令和３年２月１０日

# ２階の常微分方程式の解法についての一考察

量子エネルギー工学専攻
橋爪　秀利

数学物理学演習（共立出版）令和３年度版

演習問題 18.2

次式で与えられる，のこぎり波を表す関数 $f(x)$ 数を考える．ただし，$f(x)$ の周期を $2\pi$ とする．

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (-\pi < x \le 0) \\ x & (0 < x \le \pi) \end{cases}$$

（１）$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

（２）$\dfrac{d^2y}{dx^2}+3y=f(x)$ の特殊解を求めよ．

解答

（１）

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \qquad (1)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \qquad (2)$$

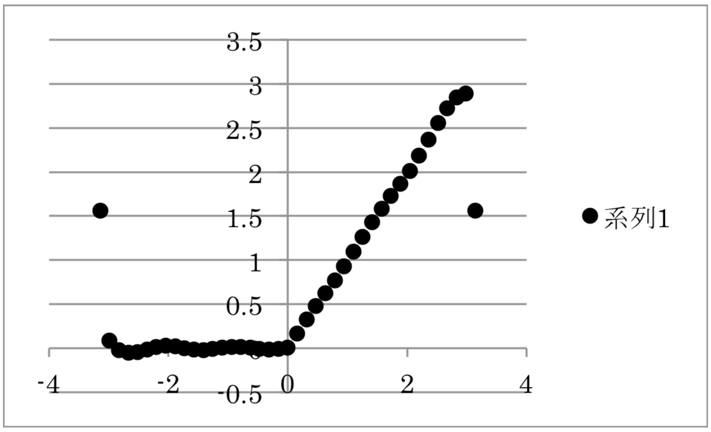


図１　（１）式で n=50 とした結果

（2）y を（18-8）式で表し，方程式の左辺に代入し，（1）式と比較すれば，

$$a_0=\frac{\pi}{6},\ a_n=-\frac{1}{3-n^2}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2(n^2-3)},\ b_n=\frac{1}{n^2-3}\frac{(-1)^n}{n}$$

特殊解は

$$y_1=\frac{\pi}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx) \qquad (3)$$

となる。

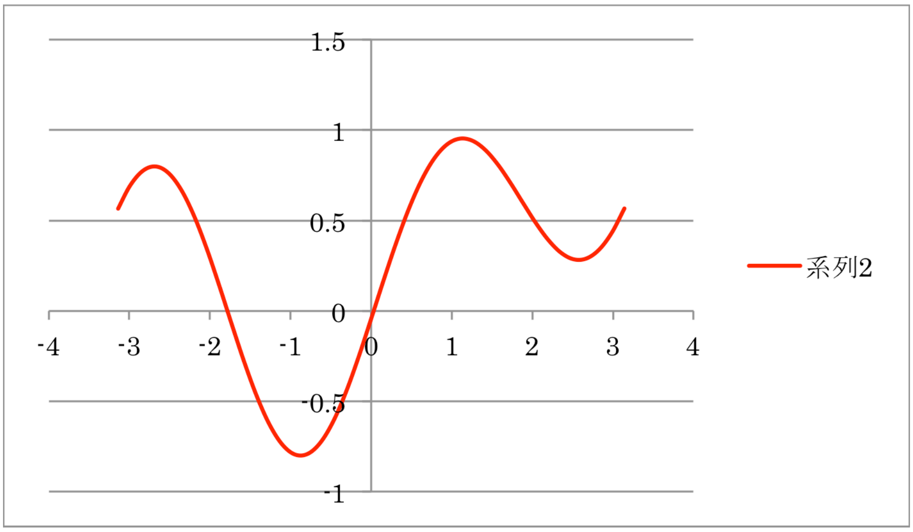


図２　　(3) 式で n=50 とした場合

図２の結果は、以下の式で与えられる予想と異なる！（ロンスキアンの式を利用しても同じ）

$$y_{pre}=\begin{cases}0 & (-\pi<x\le 0)\\ \dfrac{x}{3} & (0<x\le\pi)\end{cases} \qquad (4)$$

