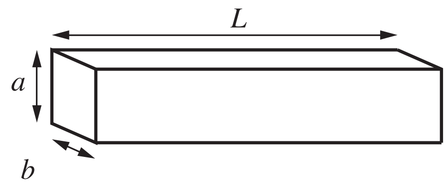


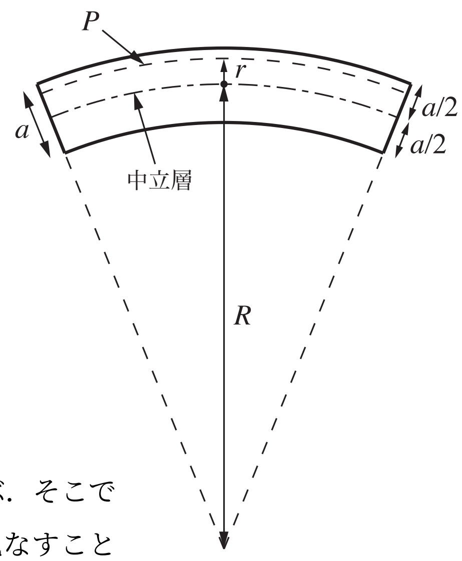
〔註〕ここに示したのは，東北地方の日本海沿岸の地点（点 A）と太平洋沿岸の地点（点 B）において観測された地面のおおまかな動き（変位）である．実際には，地表のひずみは場所によって異なる．ひずみが一様であるという仮定は演習問題のためであり，現実的ではないことを注意しておこう．(a) は 2011 年東北地方太平洋沖地震前の 1 年間の変位，(b) は同地震発生時の変位に相当する．

中島淳一・三浦哲『弾性体力学』（共立出版，2014）所収の問題を一部改変.

問題 10.3-S2

断面の形状が縦 a，横 b の長方形で，長さが L の一様な棒がある（左下図）．この棒にある力を加えたところ，右下図に示すように，円弧状に曲がり，棒の中心軸を通る半径 R の円筒面では，棒の長さ方向に伸びも縮みもしなかった．ただし，$a \ll R$ である．この棒内の円筒面を中立層とよぶ．中立層の外側では棒は伸び，内側の部分は縮む．中立層から外側に向かう座標 r を定義する（図参照）．中立層の曲率半径を R として，座標 r（$-a/2 < r < a/2$）の円筒面 P（中立層と P の距離は $|r|$）の伸びひずみ ε を求めよ（r と ε の符号は同じになる）．

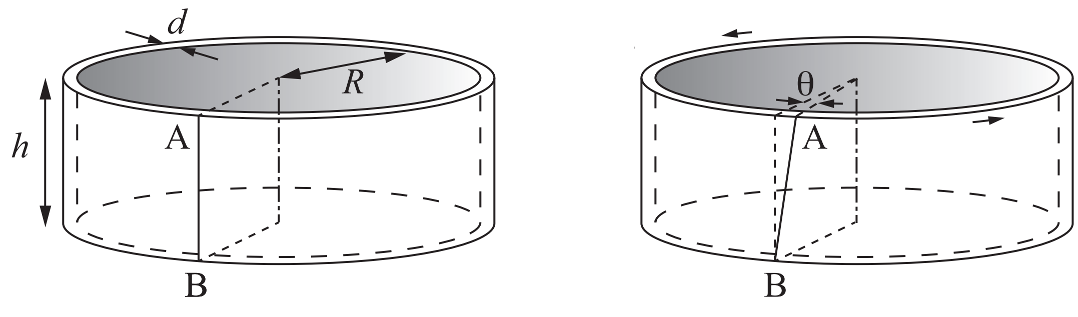




〔註〕　教科書 10.5 節で棒の曲げ変形について学ぶ．そこであつかう棒は，局所的には円弧状に変形していると見なすことができる（位置によって曲率半径は異なる）．

問題 10.3-S3

内半径 R，厚さ d，高さ h の一様な中空円筒がある（下図参照）．厚さは半径に比べて十分に小さい．この円筒の上面を，中心軸のまわりに上から見て反時計回りに，下面に対して微小な角度 θ だけ回転する．このときの円筒のせん断ひずみ γ を求めよ．



〔註〕　教科書 10.6 節で棒のねじり変形について学ぶ．ねじれた棒の一部には，本問で考察するせん断歪みが生じる．

10.6 弾性体の伸び変形

問題 10.6-S1

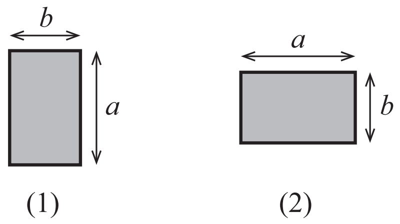
密度 $8.9 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，ヤング率 117 GPa の銅を使った，直径 1.2 mm，長さ 100 m の銅線がある．東京タワーの展望台（メインデッキ）からこの銅線を吊り下げる．重力加速度を $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ として，自重によるこの銅線の伸びを求めよ．教科書の例題 10.6-2 の結果を使ってよい．

〔註〕　数値を代入するだけの問題だが，自重による材料の伸びがどの程度の大きさかを確認しておきたい．また，この材料は引張応力が 195 MPa を超えると破断する．この 100 m の銅線は自重で破断することがないことも確認しておこう．

