

問題の解答例

第 10 章

問題 10.2-1 (前年補充問題 10.2-S1)

A 面を天井に固定し面 P から下面 B までの質量は $(L-x)M/L$ であるから面 P に作用する鉛直下向き応力は $(L-x)Mg/LS$ である。但し、自重のため少し伸びるから実際の長さは L' となるから上式は精密でないことになる。しかし次の 10.3 節で述べる伸びひずみ ε が $|\varepsilon| \ll 1$ であれば 1 次近似の範囲で正解である。同様に 10.3 節で述べるポアソン比が影響する場合には断面積 S が変化する。その断面積変化も x に依存し上部ほど変化が大きい。その影響も $|\varepsilon| \ll 1$ であれば 1 次近似では無視できる。つまりこの答えは $|\varepsilon| \ll 1$ であれば 1 次近似の正解である。

問題 10.2-2 (前年補充問題 10.2-S2 : $a \rightarrow L, d \rightarrow a$)

平面 P 上で L 部から U 部に作用する力

法線応力 σ_L による上向き力は $\sigma_L \cos \theta \times a^2 / \cos \theta = \sigma_L a^2$

せん断応力 τ_L による上向き力は $-\tau_L \sin \theta \times a^2 / \cos \theta = -\tau_L a^2 \tan \theta$

σ_L による左向き力は $\sigma_L \sin \theta \times a^2 / \cos \theta = \sigma_L a^2 \tan \theta$

τ_L による左向き力は $\tau_L \cos \theta \times a^2 / \cos \theta = \tau_L a^2$

U 部上面に作用する外力の上向き成分は $-F$ である。U 部左面に作用する左向き力は面 P の左面での高さを d とすると $F(a-d)/a$ で、U 部右面に作用する左向き力は $-F(a-a \tan \theta - d)/a$ であるから合わせて $F(a-d)/a - F(a-a \tan \theta - d)/a = F \tan \theta$ である。上向きと左向きの力のつり合いから次の連立方程式が得られる。

$$\sigma_L - \tau_L \tan \theta = \sigma, \quad \sigma_L \tan \theta + \tau_L = -\sigma \tan \theta$$

$$\sigma_L - \tau_L \tan \theta = -\sigma \quad (1)$$

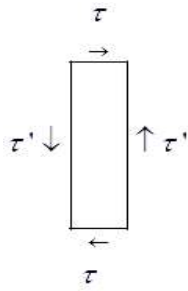
$$\sigma_L \tan \theta + \tau_L = \sigma \tan \theta \quad (2)$$

式(1) $\times \tan \theta$ より $\sigma_L \tan \theta - \tau_L \tan^2 \theta = -\sigma \tan \theta$ となり、式(2)より

$$\tau_L = \frac{2\sigma \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2\sigma \sin \theta \cos \theta = \sigma \sin 2\theta, \quad \sigma_L = \sigma \sin 2\theta \tan \theta - \sigma = \sigma(2 \sin^2 \theta - 1)$$

となる。よって $\tau_L = -\sigma \sin 2\theta, \quad \sigma_L = \sigma \cos 2\theta$.

問題 10.2-3 (10.2-S3)



左図が円筒壁の幅 a 高さ h 奥行き d の直方体で左面 Q で下向き，右面 P で上向きせん断力 τ' とすることで直方体を回転させるトルクを 0 とできる。上下面に作用するせん断力による時計回りのトルクは τhad ，左右面に作用するせん断力による反時計回りトルクの大きさは $\tau' had$ であるから， $\tau = \tau'$ である。但し問題文に右面 P と左面 Q が平行と書いているのは直方体近似のためである。

問題 10.3-1 (10.3-S1)

- (1) -1.00×10^{-7} , (2) $+2.0 \times 10^{-5}$

問題 10.3-2 (10.3-S2)

中立層が問題文のように断面の縦方向 $a/2$ にある場合には次の伸びひずみとなる。

曲率半径 $R + r$ における円弧の長さは $(R + r)L / R = (1 + r/R)L$ であるから伸びひずみ ε

は教科書の定義式(10.4) $\varepsilon = \delta L / L$ に対応させると r/R である。但し問題文 2 行目の「棒の中心を通る円筒面」は「棒の中心軸を通る半径 R の円筒面」としたほうがわかりやすい。

問題 10.3-3 (10.3-S3)

