10.7 弾性体の曲げ変形　p.200-p.202 補足の前までの差し替え版

これまで弾性体の変形の基本は，10.3 節で示した，伸びひずみ，せん断ひずみ，体積ひずみにあることを学んできた．本節で取り扱う「曲げ変形」（たわみとも言う）も伸び縮みの組み合わせで記述できるものである．ヤング率 E の材料からなる長さ l，厚さ a，幅 b のはり（梁）の一端を，図 10.16 のように，水平になるように壁（点 O）に固定した．座標軸を図のようにとり，他端（点 A）に質量 M のおもりを付けたとき，このはりに生じるたわみ y（曲げによる変位）を求めてみよう．ここでは，はりの質量，および，はりの軸に垂直な方向（厚さ方向と幅方向）の伸び縮みは無視できるものとする．

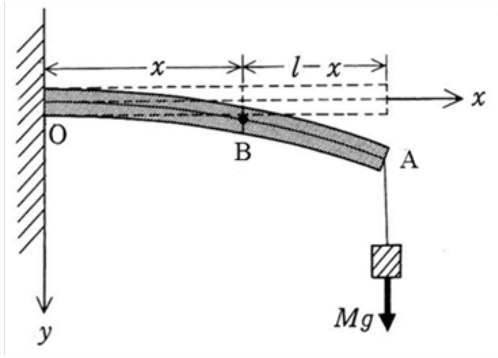

図 10.16 壁に一端を固定し，他端におもり Mを吊り下げたはりの変形．

この問題を次の手順で解析する．

(1) 点 O から任意の位置 x にある点 B を含む断面に作用する応力による力のモーメントを，はり内部の断面における厚さ方向の各微小面に作用する法線応力から求める．

(2) 同じく点 B を含む断面に作用する応力による力のモーメントを，点 B を左端とするはり片 BA に作用する力のつり合いおよび力のモーメントのつり合いからも求める．

(3) 別々に求めた力のモーメントおよびたわみが小さいときの曲率を用いて，たわみの基礎方程式を求める．

(4) たわみの基礎方程式とはりの支持条件より，たわみ y を x の関数として求める．

解析のために，図 10.17 のように，はりに作用する力および力のモーメントを考える．x 方向の任意の位置（点 B）におけるはり内部の断面を介して，面の両側の部分（図 10.17(b) のはり片 OB とはり片 BA）は力を及ぼし合っている．はり片 OB に作用するせん断力と力のモーメントは，作用反作用の法則より，はり片 BA に作用するせん断力と力のモーメントのそれぞれと，大きさが等しく逆向きである．図 10.17 は，図 10.16 に示したはりにおいて，(a)はり全体，(b)任意の位置 x（点 B）を端とするはり片，(c)任意の位置 x（点 B）における微小はり，に作用する力および力のモーメントを示している．