10.7 弾性体の曲げ変形

問題 10.7-S1

長さ l で長方形の断面をもつ一様な棒（梁）の一端を，教科書の図 10.16 に示すように，水平に固定し，他端に質量 M のおもりを吊り下げる．断面の長方形の隣り合う二辺の長さは a，b であり，$a > b$ とする．このとき，下図 (1) のように，短いほうの辺を下にして棒を固定した場合と，(2) のように長いほうの辺を下にして固定した場合について考える．図 (1) の場合に，おもりを吊り下げた端部がたわみによって下がった長さを d_1，(2) の場合の同様の長さを d_2 とする．教科書の式 (10.27) を参考にして，d_1/d_2 を求めよ．



〔註〕　直感的（経験的？）には，(1) の場合のほうが，棒は曲がりにくい（たわみが小さい）ことは想像できるだろう．その理由が，式 (10.27) によって説明できることを確認するのがこの問題のねらい．

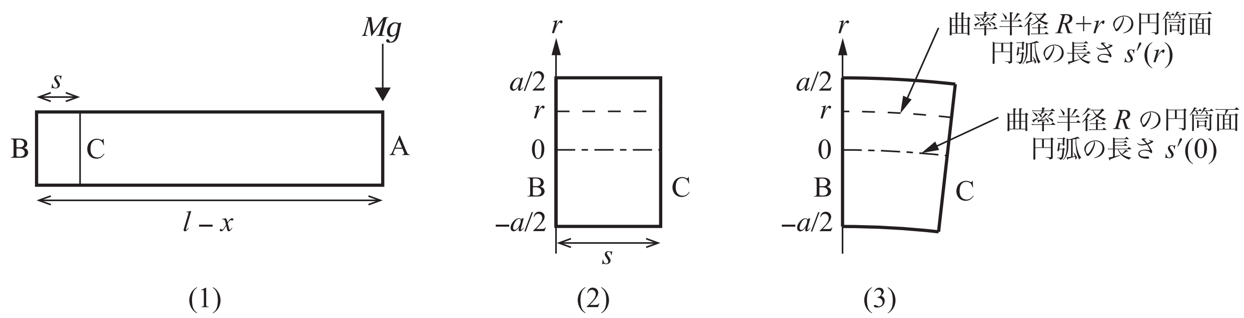
問題 10.7-S2（発展）

断面が長方形の梁の一端を水平に固定して，他端におもりを吊り下げるとき，上下方向（板厚方向）の中点を通る面が中立層（伸び縮みのない面）になることが，教科書の 200 ページに記載されている．その理由は，教科書の図 10.17 の梁片 BA に作用する力の水平方向のつり合いを考えることによって説明できる．このことを確かめよう．

下図 (1) は，たわむ前の梁片 BA を示す．左端の面 B からわずかな距離 s の位置にある（B に平行な）断面を C とする．図 (2) は面 B と面 C にはさまれた（たわむ前の）梁の領域を表す．面 B の中心を原点として，鉛直上向きに r 軸をとる．この図において，$r=0$ の平面を一点鎖線，r の値が一定の任意の平面を破線で示している．図 (3) は荷重によってたわんだ状態での，面 B と面 C にはさまれた領域の形状を表す．この状態では，教科書の図 10.18 と同じように，図 (2) で r が一定の平面は，円筒面になっているとする．$r=0$ に対応する円筒面の曲率半径を R とし，座標 r に対応する円筒面の円弧の長さを $s'(r)$ と表すと，

$$\frac{s'(r)}{s'(0)} = \frac{R+r}{R} \tag{$*$}$$

という関係が成り立つ——教科書の式 (10.18) 参照．ただし，棒のたわみは十分に小さく，$|r| \ll R$ が成り立つものとする．



(a) 図 (3) において，座標 r に対応する面の伸びひずみを $\varepsilon(r)$ とすると，($\varepsilon(r) \ll 1$ を仮定して）次の関係が成り立つことを示せ．

$$\varepsilon(r) - \varepsilon(0) = \frac{r}{R}$$

式 $(*)$ 左辺の分子と分母を ε を使って表し，式 $(*)$ の右辺と比べるとよい．

(b) 梁片 BA に作用する外力は，A 端に作用するおもりによる荷重だけであり，この力の水平成分は 0 である．したがって，面 B の左側にある梁の部分から，面 B を介して梁片 BA に作用する応力の水平成分の和は 0 でなければならない．この条件から $\varepsilon(0) = 0$ を導け．

この結果は，$r = 0$ に対応する面では伸び縮みがないこと，すなわち，この面が中立層であることを示す．

10.8 弾性体のねじり変形

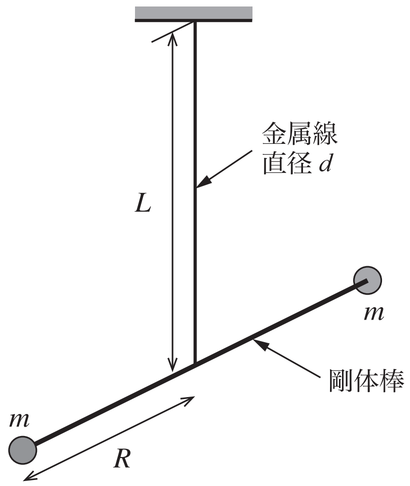
問題 10.8-S1（発展）

キャヴェンディッシュが 2 つの鉛の球の間に作用する万有引力の大きさを測定するために用いた装置では，細い金属線のねじり変形による弾性を利用した．この装置により，微弱な力を測定できることを確認しよう．