一様な弾性体の変形として解答する。

教科書のせん断ひずみの定義式(10.6)と図 10.5 で， $AB = h$, $BB' = R\theta$ より

$$\gamma = BB' / AB = R\theta / h$$

問題 10.5-1

一様な断面積 S 長さ L のワイヤに引張り力 F を加えたとき引張応力は $\sigma = F/S$ ，伸びが ΔL のときの伸びひずみは $\varepsilon = \Delta L / L$ で与えられ，ヤング率 E はフックの法則より， $E = \sigma / \varepsilon$ で与えられる。よって次のように求められる。

(1) 引張応力

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{102 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{0.1 \text{ cm}^2} = \frac{102 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{0.1(10^{-2} \text{ m})^2} = 100 \times 10^6 \text{ kg/ms}^2 = 100 \text{ MPa}$$

(2) 伸びひずみ

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.22 \text{ cm}}{2 \text{ m}} = \frac{0.22 \times 10^{-2} \text{ m}}{2 \text{ m}} = 1.1 \times 10^{-3} = 0.11\%$$

(3) ヤング率

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{100 \text{ MPa}}{1.1 \times 10^{-3}} = 91 \text{ GPa}$$

問題 10.5-2

一様な断面積 S 長さ L の棒に引張り力 F を加えたとき引張応力は $\sigma = F/S$, 伸びが ΔL のときの伸びひずみは $\varepsilon = \Delta L/L$ である。ヤング率 E はフックの法則より $E = \sigma / \varepsilon$ である。よって ε と ΔL は次のように求められる。

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{275 \times 10^6 \text{ Pa}}{110 \times 10^9 \text{ Pa}} = 2.50 \times 10^{-3}$$

$$\therefore \Delta L = 2.50 \times 10^{-3} \times 300 \text{ mm} = 2.50 \times 10^{-3} \times 0.3 \text{ m} = 7.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.75 \text{ mm}$$

註) 問題文に弾性率と書いてあるが題意よりこれは引張り弾性を意味しているので解答ではヤング率と記した。

問題 10.5-3

一様な断面積 S 長さ L の棒に引張り力 F を加えたとき引張応力は $\sigma = F/S$, 伸びが ΔL のときの伸びひずみは $\varepsilon = \Delta L/L$ である。ヤング率 E はフックの法則より $E = \sigma / \varepsilon$, ポアソン比 定義式は教科書式 (10.5) $\nu = -(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ で与えられる。

$$\nu = -\left(\frac{\Delta d}{d}\right) / \left(\frac{\Delta L}{L}\right) = -\left(\frac{-2.5 \times 10^{-3} \text{ mm}}{10 \text{ mm}}\right) / \varepsilon = \frac{2.5 \times 10^{-4}}{\varepsilon} = 0.34 \quad \therefore \varepsilon = 7.35 \times 10^{-4}$$

よって引張荷重 F は次のように求められる。

$$\begin{aligned} F &= \sigma S = \varepsilon E S = 7.35 \times 10^{-4} \times 97 \text{ GPa} \times 3.14 \times (5 \text{ mm})^2 \\ &= 7.35 \times 10^{-4} \times 97 \times 10^9 \text{ Pa} \times 3.14 \times 25 \times (10^{-3} \text{ m})^2 = 5.6 \times 10^3 \text{ N} = 5.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

問題 10.5-4

せん断応力とずれひずみとせん断弾性率 G の関係はフックの法則より $\tau = G\gamma$,

$\gamma = \Delta a / a = \tan \theta$ が成り立つ。面積 S の面に平行にかかるずれの力を F とすれば、ずれ応力は $\tau = F/S$ と書けるから、それぞれ次のように求める。

(1) ずれの角 θ は $\gamma = \tan \theta = \Delta a / a$ から決まる。 $\Delta a / a = 1/30$ と 1 よりずっと小さいので近似的に $\theta \approx \tan \theta = \Delta a / a = 1/30 \text{ rad} = 0.0333 \text{ rad} (= 1.9^\circ)$ となる。

$$(2\pi \text{ rad} = 360 \text{ deg.})$$

* もう一桁下まで見てみると $\tan \theta = 0.03333$, $\theta = 0.03332$ なので

| θ | $\ll 1$ では $\theta \sim \tan \theta$ であることが確認できる

$$\tau = \frac{0.1 \text{ kgf}}{a^2} = \frac{0.1 \times 9.8 \text{ N}}{(0.3 \text{ m})^2} = \frac{0.98 \text{ N}}{0.09 \text{ m}^2} = 10.9 \text{ Pa}$$