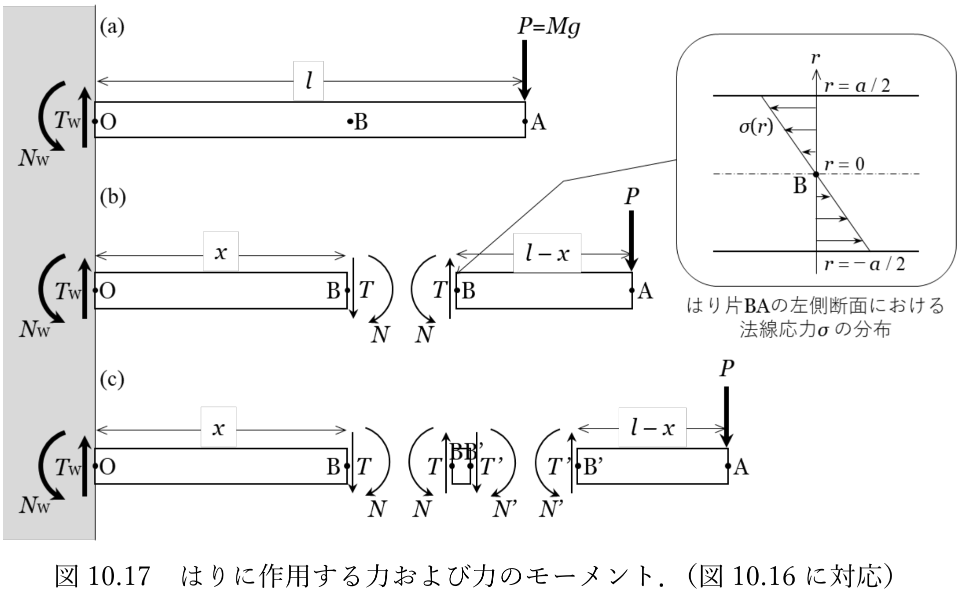

図 10.17　はりに作用する力および力のモーメント．（図 10.16 に対応）

手順(1)では，はり内部の法線応力を考える．図 10.18 は，図 10.16 の任意の位置（点 B）付近を拡大したもので，曲げたはりの内部における変形を示している．曲げたはりの，軸方向の微小区間の形状は円の一部（円弧）として近似できる．その円の半径（曲率半径）を R とすると，はりの内部の変形や応力

は図 10.18 に示すように，はりの点 B における断面上で厚さ方向に変化する．このとき厚さ方向の中心位置でははりの軸方向に伸び・縮みの変形はないが，それより上側では伸び，下側では縮む．したがって，上側では内部の応力が引っ張り，下側では圧縮となっている．この変形のない微小面は，たわんだはりの上側と下側の中間に層状に広がっている．これを中立層とよぶ．はりの断面は中立層に垂直である．図 10.17(c)および図 10.18 のように，中立層上の近接した 2 点を B, B'とする．曲線 BB'から上側に向かって距離 r のところ（曲線 BB'より上側の位置 r）に厚さ dr，長さ(R+r)d θ，幅 b の薄層（図 10.18 の灰色の部分）を考える．薄層の断面積は dS = bdr である．この部分薄層のもとの長さは Rd θ に等しいから，伸びひずみ ε は次のように表される．

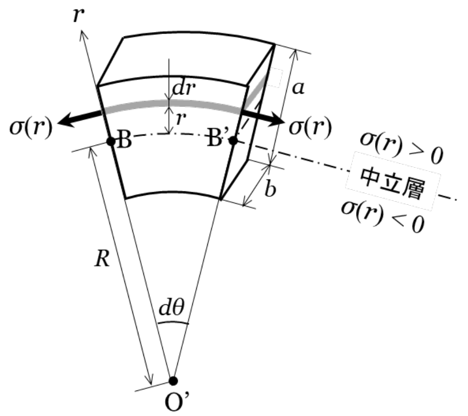

図 10.18　曲げたはりの内部における変形.
（図 10.16 の点 B 付近を拡大）

$$\varepsilon = \frac{(R+r)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{r}{R} \qquad (10.17)$$

よって薄層の左側断面に作用する法線応力 σ（引張応力を正）は r の関数

$$\sigma(r) = E\frac{r}{R} \qquad (10.18)$$

となり，この断面にさらに左の部分から作用する法線方向の力は

$$\sigma(r)dS \qquad (10.19)$$

と表される．図 10.17 中の拡大図のように，図 10.17 中の拡大図のように，中立層から等距離にある上下層では，大きさが等しく向きが反対の応力が作用するため偶力となることが式(10.18)からわかる．この法線方向の力による点 B に関する反時計回りの力のモーメントの大きさ $r\sigma(r)dS$ をはりの厚さ方向に積分することで，点 B の左側部分が点 B を含む断面を介して右側部分に及ぼす，点 B に関する反時計回りの力のモーメントの大きさ N(x)が次のように求まる．

$$N(x) = \int_S (r\sigma(r)dS) = \frac{E}{R}\int_S r^2 dS = \frac{bE}{R}\int_{-a/2}^{a/2} r^2 dr = \frac{Ea^3 b}{12R} \qquad (10.20)$$

以上の計算は，位置 x におけるはりのたわみを曲率半径 R の接円に近似して求めたものである．実際のはりの全体的たわみは円形でないので，ここで用いた曲率半径 R は位置 x の関数ということになる．

