第 14 章のちょっと一服の解答例

$$I = S + (L - L_0) = \int_0^{\pi} \{\frac{1}{2}r^2 + \lambda(\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} - \frac{L_0}{\pi})\}\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}r^2 + \lambda(\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} - \frac{L_0}{\pi}) = \frac{1}{2}r^2 + \lambda\{\sqrt{(r')^2 + r^2} - \frac{L_0}{\pi}\} = F(r, r', \lambda)$$

オイラー方程式を以下のように変形する。

$$\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial F}{\partial r'}) - \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r'\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial F}{\partial r'}) - r'\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{d}{d\theta}(r'\frac{\partial F}{\partial r'}) - r''\frac{\partial F}{\partial r'} - r'\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{d}{d\theta}(r'\frac{\partial F}{\partial r'}) - (r'\frac{\partial F}{\partial r} + r''\frac{\partial F}{\partial r'})$$

F には、陽に θ が現れないので、

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial F}{\partial r'}\frac{dr'}{d\theta} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\theta} = r'\frac{\partial F}{\partial r} + r''\frac{\partial F}{\partial r'}$$

となるので、

$$\frac{d}{d\theta}(r'\frac{\partial F}{\partial r'} - F) = 0 \quad \Rightarrow \quad r'\frac{\partial F}{\partial r'} - F = c$$

ここで、

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = \lambda\frac{r'}{\sqrt{(r')^2 + r^2}}$$

となるので、

$$r'\frac{\partial F}{\partial r'} - F = \lambda\frac{(r')^2}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} - \frac{1}{2}r^2 - \lambda\{\sqrt{(r')^2 + r^2} - \frac{L_0}{\pi}\} = c_1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\frac{(r')^2 - \{(r')^2 + r^2\}}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} + \lambda\frac{L_0}{\pi} - \frac{1}{2}r^2 = -\lambda\frac{r^2}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} + \lambda\frac{L_0}{\pi} - \frac{1}{2}r^2 = c_1$$

さらに、図から分かるように、１点で $r = 0$ となることを利用すれば、

$$c_1 = \lambda\frac{L_0}{\pi}$$

となるので、

$$-\lambda\frac{r^2}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} - \frac{1}{2}r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\frac{1}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\frac{1}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\lambda = -\sqrt{(r')^2 + r^2} \quad (\lambda < 0) \quad \Rightarrow \quad (r')^2 + r^2 = 4(-\lambda)^2 = 4\beta^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = r' = \sqrt{4\beta^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{4\beta^2 - r^2}}dr = d\theta \quad \Rightarrow \quad \arcsin(\frac{r}{2\beta}) = \theta + c_2$$

$r=0$のとき、$\theta=0$とすれば

$$c_2 = 0$$

となる。よって、

$$\arcsin\left(\frac{r}{2\beta}\right)=\theta \quad \Rightarrow \quad r = 2\beta\sin\theta$$

よって

$$x = r\cos\theta = 2\beta\sin\theta\cos\theta = \beta\sin(2\theta)$$
$$y = r\sin\theta = 2\beta\sin^2\theta = \beta(1-\cos(2\theta))$$
$$\left(\frac{x}{\beta}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}-1\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-\beta)^2=\beta^2$$

となり、半径$\beta=-\lambda$の円なので、

$$\beta = -\lambda = \frac{L_0}{2\pi}$$

となる。よって、周長L_0の図形で最大の面積を与える図形は、半径$\dfrac{L_0}{2\pi}$の円である。