(2) せん断応力は となる。

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{10.9 \text{ Pa}}{1/30} = 327 \text{ Pa}$$

(3) ゼラチンのずれ弾性率は と求められる。

問題 10.5-5

引張応力 と伸びひずみ ($\varepsilon = \Delta L/L$) とヤング率 E の関係はフックの法則より $\sigma = E\varepsilon$ であり、ポアソン比は $\nu = -(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ で与えられる。

断面積 S ($\pi d^2/4$) 長さ L の丸棒を考える。この体積 V は $V=SL$ である。引張り応力を加えて丸棒が L 伸びたとき直径が Δd 増加しても体積は変わらないのであるから、

$$\frac{\pi}{4}(d + \Delta d)^2(L + \Delta L) = \frac{\pi}{4}d^2L$$

$$\text{左辺} = \frac{\pi}{4}d^2L\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)^2\left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)$$

$$\therefore \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)^2\left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) = 1$$

2 次の微小量を無視すれば $\frac{2\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L} = 0$ となるから、 $\frac{\Delta d}{d} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}$ を得る。これをポアソン比の式に代入すれば、 $\nu = -(\Delta d/d)/(\Delta L/L) = 0.5$ となる。

問題 10.5-6

ポアソン比の式(10.5)から $\nu = -(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ である。前問のように体積変化のない物体のポアソン比は 0.5 であるから、ポアソン比が 0.5 より小さい物体では伸びひずみを与えても伸びに垂直な方向の寸法のひずみは伸びひずみの半分より小さいので細くならない。つまり体積は増加することになる。ポアソン比が 0 であれば、物体の体積の増加率は伸びひずみに等しくなる。それは物体の密度が伸びひずみに反比例して減少することを意味する。

解説：ここではポアソン比の定義式を示すことが 1 つ目のポイント。そしてポアソン比の式の中に現れる、引張り力に垂直方向の物体のひずみがどうなるか示すのが 2 つ目のポイントである。この問題ならここまでで良いが、できれば物理的思考として、どのような物体の性質（ここでは密度）のときにポアソン比 0 となるか考えてみてほしい。

問題 10.6-1

天井に固定した長さ L の棒の上端から下向きに x 軸をとり、上端を 0 として座標 x のところの棒の断面積を $S(x)$ とする。棒の下端の断面積を S_0 とする。

棒の下端から x までの部分の体積は $V = \int_x^L S(x)dx$ である。

上端から x の距離の断面にかかる応力 $\sigma(x)$ は

$$\sigma(x) = \frac{Mg + \rho g \int_x^L S(x) dx}{S(x)}$$

となる。 x によらずこの応力が σ_0 で一定とすると、

$$S(x)\sigma_0 = Mg + \rho g \int_x^L S(x) dx$$

となる。ここで両辺を x で微分すると $\sigma_0 \frac{dS(x)}{dx} = -\rho g S(x)$ となる。 $x = L$ で $S = S_0$

であることを用いてこれを解くと、 $S(x) = S_0 \exp\left[\frac{\rho g (L-x)}{\sigma_0}\right]$ となる。

下端を考えると $\sigma_0 = Mg/S_0$ なので、 $S(x) = S_0 \exp\left[\frac{\rho S_0 (L-x)}{M}\right]$ を得る。

したがって、天井に固定した上端の断面積に対して、上端から離れるにつれて指数関数的に断面積が減少する、下端に近づくにつれて細くなる棒状物体である

問題 10.6-2

海水の密度を 1 g/cm^3 とし、深さによる密度変化を無視するとして、水深 5000 m での水圧 p は $p = 5000 \text{ m} \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/sec}^2 = 49 \text{ MPa}$ となる。

半径 r の球の体積は $V = (4/3)\pi r^3$ より r が Δr だけ縮む時の体積減少量は次のようになる。

$$\Delta V = \frac{4\pi}{3} (r^3 - (r - \Delta r)^3) = V \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta r}{r} \right)^3 \right) \approx 3V \frac{\Delta r}{r}$$

よって、体積ひずみは $-\Delta V / V = -3\Delta r / r$ となる。体積弾性率の定義式は、 ΔV と Δr は増分ではなく減少分を正にとっているので次のようになる。

$$p = K \frac{\Delta V}{V} = 3K \frac{\Delta r}{r}, \quad \therefore \Delta r = \frac{p}{3K} r$$