(4) 式で与えられる関数は、$x=0$ で１階の微分が不可能であり、問（２）の微分方程式を満足しないため、間違いである。

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

なお、数物演習の第 11 章の

$$y=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+\{\int^x\frac{-u_2R(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}dx\}\,u_1(x)+\{\int^x\frac{u_1R(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}dx\}\,u_2(x) \qquad (11\text{–}10)$$

で積分範囲を$-\pi<x<x$として計算すると

$$\{\int_{-\pi}^{x}\frac{-u_2 f(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}\,dx\}\,u_1(x)+\{\int_{-\pi}^{x}\frac{u_1 f(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}\,dx\}\,u_2(x)$$

$$=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \dfrac{x}{3} & 0<x<\pi\end{cases}$$

$$\because\quad 0<x<\pi\quad,\quad u_1=\cos(\sqrt{3}x)\quad,\quad u_2=\sin(\sqrt{3}x)$$

$$\{\int_{-\pi}^{x}\frac{-u_2 f(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}\,dx\}\,u_1(x)+\{\int_{-\pi}^{x}\frac{u_1 f(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}\,dx\}\,u_2(x)=\{\int_{0}^{x}\frac{-u_2 f(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}\,dx\}\,u_1(x)+\{\int_{0}^{x}\frac{u_1 f(x)}{u_1u_2'-u_1'u_2}\,dx\}\,u_2(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\{\int_0^x -x\sin(\sqrt{3}x)\,dx\}\cos(\sqrt{3}x)+\frac{1}{\sqrt{3}}\{\int_0^x x\cos(\sqrt{3}x)\,dx\}\sin(\sqrt{3}x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\{\frac{x\cos(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\sin(\sqrt{3}x\}\cos(\sqrt{3}x)+\frac{1}{\sqrt{3}}\{\frac{x\sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cos(\sqrt{3}x)\}\sin(\sqrt{3}x)\right]_0^x=\frac{x}{3}$$

となり、結果は同じ。

---

ここで、以下の値を求める。

$$y_1(0)=\frac{\pi}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3-n^2}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}=\frac{\pi}{12}-\frac{0.9578}{\pi}=-0.043$$

$$\frac{dy_1}{dx}(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3-n^2}=1.38263$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3-(2n-1)^2)(2n-1)^2}$$

近似和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3-(2n-1)^2)(2n-1)^2}\approx 0.95779$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-3}$$

近似和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-3}\approx -1.38263$$

よって、特殊解として斉次階を利用して、改めて

$$y_1{}^*=y_1+C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x)$$

$$=\frac{\pi}{12}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3-n^2}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3-n^2}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)+C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x)$$

とおいて、原点を通り、原点（+0）での傾きが（4）式で与えられる関数と同じになるように

$$y_1{}^*(0)=0\quad,\qquad \frac{dy_1{}^*}{dx}(0)=\frac{1}{3}$$

として、係数を決めると

$$C_1 + \frac{\pi}{12} - \frac{0.9578}{\pi} = C_1 - 0.043 = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = 0.043$$

$$\sqrt{3}C_2 + 1.38263 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow C_2 = \frac{\frac{1}{3} - 1.38263}{\sqrt{3}} = -0.6058$$

$$y_1{}^* = \frac{\pi}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3-n^2} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2 \pi} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3-n^2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$
$$+ 0.043\cos(\sqrt{3}x) - 0.6058\sin(\sqrt{3}x) \tag{5}$$