手順(2)では，図 10.17(b)のように，平衡時のはり片 BA について力のつり合いおよび力のモーメントのつり合いを考える．y 方向の力のつり合いより，点 B には上向きで大きさ T(x)=P のせん断力がはり片 OB から作用していることになる．一方，はり片 BA に作用する点 B に関する力のモーメントについては，点 A にかかる荷重 P による大きさ P(l−x)の時計回りの力のモーメントとはり片 OB からはり片 BA の B 端面に作用する大きさ N(x)の反時計回りの力のモーメントがつり合っている．よって，次式を得る．

$$N(x) = P(l-x) = Mg(l-x) \qquad (10.21)$$

はり片 OB に作用する力のつり合いおよび力のモーメントのつり合いから考えた場合でも，式(10.21)が導出される．なお，はり全体に作用する力のつり合いおよび力のモーメントのつり合いも同様に考えることができる．はりの右端 A にかかる荷重 P によって，はりの左端 O には壁から，上向きで大きさ T_W=P のせん断力，および，反時計回りで大きさ N_W =Pl の力のモーメントが作用する．

図 10.17(c)および図 10.18 に示す，点 B を含む断面と点 B'を含む断面に挟まれた微小はりを考える．上で求めた大きさ N の力のモーメントは，微小はりに B より左側のはり片から微小はり左面の各点に作用する力によるもので，微小はりを点 B を中心に反時計回りに回転させようとする．これに対して点 B'

を含む右の面では N と同様にして，B'より右側のはり片から微小はり右面の各点に作用する力による点 B'に関する力のモーメントの大きさ N'を求めることができる．この力のモーメントは微小はりを時計回りに回転させようとする．これら 2 つの力のモーメントにより微小はりは上に凸に曲がることになる．これらはどちらも，はりの固定端と他端 A に加えられた外力によって，微小はりの両側断面に作用することになった力，つまり内力による力のモーメントである．内力は応力を断面に渡って積分したものであり，内力による力のモーメントは応力による力のモーメントを断面にわたって積分したものである．工学の材料力学や構造力学などでは，このように，外力によって生じた内力による力のモーメントを曲げモーメントとよぶ．

手順(3)では，まず，式(10.20)，(10.21)より，はりにかかる曲げモーメントを次のように得る．

$$N(x) = \frac{Ea^3b}{12R} = Mg(l-x) \tag{10.22}$$

これよりたわみの曲率 κ （曲率半径の逆数）は以下のようになる．

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{12}{a^3bE}Mg(l-x) = \frac{N(x)}{EI} \tag{10.23}$$

ここで I は，はりの断面形状で決まる係数 [1]で，長方形の場合は $I = a^3b/12$ である．式(10.23)を見てわかるように，たわみの曲率は，はりの断面形状で決まる係数 I，はりにかかる曲げモーメント N(x)，はり材料のヤング率 E により表される．

後述するように，はりのたわみがわずかな場合には，たわみの曲率は $\kappa = d^2y/dx^2$ で与えられるので次の方程式を得る．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12Mg}{a^3bE}(l-x) \tag{10.24}$$

この式は位置 x におけるたわみ y を支配する微分方程式であり，たわみの基礎方程式という．

手順(4)では，式(10.24)を解いてたわみ y を得る．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12Mg}{a^3bE}\left(lx - \frac{x^2}{2} + c_1\right) \tag{10.25}$$

$$y = \frac{12Mg}{a^3bE}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2\right) \tag{10.26}$$

ここで，はりの左端は固定されているので，境界条件は x = 0 において $y = 0$, $dy/dx = 0$ であり，$c_1 = c_2 = 0$ となる．これより曲げによる変位（たわみ）は以下のようになる．

$$y = \frac{6Mg}{a^3bE}\left(l - \frac{x}{3}\right)x^2 \tag{10.27}$$

----（脚注）----

1) この係数を断面 2 次モーメント I という．これは，はり・棒の断面形状で決まる量であり，棒の曲げにくさを表す．曲げモーメントを求める式(10.20)中の $\int_S r^2 dS$ が断面 2 次モーメント I である．上述の長方形断面の場合は，幅 b が 2 倍になると曲げにくさも 2 倍になり，厚さ a が 2 倍になると曲げにくさは 8 倍にもなる．また，一辺 a の正方形断面の棒と同じ断面積をもつ円形断面の棒では円半径は $a/\sqrt{\pi}$ なので，各々の断面 2 次モーメントは次のようになる．よって，円形断面の棒の方がわずかに曲げやすい．

正方形断面：$I = \int_{-a/2}^{a/2} r^2 a dr = \frac{a^4}{12}$，円形断面：$I = \int_{-a/\sqrt{\pi}}^{a/\sqrt{\pi}} r^2 \sqrt{(a^2/\pi) - r^2}\, dr = \frac{a^4}{4\pi} = \frac{a^4}{12.566\cdots}$