よって、 $\Delta r = pr / 3K = (49 \text{ MPa} \times 5 \text{ cm}) / (3 \times 1.3 \times 10^{11} \text{ N/m}^2) = 6.28 \times 10^{-4} \text{ cm}$

問題 10.6-3

(1) 下端の円錐の頂点から x の距離にある水平面での切り口の断面積を S として、その厚さ dx の部分を考える。これより下の円錐部分の体積は $Sx/3$ である。この部分の重さは $\rho g Sx/3$ であるので、考えている厚さ dx の部分に作用する応力は $\rho g x/3$ である。

この厚さ dx の板の部分の伸び $d\lambda$ は $d\lambda = (\rho g x/3E) dx$ となり、全体の伸び λ は

$$\lambda = \int_0^l \frac{\rho g x}{3E} dx = \frac{\rho g}{6E} l^2 \quad \text{となる。}$$

(2) 回転中心 O から x のところの長さ dx の部分に働く遠心力は $(\rho S dx)x\omega^2$ である。O から距離 x の部分が、それより先の部分に作用する遠心力によって引かれる力は

$$\int (\rho S dx) x \omega^2 = \rho S \omega^2 \frac{I^2 - x^2}{2}$$

となる。従って、その場所の応力は $\rho \omega^2 (I^2 - x^2)/2$ となる。その場所の dx の長さの部分の伸び $d\lambda$ はフックの法則より

$$d\lambda = \frac{\rho \omega^2 (I^2 - x^2)}{2E} dx \text{ となる。全体の伸び } \lambda \text{ は } \lambda = \int \frac{\rho \omega^2 (I^2 - x^2)}{2E} dx = \frac{\rho \omega^2}{3E} I^3$$

となる。

問題 10.6-4

ポアソンの定義式 (10.5) より $\Delta r = -(\Delta L/L)\nu r$ ，よって中空部の容積は、変形前の中空体積 V が $\pi r^2 L$ であるから、

$$\begin{aligned} (L + \Delta L)\pi(r + \Delta r)^2 &= (L + \Delta L)\pi\left(r - \nu \frac{\Delta L}{L} r\right)^2 = L\pi r^2 \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) \left(1 - \nu \frac{\Delta L}{L}\right)^2 \\ &= L\pi r^2 \left(1 + \frac{\Delta L}{L} - 2\nu \frac{\Delta L}{L} + \dots\right) \end{aligned}$$

となり、容積の増加は $\Delta V \approx L\pi r^2 \left(\frac{\Delta L}{L} - 2\nu \frac{\Delta L}{L}\right) = \pi r^2 \Delta L (1 - 2\nu)$ となる。

この式を ν について解くと $\nu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta V}{\pi r^2 \Delta L}\right)$ を得る。

問題 10.6-5 (10.6-S1)

例題 10.6-2 から銅線を鉛直に下げたとき自重による全体の伸び λ は、

$$\lambda = \frac{\rho g L^2}{2E} = \frac{8.9 \times 10^3 \times 9.8 \times (100)^2}{2 \times 117 \times 10^9} = 0.0037 \text{ m} = 3.7 \text{ mm}$$

補足として銅線の破断の可能性を調べる。銅線の上端で応力は最大値 $\sigma_{\max}$ となる。最大応力をもとめる計算途中では断面積 S と自重 M を有効数字 3 桁でもとめて

$$S = 3.14 \times 0.0006^2 = 1.130 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \quad M = \rho L S = 1.006 \text{ kg}$$

となる。最大応力の結果を有効数字 2 桁で示すと

$$\sigma_{\max} = \frac{Mg}{S} = \frac{1.006 \times 9.8}{1.130 \times 10^{-6}} = 8.7 \text{ MPa}$$

となる。この値は破断強度 195 MPa より小さいので破断しない。銅線下端に 23 kg の重

りをつけると破断することになる。

問題 10.7-1

解説) 基本式から片持ち梁のたわみ量をもとめる式や長方形断面の棒の慣性モーメントの導出はすでに示しているのでそれをもとに考える。ただしそれらの式を暗記することまでは要求しない。その意味でこの問題の目的は式(1.27)で実際の例では値がどうなるかを計算することにある。