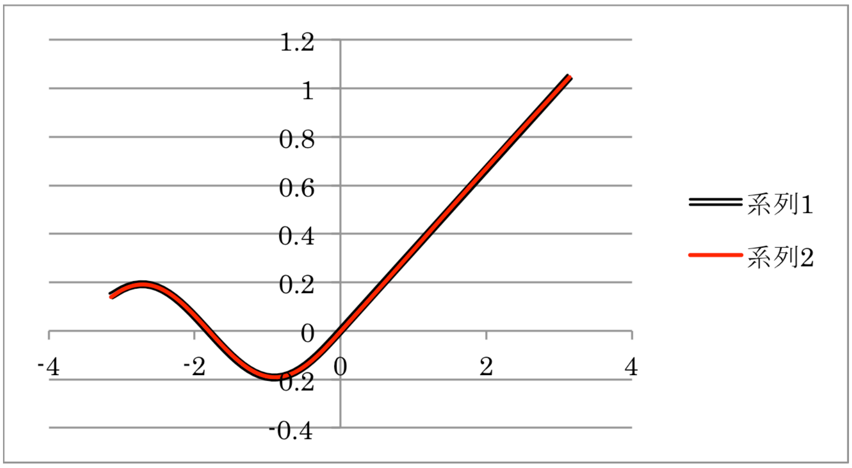


図３　系列２は（5）式のプロット 、 系列１は（6）式のプロット

$$y^*_{pre} = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) & (-\pi < x < 0) \\ \dfrac{x}{3} & (0 \le x < \pi) \end{cases} \tag{6}$$

（6）式は、$x < 0$ において斉次解を利用しており、$x < 0$ において、問（２）の微分方程式を満たす。さらに、$x = 0$ において

$$y^*_{pre}(+0) = y^*_{pre}(-0) = 0 \quad , \quad \frac{dy^*_{pre}}{dx}(+0) = \frac{dy^*_{pre}}{dx}(-0) = 1/3 \quad , \quad \frac{d^2y^*_{pre}}{dx^2}(+0) = \frac{d^2y^*_{pre}}{dx^2}(-0) = 0$$

となっており、$-\pi < x < \pi$ のすべての点において微分方程式を満足する。よって（6）式で与えられる関数が正しい特殊解である。図３に（5）式と（6）式の結果を比較してあるが、非常に良く一致している。

次に、(6) 式において周期関数が領域の両端で連続で１階微分も同じになるように

$$y^{**}_{pre} = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) + C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2\sin(\sqrt{3}x) & (-\pi < x < 0) \\ \dfrac{x}{3} + C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2\sin(\sqrt{3}x) & (0 \le x < \pi) \end{cases} \tag{7}$$

とおいて、

$$y_{pre}^{**}(-\pi) = y_{pre}^{**}(\pi) \quad , \qquad \frac{dy_{pre}^{**}}{dx}(-\pi) = \frac{dy_{pre}^{**}}{dx}(\pi)$$

となるように係数を決める。

$$\frac{\pi}{3} + C_1\cos(\sqrt{3}\pi) + C_2\sin(\sqrt{3}\pi) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin(-\sqrt{3}\pi) + C_1\cos(-\sqrt{3}\pi) + C_2\sin(-\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + C_2\sin(\sqrt{3}\pi) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\pi) - C_2\sin(\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2\sin(\sqrt{3}\pi)}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\pi) + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}\right) = 0.6058$$

$$\frac{1}{3} - C_1\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi) + C_2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi) = \frac{1}{3}\cos(-\sqrt{3}\pi) - C_1\sqrt{3}\sin(-\sqrt{3}\pi) + C_2\cos(-\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - C_1\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi) = \frac{1}{3}\cos(\sqrt{3}\pi) + C_1\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(\sqrt{3}\pi)\right) = \frac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)} = -0.04307$$

得られた係数は、(5) 式の係数の符号を変えたものになっている。

$$y_{pre}^{**} = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) - \dfrac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}\cos(\sqrt{3}x) - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}\right)\sin(\sqrt{3}x) \\ (-\pi < x < 0) \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}\cos(\sqrt{3}x) - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}\right)\sin(\sqrt{3}x) \\ (0 \le x < \pi) \end{cases} \tag{8}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}\cos(\sqrt{3}x) - \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}\right)\sin(\sqrt{3}x) & (-\pi < x < 0) \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}\cos(\sqrt{3}x) - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}\right)\sin(\sqrt{3}x) & (0 \le x < \pi) \end{cases} \tag{8'}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) - 0.043\cos(\sqrt{3}x) + 0.6058\sin(\sqrt{3}x) & (-\pi < x < 0) \\ \dfrac{x}{3} - 0.043\cos(\sqrt{3}x) + 0.6058\sin(\sqrt{3}x) & (0 \le x < \pi) \end{cases} \tag{8''}$$