長さ $2R$ の軽い剛体棒のそれぞれの端に質量 m の小球を取り付ける．下図のように，この棒を，長さ L，直径 d，剛性率 G の金属線で天井から吊り下げる．このとき，棒が水平になるように，金属線の下端を棒の中点（棒を二等分する点）に接合する．以下の問に答えよ．ただし，具体的な数値を計算する必要があるときには，次の値を用いよ．

$$L = 1.00\,\mathrm{m}, \quad d = 0.37\,\mathrm{mm}, \quad G = 4.3 \times 10^{10}\,\mathrm{Pa}, \quad R = 1.00\,\mathrm{m}, \quad m = 0.73\,\mathrm{kg}$$

ここに示した L，R，m の値は，キャヴェンディッシュの装置で用いられたものに近い．また，G の値は，リン青銅（リンをわずかに含むスズと銅の合金）のものである．



(a) 教科書の式 (10.36) によると，この剛体棒を水平面内で角度 θ だけ回転させるために，棒に加えるべきトルクの大きさ N は次式で与えられる．

$$N = k\theta, \qquad k = \frac{\pi d^4 G}{32L}$$

この式の比例定数 k の値を求めよ．

(b) それぞれの小球に大きさが F で逆向きの外力を，水平面内で棒に垂直な向きに加えたときに，棒が微小な角度 θ だけ回転したところで力がつり合って静止したとしよう．F と θ の関係を表す式を，F，θ，R，k を用いて表せ．

(c) 小問 (b) の回転角が $\theta = 1.00^\circ = 1.745 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad}$ となるために必要な F の値を求めよ．また，この F の値は，質量 m の小球に作用する重力の大きさの何倍だろうか．ただし，重力加速度の大きさを $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする．

(d) 外力を加えない状況で，剛体棒を，力のつり合った位置から，水平面内で小さな角度だけ回転させ，静かに手を放すと，棒はつり合いの位置を中心にして水平面内で単振動をする．この振動の周期 T を，k，R，m を用いて表せ．ただし，棒の質量と小球の大きさは無視できるほど小さいと仮定する．（金属線の剛性率を知らなくても，振動の周期を測定することで，比例定数 k の値を知ることができる．）

問題 10.8-S2（発展）

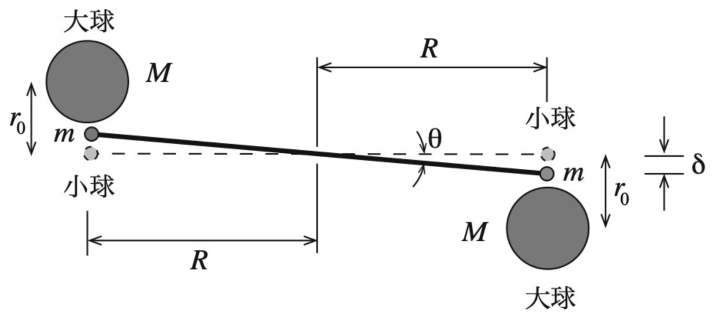
質量 m と質量 M の 2 つの球が，中心間距離 r だけ離れておかれているとき，これらの球は，大きさ

$$F = G_{\mathrm{m}} \frac{mM}{r^2}$$

の万有引力で互いに引き合う（ここでは，万有引力定数を，問題 10.8-S1 の剛性率 G と混同しないように，G_{m} という記号で表すことにする）．キャヴェンディッシュは，問題 10.8-S1 の装置のそれぞれの小球の近くに質量 M の大球をおいて，剛体棒の回転角を計測することで，小球・大球間にはたらく万有引力の大きさを測定した．この測定結果から万有引力定数 G_{m} の値を知ることができる．

キャヴェンディッシュの装置を真上から見たのが下図である．大球と小球の中心が同じ水平面内にあり，それぞれの大球の中心は，剛体棒が（大球のない状況で）つり合いにあるときの小球の中心から，棒に垂直で距離 r_0 の位置に固定されている．大球からの万有引力により小球は大球に引きつけられて，しばらく振動を繰り返した後で，新しいつり合いの位置で静止する．このときの，棒の回転角の大きさを θ とする．なお，キャヴェンディッシュが使った装置のパラメータは次の通りである．

$$m = 0.730\,\mathrm{kg}, \quad M = 158.0\,\mathrm{kg}, \quad R = 0.931\,\mathrm{m}, \quad r_0 = 0.228\,\mathrm{m}$$



(a) キャヴェンディッシュは，大球がないときの剛体棒の振動の周期 T（問題 10.8-S2(d) 参照）と，大球と小球の間の万有引力による剛体棒の回転角 θ を測定した．万有引力定数 G_{m} を，T，M，R，r_0，θ を用いて表せ．

(b) キャヴェンディッシュが測定して得た T と θ の値の一例，$T = 838\,\mathrm{s}$，$\theta = 3.99 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$ を使って，万有引力定数 G_{m} の値を求めよ．

(c) キャヴェンディッシュの時代には，地球の半径が $R_{\mathrm{E}} = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$ であることが知られていた．重力加速度の大きさを $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$（キャヴェンディッシュが実験を行った地点での重力加速度）として，小問 (b) で求めた G_{m} の値を使って，地球の質量 M_{E} を求めよ．

10.9 弾性エネルギー

問題 10.9-S1

半径 $5.0\,\mathrm{cm}$ のステンレスの球を，水深 $5.0 \times 10^3\,\mathrm{m}$ の海底に沈めたとき（教科書の問題 10.6-3 参照），この球に蓄えられる弾性エネルギーを次の手順で求めよ．ただし，ステンレスの体積弾性率は $K = 1.66 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$ である．