解) 式(10.27)に上記数値を代入して計算すれば次のようになる。

$$y = \frac{6Mg}{a^3bE} \left(l - \frac{x}{3} \right) x^2$$

片持ち梁のたわみの式(1.27)より

端部なので $l = x$ であるから、端部の下がり y は

$$y = \frac{6Mg}{a^3bE} \left(\frac{2}{3} \right) l^3 = \frac{4Mg}{a^3bE} l^3 \quad \text{より} \quad y = \frac{4 \times 100 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{(0.1 \text{ m})^4 \times 10^{11} \text{ Pa}} \times 1 \text{ m} = 0.39 \text{ mm}$$

問題 10.7-2

解説) この問題では、棒の両端を支え中央部に荷重をかけるので、10.7-1 とはまったく別の解析になると思われるが、考え方を変えれば式(10.27)を応用できることがわかる。

解) 荷重をかけた中央部は構造の対称性から水平になると言える。つまり中央部を水平に固定し、両端を上向きに力を加えた片持ち梁の変形と考えることができる。したがって式(1.27)に梁の長さを $l/2$ 、端に $Mg/2$ の上向き力をかけたときのたわみを計算すれば良い。上記数値を代入して計算すれば次のようになる。

$$y = \frac{3Mg}{a^3bE} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) x^2$$

これに $x = l/2$ を代入して、

$$y = \frac{Mg}{4a^3bE} l^3 = \frac{30 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{4 \times (3 \times 10^{-2} \text{ m})^3 \times (30 \times 10^{-2} \text{ m}) \times (100 \times 10^9 \text{ Pa})} \times (4 \text{ m})^3$$
$$= 5.8 \times 10^{-3} \text{ m} = 5.8 \text{ mm}$$

問題 10.7-3 (10.7-S1) 直方体棒の曲げにくさ

教科書の図 10.16 の梁の長方形断面の長さ a, b が $a > b$ とすると、梁の x 位置の y 方向たわみ (変位) が教科書の式(10.27)であるから、 $x = l$ を代入すると

$$(1) \text{ の場合 } d_1 = \frac{4Mgl^3}{a^3bE}, \quad (2) \text{ の場合 } d_2 = \frac{4Mgl^3}{ab^3E} \quad \text{となるから } d_1 / d_2 = b^2 / a^2 \text{ となる。}$$

よって(1)のほうがずっとたわみが小さい。

問題 10.7-4 【発展】 (10.7-S2 (発展)) 直方体棒のたわみの中立層

教科書の図 10.20 の梁の右側の BA 片に作用する水平方向の力のつり合いを調べる。

(1) 図(c)における座標 r における伸びひずみ $\epsilon(r)$ は円弧の長 $s'(r)$ さの変形前は図(b)より s であることから

$$\epsilon(r) - \epsilon(0) = \frac{s'(r) - s}{s} - \frac{s'(0) - s}{s} = \frac{s'(r) - s'(0)}{s}$$

となる。ここで $|\epsilon(r)| \ll 1$ を仮定した意味は梁内の r 方向どこでも $|\epsilon(r)| \ll 1$ を使える。

$s'(0) = s + \delta$, ($|\delta| \ll s$)を用いると

$$\epsilon(r) - \epsilon(0) = \frac{s'(r) - s'(0)}{s} = \frac{s'(r) - s'(0)}{s'(0) - \delta} = \frac{s'(r) - s'(0)}{s'(0)(1 - \delta/s'(0))} \approx \frac{r}{R}(1 + \delta/s'(0))$$

$$\therefore s'(r) - s'(0) = \frac{R+r}{R}s'(0) - s'(0) = \frac{r}{R}s'(0)$$

ここで r/R が 1 次微小量であるから, $r\delta/Rs'(0)$ は 2 次微小量となり, 1 次近似では $\epsilon(r) - \epsilon(0) = r/R$ となる。問題文で $(r/R) \ll 1$ を記載したほうが良い。

(2) 梁片 BA に作用する外力は A 端のおもりによる荷重だけで水平成分は 0 である。したがって B 面を介して BA に加わる水平力は 0 でなければならない。梁の水平方向伸び歪み $\epsilon(r) - \epsilon(0) = r/R$ という r に関する線形関係が成り立つから, 面 B の r における引張応力 $\sigma(r) = E\epsilon(r)$ の関係から面 B の $0 \leq r \leq a/2$ で $\sigma(r)$ を面積積分すると

$$E \left[\frac{a/4}{R} + \epsilon(0) \right] ab/2 \quad \text{であり, } -a/2 \leq r \leq 0 \text{ での面積積分は } E \left[\frac{-a/4}{R} + \epsilon(0) \right] ab/2$$