(3) 式で与えられる級数和と比較すると図４に示すように非常に良く一致している。
ちなみに (8) 式で与えられた式において

$$\frac{d^2y_{pre}^{**}}{dx^2}(-\pi) = -1.70 \quad \ne \quad \frac{d^2y_{pre}^{**}}{dx^2}(\pi) = 1.44$$

となっている。

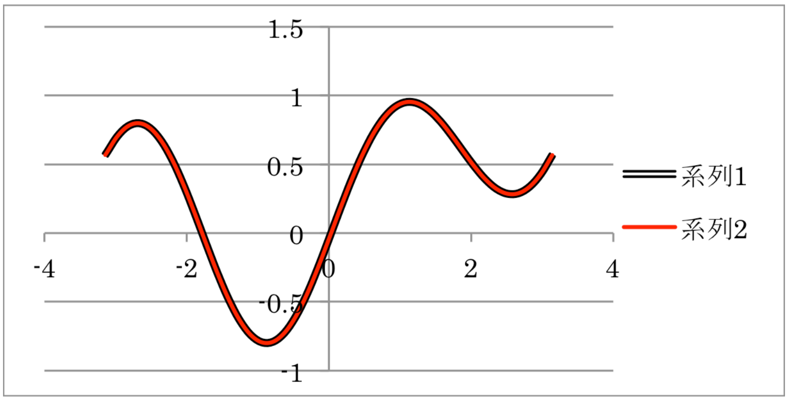


図４　　系列１は（8）式のプロット、系列２は（3）式のプロット

以上をまとめると、２階の常微分方程式に関して、

１）特殊解は、(6) 式が正しく、(4) 式は間違いである。
　　従って、特殊解として（1）式、(2) 式に 1/3 を掛けた関数も間違いである。

２）フーリエ級数で求められる特殊解は、領域で２階の微分が可能な関数で、かつ、領域の両端で連続かつ一階微分可能な関数となっている。

３）特殊解を解析的に求める方法は、

＜step 1＞　$x=0$ を除いて

$$y_{pre}=\begin{cases}0 & (-\pi<x\le 0)\\ \dfrac{x}{3} & (0<x\le\pi)\end{cases}$$

＜step 2＞

$$y^*_{pre}=\begin{cases}C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x) & (-\pi<x\le 0)\\ \dfrac{x}{3}+C_3\cos(\sqrt{3}x)+C_4\sin(\sqrt{3}x) & (0<x\le\pi)\end{cases}$$

とおいて、$x=0$ をにおいて

$$y^*_{pre}(+0)=y^*_{pre}(-0)\quad,\quad\frac{dy^*_{pre}}{dx}(+0)=\frac{dy^*_{pre}}{dx}(-0)\quad,\quad\frac{d^2y^*_{pre}}{dx^2}(+0)=\frac{d^2y^*_{pre}}{dx^2}(-0)$$

を満足するように係数を決める。

$$C_1=C_3\quad,\quad\sqrt{3}C_2=\frac{1}{3}+\sqrt{3}C_4\quad,\quad-3C_1=-3C_3\quad\Rightarrow\quad C_1=C_3\quad,\quad C_2=C_4+\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

＜step 3 − 1＞

$0<x\le\pi$ で $y^*_{pre}=\dfrac{x}{3}$ となるように

$$C_3=C_4=0\qquad\Rightarrow\quad C_1=0\quad,\quad C_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

とすれば、(6) 式が得られる。

$< \text{step } 3-2 >$

$$y_{pre}^{*}(-\pi)=y_{pre}^{*}(\pi) \quad , \qquad \frac{dy_{pre}^{*}}{dx}(-\pi)=\frac{dy_{pre}^{*}}{dx}(\pi)$$