(a) 海上での球の半径を R_0，海底での半径を R_1 とする．海上での球の体積を V_0，半径が $r = R_0 - x$（$0 \leq x \leq R_0 - R_1$）のときの球の体積を $V_0 + \Delta V$ として，$\dfrac{\Delta V}{V_0}$ を，R_0 と x を用いて表せ．ただし，$x \ll R_0$ を仮定して，x について 2 次以上の微小量を無視してよい．

(b) 海上での大気圧を p_0，水の密度を ρ，重力加速度を g とすると，水深 h における圧力は $p = p_0 + \rho g h$ である．$\rho = 1.02 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ として，半径の縮み $R_0 - R_1$ を求めよ．ただし，真空中での球の半径と大気圧中での半径の差は無視してよい．

(c) ステンレス球を海上から海底まで沈める（x が 0 から $R_0 - R_1$ まで増加する）あいだに，球に作用する圧力がする仕事 W を求めよ．この仕事が球の弾性エネルギーとして蓄えられる．

第 11 章の補充問題

11.3 進行する波

問題 11.3-S1

静止座標系 (x,t) において，x 軸方向に進む正弦波（調和波）の波動関数が

$$u = a\sin(kx - \omega t)$$

で与えられるとする．ここで a，k，ω は正の定数である．この座標系に対して，x 軸方向に一定の速度 v で移動する座標系 (x',t) を考える．この波動関数を

$$u = a\sin(k'x' - \omega' t)$$

と書き換えるとして，k' と ω' を求めよ．この k' と ω' は速度 v で運動する観測者から見た波の波数と角振動数を表す．

〔註〕　高校で学んだドップラー効果のうち，波源が静止して観測者が運動する場合の現象は，この問題のように波動関数を使って解析することもできる．

11.4 波の力学

問題 11.4-S1

NASA の火星探査機 Perseverance が火星表面上で測定した音速の値が 2022 年 3 月に公表された（https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2022/pdf/1357.pdf）．その値は 240 m/s である．

火星の大気はほとんどが二酸化炭素（分子量は 44.01）で構成されている．火星の大気は二酸化炭素の理想気体であると仮定し，教科書の式 (11.66) を利用して，Perseverance が音速を測定したときの火星表面付近の大気の温度を推定せよ．ただし，二酸化炭素の比熱比として $\gamma = 9/7$ を用いよ．また，気体定数は $R = 8.31\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ である．

問題 11.4-S2

ニュートンは『プリンキピア』の中で，気体中の音速として教科書の式 (11.42) に相当する結果を導いた．25°C の空気中の音速を式 (11.42) および式 (11.66) を使って計算し，その結果を比較せよ．空気は分子量 29.0，比熱比 $\gamma = 7/5$ の理想気体とみなしてよい．

〔註〕　ニュートンが理論的に計算した音速は $979\,\mathrm{ft/s} = 298\,\mathrm{m/s}$ であり，その当時の実験で得られていた音速は $1124\,\mathrm{ft/s} = 348\,\mathrm{m/s}$ であった．彼はこの食い違いの原因を正しく説明できなかっ

た．後にその原因を明らかにしたのはラプラス（Pierre-Simon Laplace．ラプラス変換，ラプラス演算子のラプラス）である（『ファインマン物理学 II』および I. Newton, *The Principia: Mathematical Principles of Natural History* (University of California Press, 1999) translated by I. B. Cohen and A. Whitman による）．

11.5 弾性体中を伝わる波：弾性波，縦波

問題 11.5-S1

密度 $\rho = 7.9 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，ヤング率 $E = 206\,\mathrm{GPa}$ の鉄の棒を伝わる縦波弾性波の速さ（音速）を求めよ．

〔註〕　公式に数値を代入するだけの問題だが，身近な物質中を伝わる音速のおおよその値を把握しておくとよい．

11.6 弦の横振動：横波

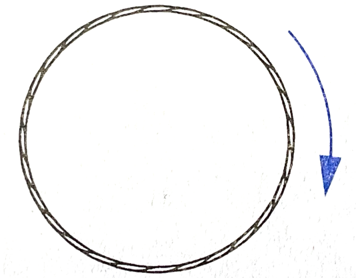
問題 11.6-S1

密度 $\rho = 1.17 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，直径 $1.00\,\mathrm{mm}$ のナイロン製の弦（ギターの第 3 弦）を $59\,\mathrm{N}$ の張力で張ったとき，この弦を伝わる横波の速さを求めよ．

（ここで用いた数値の出典は，http://blog.media.teu.ac.jp/2015/10/post-cd32.html）

問題 11.6-S2

ひもの両端を繋げて，下図のような丸い輪を作り，無重量状態の宇宙船の中で，図のように時計回りに回転させる（回転軸は，輪の中心を通り輪に垂直な直線）．回転によるひもの接線方向の速さは v_0 である．この輪が静止して見える回転座標系で考えると，ひもの各部分に遠心力が作用し，それとつり合うように張力が作用する．この輪を伝わる横波の（回転座標系から見た）速さを求めよ．



〔註〕　波の速さは輪の半径や，ひもの線密度には依存しないことがわかるであろう．

この問題は R. Resnick, D. Halliday, and K. S. Krane, *Physics (Fourth Edition) Volume 1* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992) による．