となる。これらの和が B 面を介して BA に加わる水平力 $E\epsilon(0)ab$ であり, これが 0 となる条件は $\epsilon(0) = 0$ である。したがってここが中立層になる。

問題 10.8-1

ねじりモーメント N は, 式(10.33)と式(10.36)より

$$N = \frac{\pi d^4}{32} \frac{G}{l} \theta \quad \text{これより} \quad \theta = \frac{32 \times 2 \times 10^3 \times 200}{3.14 \times 2^4 \times 8 \times 10^5} = 0.318 \text{ rad}$$

となる。1 rad が 57.3° であるから, 求める答えは 18.2° 。

註) ラジアンは rad, 角度の度は $^\circ$, 分は $'$, 秒は $''$ と表記するが, ここで書いたような小数表記で良い。 $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

問題 10.8-2 (10.8-S1) from Cavendish

式(10.37)の金属線をねじるトルクが $N = k\theta$ である。

$$(a) k = \pi d^4 G / (32L) = 7.9 \times 10^{-5}$$

このトルクが球に作用する力 F によるトルクとつりあうから

$$(b) 2RF = k\theta$$

$$\theta = 1^\circ = 1.745 \times 10^{-2} \text{ rad とする力は}$$

$$(c) 6.9 \times 10^{-7} \text{ N 重力の } 9.6 \times 10^{-8} \text{ 倍}$$

この系が単振動する運動方程式は、

$$2mR^2 d^2\theta / dt^2 = -k\theta, \quad \theta = \theta_0 \sin \omega t \quad \therefore \omega = \sqrt{k / 2m} / R \quad (d) \text{ 周期 } T = 2\pi / \omega = 8.5 \times 10^2 \text{ s}$$

問題 10.8-3 【発展】 (10.8.S2 (発展)) Cavendish

$$(1) G_m = \frac{4\pi^2 R\theta(r_0 - R\theta)^2}{MT^2}, \quad (2) G_m = 6.7 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad (3) M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

直径 d , 長さ L , 剛性率 G の金属線の上端を天井に固定し, 下端には長さ $2R$ 剛体棒の中心に接続し水平に吊り下げる. 剛体棒の両端に質量 m の小球を付けている. 金属線の上向き中心軸を z 軸とする. 水平な剛体棒がつり合って静止した状態から z 軸周り小さな角度 θ 回転させて静止させてからの単振動を考える.

F を大球と小球のつり合った位置での万有引力とする. 前問の $2RF = k\theta$ より,

$$\text{前問の } 2RF = k\theta \text{ より, } F = \frac{G_m m M}{(r_0 - \delta)^2} = \frac{k\theta}{2R} \text{ より}$$

$$G_m = \frac{k\theta(r_0 - R\theta)^2}{2mRM} = \frac{4\pi^2 R\theta(r_0 - R\theta)^2}{MT^2}$$

$$F = \frac{G_m m M}{(r_0 - \delta)^2} \approx \frac{6.67 \times 10^{-11} m M}{r_0^2} (1 + 2\delta / r_0)$$

$$\frac{m M 6.67 \times 10^{-11}}{r^2} (1 + 2\delta / r) = \frac{0.73 \times 158 \times 6.67 \times 10^{-11}}{0.225^2} (1 + 2\delta / 0.225) \\ = 1.52 \times 10^{-7} (1 + 2\delta / 0.225)$$

$$\theta = \delta / R \text{ を代入する. } 2RF = \frac{\pi d^4 G}{32L} \frac{\delta}{R} \text{ より } F = \frac{\pi d^4 G}{64LR^2} \delta$$

(1) このこの金属線を z 軸まわりに角度 θ 回転させるために必要なトルク N は $N = k\theta$ である. 教科書の式(10.36)から $k = \pi d^4 G / (32L)$ であるが, ここでは k を用いる. 先端に小球のついた剛体棒の z 軸まわりの慣性モーメント I は $I = 2mR^2$ で

$$\text{ある. したがって運動方程式は } 2mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \text{ となる. よって角度 } \theta \text{ の単振動の}$$

解を角振動数 ω を用いて $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ と仮定して代入すると次となる.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2mR^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi R \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