より、

$$C_1\cos(\sqrt{3}\pi)-C_2\sin(\sqrt{3}\pi)=\frac{\pi}{3}+C_3\cos(\sqrt{3}\pi)+C_4\sin(\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow \quad -(\frac{1}{3\sqrt{3}}+C_4)\sin(\sqrt{3}\pi)=\frac{\pi}{3}+C_4\sin(\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow \quad C_4=-\frac{1}{6}(\frac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}+\frac{1)}{\sqrt{3}}) \quad , \quad C_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{6}(\frac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}+\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{1}{6}(\frac{\pi}{\sin(\sqrt{3}\pi)}-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$-C_1\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}(-\pi))+C_2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}(-\pi))=\frac{1}{3}-C_3\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)+C_4\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow \quad C_1=C_3=\frac{1}{2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}(\frac{1}{3}+\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi)\ (C_4-C_2)=\frac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}$$

とすれば、(8’)式が得られる。

**応用例**

次式で与えられる，の関数$f(x)$ 数を考える．ただし，$f(x)$ の周期を$2\pi$ とする．

$$f(x)=\begin{cases} -x & (-\pi < x \le 0) \\ x & (0 < x \le \pi) \end{cases}$$

このとき、$\dfrac{d^2y}{dx^2}+3y=f(x)$ の特殊解を求めよ．

解答)

● 特殊解を直接求める。

＜step 1＞　$x=0$ を除いて

$$y_{pre}=\begin{cases} -\dfrac{x}{3} & (-\pi < x < 0) \\ \dfrac{x}{3} & (0 < x \le \pi) \end{cases} \qquad (9)$$

＜step 2＞　原点での連続性と１階微分可能の条件を満足させるために、

$$y^*_{pre}=\begin{cases} -\dfrac{x}{3}+C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x) & (-\pi < x \le 0) \\ \dfrac{x}{3}+C_3\cos(\sqrt{3}x)+C_4\sin(\sqrt{3}x) & (0 < x < \pi) \end{cases} \qquad (10)$$

とおいて、

$$y^*_{pre}(+0)=y^*_{pre}(-0) \quad , \quad \frac{dy^*_{pre}}{dx}(+0)=\frac{dy^*_{pre}}{dx}(-0) \quad , \quad \frac{d^2y^*_{pre}}{dx^2}(+0)=\frac{d^2y^*_{pre}}{dx^2}(-0)$$

より

$$C_1=C_3 \quad , \quad -\frac{1}{3}+\sqrt{3}C_2=\frac{1}{3}+\sqrt{3}C_4 \quad , \quad -3C_1=-3C_3 \quad \Rightarrow \quad C_1=C_3 \quad , \quad C_2=C_4+\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

＜step 3－1＞

$0<x\le\pi$ で$y^*_{pre}=\dfrac{x}{3}$ となるように

$$C_3=C_4=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0 \quad , \quad C_2=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

あるいは、

$-\pi<x<0$ で$y^*_{pre}=-\dfrac{x}{3}$ となるように

$$C_1=C_2=0 \quad \Rightarrow \quad C_3=0 \quad , \quad C_4=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

< step 3 − 2 >

$$y^{*}_{pre}(-\pi)=y^{*}_{pre}(\pi)\quad,\quad\frac{dy^{*}_{pre}}{dx}(-\pi)=\frac{dy^{*}_{pre}}{dx}(\pi)$$

より、

$$-\frac{-\pi}{3}+C_1\cos(\sqrt{3}(-\pi))+C_2\sin(\sqrt{3}(-\pi))=\frac{\pi}{3}+C_3\cos(\sqrt{3}\pi)+C_4\sin(\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow\ C_2=-C_4\quad\Rightarrow\ C_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}\quad,\quad C_4=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{3}-\sqrt{3}C_1\sin(\sqrt{3}(-\pi))+\sqrt{3}C_2\cos(\sqrt{3}(-\pi))=\frac{1}{3}-\sqrt{3}C_3\sin(\sqrt{3}\pi)+\sqrt{3}C_4\cos(\sqrt{3}\pi)$$

$$\Rightarrow\ C_1=C_3=\frac{1}{2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi)\,(C_4-C_2)=\frac{1}{2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}\pi))$$

$$=\frac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{3\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}$$