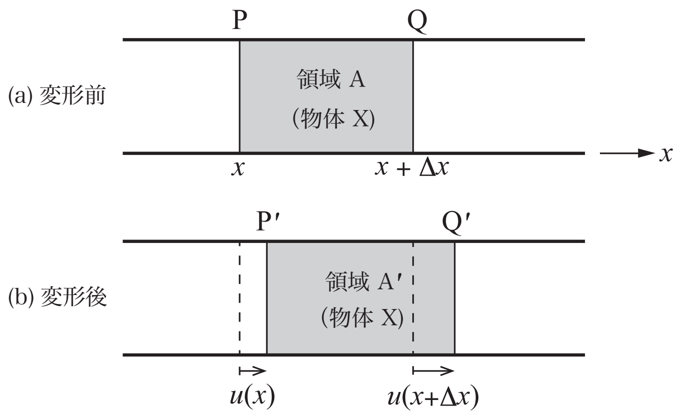
11.7 波のエネルギー

問題 11.7-S1（発展）

断面積 S，密度 ρ_0，ヤング率 E の一様な弾性体の棒を伝わる縦波のエネルギー（運動エネルギーと弾性によるポテンシャルエネルギーの和）は次式のように表される．この式を導こう．

$$W = S\int\left[\frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{1}$$

教科書の 11.5 節と同様に，棒に沿って x 軸をとり，棒が平衡状態（波が存在しない状態）において，座標が x の断面 P と座標が $x+\Delta x$ の断面 Q にはさまれる微小領域 A を考える（下図 (a)）．この状態で領域 A を占める物質を物体 X とよぶことにする．棒を縦波が伝わるとき，物体 X は，ある時刻 t において下図 (b) の断面 P$'$ と断面 Q$'$ にはさまれた領域 A$'$ に移動しているとする．このときの P$'$ の座標を $x+u(x,t)$，Q$'$ の座標を $x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$ とする．物体 X の運動エネルギーと弾性によるポテンシャルエネルギーを以下の手順で計算して式 (1) を導く．



(a) 物体 X の運動エネルギー ΔK を $\partial u/\partial t$ と Δx を用いて表せ．

(b) 教科書 11.5 節を参考にして，時刻 t における物体 X の伸びひずみ $\varepsilon(x,t)$ を $\partial u/\partial x$ を用いて表せ．

(c) 教科書の式 (10.38) を参考にして，時刻 t において，物体 X に蓄えられている弾性によるポテンシャルエネルギー ΔU を，$\partial u/\partial x$ と Δx を用いて表せ．

(d) 小問 (a) と (c) の結果から式 (1) を導け．

問題 11.7-S2（発展）

断面形状が場所によらずに一定で，密度 ρ_0，ヤング率 E の一様な弾性体の棒を伝わる縦波の正弦波

$$u = a\sin(kx - \omega t) \qquad （a,\ k,\ \omega \text{ は正の定数}）$$

によって運ばれるエネルギーについて考える．ただし，x は棒に沿って定義した座標．

(a) 問題 11.7-S1 の式 (1) を利用して，時刻 t において，座標 x の近傍の物質がもつ単位体積当たりのエネルギー $w(x,t)$ を求めよ．

(b) 波の進行方向に垂直な断面の単位面積を，単位時間に通過するエネルギーの時間平均 I （波の強さ）が次式で与えられることを示せ．

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 c_l \omega^2 a^2 \tag{2}$$

ここで，$c_l = \sqrt{E/\rho_0}$ は教科書 11.5 節で導いた縦波弾性波の速度である．

〔註〕　ここで導いた波の強さ I の式は，教科書の式 (11.93) の最初の表式 $I = \frac{1}{2}\rho_w c_s \omega^2 a^2$ と同じ形をしていることに注目しよう．ただし，弦を伝わる波の強度を表す式 (11.93) の ρ_w は弦の線密度であるのに対して，式 (2) の ρ_0 は媒質の密度である．したがって，式 (11.93) における I の SI 単位が W（ワット）であるのに対して，式 (2) における I の単位は $\mathrm{W/m^2}$ である．

11.8 波動のさまざまな現象

問題 11.8-S1（教科書 p. 232 における波動方程式の《導出》についての補足的考察）

教科書の式 (11.94)，すなわち

$$u(x,t) = f(x - vt) \qquad （v \text{ は正の定数}）$$

で表される進行波（速度 v）について，$\dfrac{\partial u}{\partial t} = -vf'(x - vt)$ と $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(x - vt)$ が成り立つ．これらの式を組み合わせると，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3}$$

を得る．教科書では，これと類似の考察により，波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に到達した．したがって，微分方程式 (3) も波動方程式といえそうだが，この式は波動方程式としてふさわしくない．式 (3) は，どういう点で波動方程式としてふさわしくないのだろうか．

〔註〕　教科書の例題 11.8-1 の次の段落の内容について，少し考えてもらうことがこの問題の目的．

11.10 空間に広がった波

問題 11.10-S1（発展）

教科書の 11.10.2 項（p. 244）では，2 つのスリットによる波の干渉を扱った．このとき，スリット幅が限りなく小さいことを暗に仮定していた．一方，11.10.3 項では，有限の幅をもつ，ひとつのスリットによる波の回折を学んだ．有限幅のスリットが 2 つ並んでいる場合の波の干渉はどうなるのだろうか．

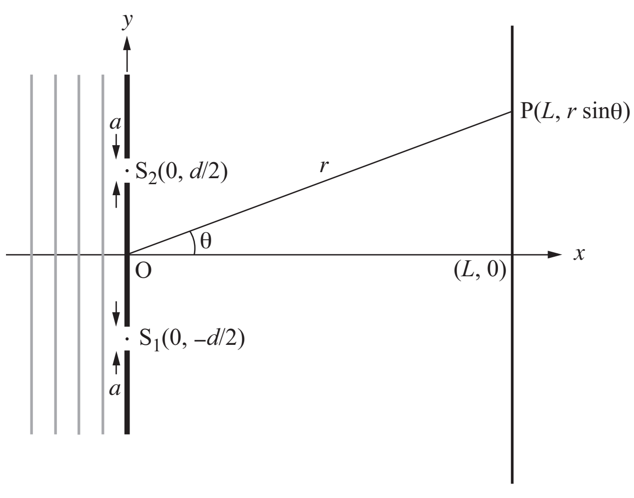
下図のように，$x = 0$ の位置にある衝立（薄い障壁）に向かって，左側（$x < 0$ の領域）から平面波が伝播している．衝立には，$y = -d/2$ および $y = d/2$ の位置に，幅が a のスリット S_1，S_2 が開いている．ただし，$d > a$ である．$x = L$ の位置にあるスクリーン上の点 P $(L, r\sin\theta)$ における波動関数 u を求めよう．

$L \gg d + a$ を仮定すると，スリット内で y 軸に沿った微小区間 $[y, y + dy]$ にある点を波源とする波による，点 P における波動関数への寄与 du は，教科書の式 (11.144)

$$du = A\sin\{k(r - y\sin\theta) - \omega t - \varphi\}\, dy \tag{4}$$

のように近似できる（A は定数，k は波の波数，ω は角振動数）．点 P における波動関数 u は，スリット S_1 と S_2 のそれぞれを通過した波による波動関数 u_1，u_2 の重ね合わせ（$u_1 + u_2$）として表される．教科書の式 (11.145) と同様の積分を実行することにより u_1 と u_2 を求め，点 P $(L, r\sin\theta)$ における波動関数が次式のように表されることを示せ．

$$u = 2Aa\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\theta\right)\sin(kr - \omega t - \varphi), \qquad \alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta \tag{5}$$



〔註 1〕　この補充問題を解く前に，教科書の問題 11.10-3 と問題 11.10-4 を解いておくとよい．

〔補足 1〕　スリット幅 a が限りなく小さい場合（$ka \ll 1$），$\sin\alpha/\alpha \approx 1$ と近似できる．したがって，この場合，式 (5) で Aa を A で置き換えると，この式は教科書の式 (11.140) に一致する．このことから，教科書の式 (11.140) における波の振幅 A はスリット幅に比例することがわかる．

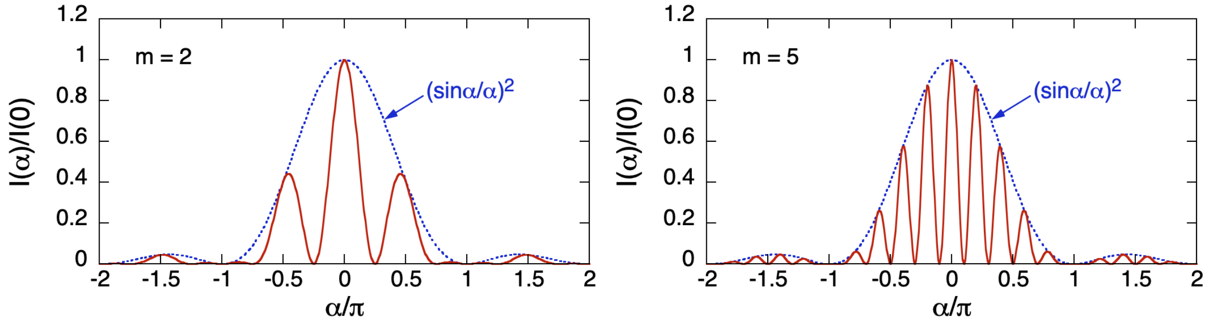
〔補足 2〕　スクリーン上の単位面積に到達する波のエネルギーの時間平均（波の強さ）I は（θ が小さい場合）u^2 の時間平均

$$\overline{u^2} = \frac{1}{2}(2Aa)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\left(\frac{d}{a}\alpha\right)$$

に比例する．したがって，θ が小さい場合には，

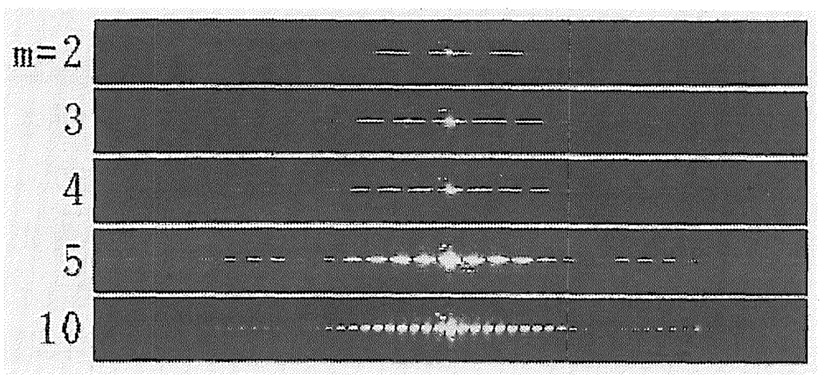
$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2(m\alpha)\,, \qquad m = \frac{d}{a}, \quad \alpha \approx \frac{ka}{2}\theta \approx \frac{ka}{2L}y$$