よって

$$y^{**}_{pre}=\begin{cases}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}\cos(\sqrt{3}x)+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) & (-\pi<x\le 0)\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1-\cos(\sqrt{3}\pi)}{6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\pi)}\cos(\sqrt{3}x)-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) & (0<x<\pi)\end{cases}$$

● 特殊解をフーリエ級数で求める。

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos(nx)$$

$$y_1=\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2-3}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos(nx)$$

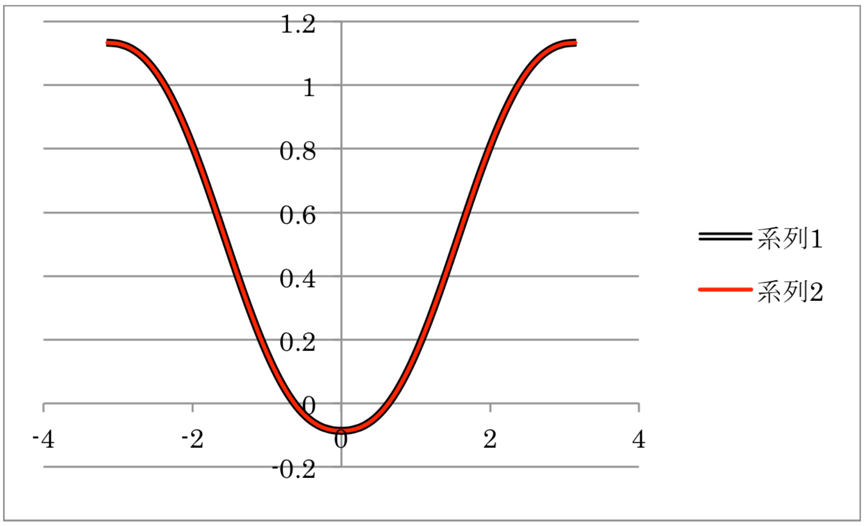


図５　　系列１は理論解、系列２はフーリエ級数解

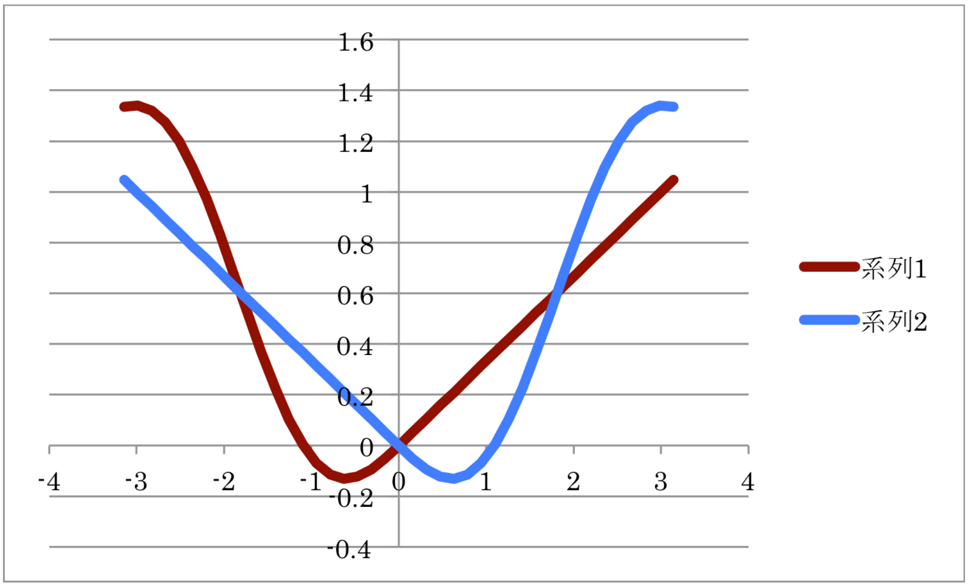


図６　系列１はx＞０で x/3 に合わせた特殊解
系列２はx＜０で –x/3 に合わせた特殊解