である．ただし，m はスリットの間隔 d とスリット幅 a の比，y はスクリーン上の点 P の y 座標である．この式で与えられる $I(\theta)$ を α/π の関数として描くと下図の実線のようになる（$m=2$ と $m=5$ の場合を示す）．この図中の破線は $(\sin\alpha/\alpha)^2$ を表し，それは，干渉縞に対応する関数 $\cos^2(m\alpha)$ の振幅（強度）が場所によって変化する様子を決めている．そして，干渉縞は主に $-\pi<\alpha<\pi$ の範囲に $2m-1$ 本ほど現れる（$m=d/a$ が大きいほど多くの干渉縞を観測できる）ことがわかる．



干渉縞が現れる範囲（$|\alpha|<\pi$）を角度 θ で表すと $|\theta|<\lambda/a$ となる（$\lambda=2\pi/k$ は波の波長）．したがって，複スリットによる干渉を可視光（波長がおよそ 0.4〜0.8 μm の範囲）を使って観測しようとした場合，スリット幅を数十 μm 以下にしないと，この θ の範囲は目に見えないほど狭くなってしまい，干渉縞を観測するのは難しい．

スリット幅 $a=33.4\,\mu$m，スリット中心間の距離とスリット幅の比 $m=d/a$ が 2, 3, 4, 5, 10 の場合について，波長 $\lambda=623.8\,$nm（He-Ne レーザー光）の光を使った実験による干渉縞の写真を下図に示す（高橋成和，島根大学教育学部紀要（自然科学）第 22 巻–第 1 号，13 (1988) より）．この例では，干渉縞が主に観測される範囲 $|\theta|<\lambda/a$ は $|\theta|<0.0187\,\mathrm{rad}=1.07^\circ$ となる．スリットからスクリーンまでの距離が $L=1.00\,$m ならば，スクリーン上では主に $|y|<18.7\,$mm の範囲に干渉縞が観測される（干渉縞の間隔は $(18.7/m)\,$mm）．



第 12 章の補充問題

12.2 流体中の力

問題 12.2-S1（発展）

教科書では，静止流体中にある角柱状の物体に対して，アルキメデスの原理を導いた．ここでは，任意の形状の物体に対して，アルキメデスの原理を導く．

ある物体が密度 ρ_0 の流体の液面下にあるとして，流体からこの物体に作用する力 $\boldsymbol{F}$（浮力）を求めることを考える．この物体の表面上のある点における外向き法線ベクトルを （単位ベクトル）を $\boldsymbol{n}$，この点における流体の圧力を p とすると，この点近傍の微小面積 dS の表面領域において流体から物体に作用する力は $-p\boldsymbol{n}\,dS$ である．したがって，物体に作用する浮力 $\boldsymbol{F}$ は，物体表面 S 上での面積分

$$\boldsymbol{F} = -\int_S p\boldsymbol{n}\,dS \tag{1}$$

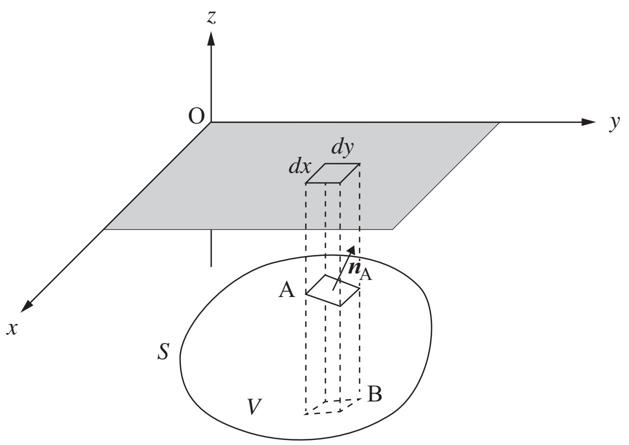
として表すことができる．なお，鉛直上向きに z 軸をとり，流体表面を座標原点にすると，圧力 p は

$$p = p_0 - \rho_0 g z \qquad \text{（p_0 は流体表面における圧力，g は重力加速度）}$$

で与えられる．アルキメデスの原理によると，この物体の体積を V として，浮力 $\boldsymbol{F}$ の各成分が

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = \rho_0 V g \tag{2}$$

と表される．以下では，式 (1) から式 (2) を導く．



(a) 外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が z 軸となす角を θ とすると，$n_z = \cos\theta$ なので，式 (1) の z 成分は

$$F_z = -\int_S p\cos\theta\,dS \tag{3}$$

と書ける．この積分を実行するために，図のように，微小な底面積をもつ鉛直な四角柱で物体表面 S を切り取る．切り取られた二つの面のうち，上面を A，下面を B とし，A と B それぞれの面積を dS_A，dS_B とする．また，四角柱底面の二辺は x 軸に平行でその長さは dx，残りの二辺は y 軸に平行でその長さは dy である．面 A の外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n}_\mathrm{A}$ が z 軸となす角を θ_A とすると，$dS_\mathrm{A}\cos\theta_\mathrm{A} = dx\,dy$ という関係が成り立つ．

面 A と面 B のそれぞれにおける圧力を p_A，p_B とすると，これらの面からの積分 (3) への寄与 dF_z が次のようになることを示せ．

$$dF_z = (p_\mathrm{B} - p_\mathrm{A})\,dx\,dy$$

(b) 小問 (a) の結果を利用して，積分 (3) を実行し，$F_z = \rho_0 V g$ を導け．

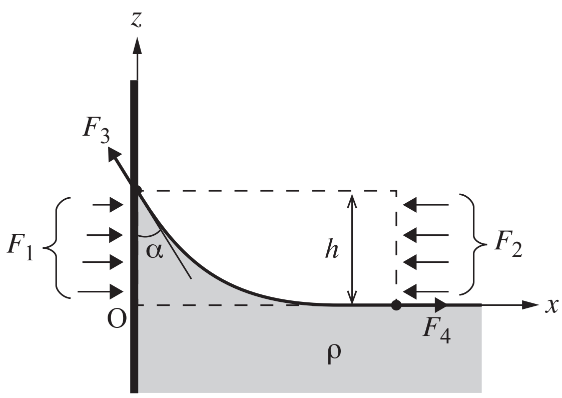
(c) $F_x = 0$ と $F_y = 0$ を示せ．

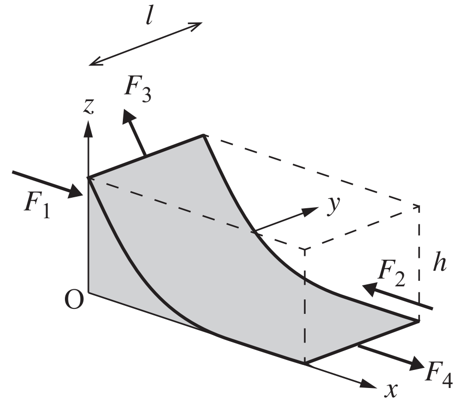
12.3 表面張力

問題 12.3-S1（表面張力による液面の上昇）

教科書の 11.3.5 項には，液体が固体表面を濡らす場合，鉛直な固体表面を液体が上昇することが述べられている．液体と固体の接触角を α（$\cos\alpha > 0$），液体と空気との界面張力（表面張力）を γ，液体の密度を ρ として，液体が壁を上昇する距離 h を求めよう．

下図のように，鉛直上向きに z 軸をとる．壁から離れた領域での液面と同じ水平面上で，壁から遠ざかる向きに x 軸をとる．壁面と x 軸の交点を座標原点 O とする．x 軸，y 軸，z 軸が右手直交系となるように y 軸をとる．この図の破線は，底面が xy 平面上にあり，高さが h の直方体を表す．直方体の奥行きは l であり，左側面は壁面上にあり，右側面は壁から遠くて液面が水平になっている領域にある．





上図の直方体の内部にある液体と空気で構成される系に作用する外力のうち x 成分をもつものは，左側面に作用する壁面からの圧力の合力（大きさを F_1 とする），右側面に作用する大気圧の合力（大きさ F_2），左上の辺に作用する表面張力の合力（大きさ F_3），右下の辺に作用する表面張力の合力（大きさ F_4）である．大気圧を p_0， 重力加速度を g とすると，液体内の圧力は $p = p_0 - \rho g z$ と表される．

(a) この系に作用する力の x 成分のつり合いを考えることにより，壁を上昇する液面の高さ h が次式のようになることを示せ．

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}(1 - \sin\alpha)}$$

この解法は，P. Gnädig, G. Honyek, and K. F. Riley, *200 Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions* (Cambridge University Press, 2001) による．

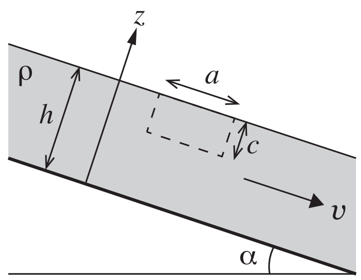
(b) 『理化学辞典』（岩波書店）によると，水とガラスの接触角は 8° から 9° の範囲にある．また，20°C における水と空気の界面張力は $\gamma = 7.3 \times 10^{-2}\,\mathrm{N/m}$ である．$\alpha = 8.0°$，$\rho = 1.00 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ を仮定して，ガラス面を上昇する水の高さ h を求めよ．

12.5 粘性

問題 12.5-S1

下図に示すように，傾き角 α の斜面の上を密度 ρ，粘性係数 μ の液体が，厚さ h で流れている．液体の速度は斜面に平行であり，流れは定常的であると仮定すると，その速さ v は斜面から垂直に測った距離 z にのみ依存する．重力加速度を g として，v の z 依存性を求めよ．

〔ヒント〕定常流において液体の加速度はゼロであるあるから，任意の領域にある液体に作用する力はつり合っている．図の破線で示した直方体の内部の液体に作用する力のつり合いを考えるとよい．ただし，この直方体の上面は液体表面に接しており，斜面に沿った辺の長さは a，奥行き（水平な辺の長さ）は b，斜面に垂直な辺の長さは c である．



問題 12.5-S2（発展）

下図に示すように，内半径 a のパイプ I の内側に，半径 b（$b < a$）の円柱 II を（I と II が）同軸になるように設置し，I と II の間の領域を粘性係数 μ の液体で満たす（パイプも円柱も限りなく長いものとする）．パイプを動かないように固定して，円柱 II を対称軸に沿って一定の速さ V で動かす．重力の影響を無視すると，液体の運動が定常的になったときの流れの速さ v は，軸からの距離 r を用いて次のように表されることを示せ．

$$v = \frac{V}{\ln(a/b)} \ln\left(\frac{a}{r}\right)$$

〔ヒント〕内半径が r，外半径が $r + dr$ で長さが l の薄い円筒の内部にある流体に作用する力のつり合いを考えるとよい．ただし，この円筒とパイプの軸は一致するものとする．