周期 T は となる。

補足：実際に銅線の剛性率を用いると $k = \pi d^4 G / (32L)$ より周期が次の値になる。

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi R \sqrt{\frac{2m}{k}} = \frac{16\pi R}{d^2} \sqrt{\frac{mL}{\pi G}} = \frac{16 \times 3.14 \times 1}{(3.7 \times 10^{-4})^2} \sqrt{\frac{0.73 \times 1}{\pi \times 4.3 \times 10^{10}}} = 850 \text{ s}$$

(1) 大球中心からの距離がつり合ったときに $(r - \delta)$ であるから万有引力が

$F = G_m m M / (r - \delta)^2$ となる。 $\theta = \delta R$ であるから (a) より

$$F = \frac{k\theta}{2R} = \frac{\pi d^4 G}{32L \cdot 2R} \theta = \frac{\pi d^4 G}{64LR^2} \delta, \quad T = \frac{16\pi R}{d^2} \sqrt{\frac{mL}{\pi G}} \quad \text{であるから} \quad \frac{\pi G}{L} = m \left(\frac{16\pi R}{d^2 T} \right)^2$$

$$F = \frac{G_m m M}{(r - \delta)^2} = \frac{\pi d^4 G}{64LR^2} \delta = \frac{d^4 m}{64R^2} \left(\frac{16\pi R}{d^2 T} \right)^2 \delta = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \delta$$

$$\therefore G_m = \frac{4\pi^2}{MT^2} \delta (r - \delta)^2$$

(2) これに数値を入れると $G_m = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2 \text{ (kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2})$ となる。

$$(3) \quad g = \frac{G_m M_E}{(6.37 \times 10^6)^2} \rightarrow M_E = 9.8 \times (6.37 \times 10^6)^2 / (6.7 \times 10^{-11}) = 5.9 \times 10^{24} \text{ kg}$$

問題 10.9-1

解説) 練習問題 1.3 [2] と同じく、式(1.27)の使用は問題で指示されたものとする。

解) 式(10.27)より、 Mg なる力がかかったときの $x = l$ におけるたわみによる変位 h は、 $h = 4Mgl^3 / (a^3 b E)$ である。これより、 $F = a^3 b E h / (4l^3)$ 。右端の下がり方が 0 から h になるまでの間になされた仕事 W がこの棒に蓄えられる弾性エネルギーである。よって

$$W = \int_0^h F dh' = \frac{Eba^3}{4l^3} \int_0^h h' dh' = \frac{Eba^3}{8l^3} h^2 \quad \text{となる。}$$

問題 10.9-2

図 10.20 を角柱として考えると、体積 $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ である。面積 $\Delta x \Delta z$ の角柱上面にせん断力 F を作用させて、 θ' なるせん断ひずみを与えると、 $F = G \Delta x \Delta z \theta'$ となる。角柱の厚さは Δy なので、さらに $d\theta'$ だけひずみを与える時の F の作用点の移動はほぼ $\Delta y d\theta'$ であるから、その時の仕事は $F \Delta y d\theta'$ である。従って、角柱に蓄えられるエネルギーとなる角度を 0 から θ までずらすときの仕事 W は

$$W = \int_0^\theta F \Delta y d\theta' = \int_0^\theta G \Delta x \Delta z \theta' \Delta y d\theta' = \frac{1}{2} G \Delta x \Delta y \Delta z \theta^2 = \frac{1}{2} G \theta^2 V \quad \text{となる。}$$

問題 10.9-3 (10.9-S1)

水面と水深 5000 m での水圧差 p_1 は $p_1 = 5000 \text{ m} \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/sec}^2 = 49 \text{ MPa}$ である。問題 10.6-3 では金属球の体積弾性率 K を $1.3 \times 10^{11} \text{ Pa}$ を用いて半径 a_0 が 5 cm から $a' = 6.28 \times 10^{-4} \text{ cm}$ 縮むことを調べたが、ここではステンレス球を対象として $K = 1.66 \times 10^{11} \text{ Pa}$ を用いる。

(1) 海上での球の半径を R_0 , 海底での半径を R_1 とする。海上での体積を V_0 , 半径が

$r = R_0 - x$ ($0 \leq x \leq R_0 - R_1$) のときの球の体積を $V_0 + \Delta V$ として $\Delta V/V_0$ を R_0 と x

で表す。 $x \ll R_0$ として 1 次近似で求める。

フックの法則の式(10.11)から金属球に作用する圧縮応力 σ は $\sigma = -K\Delta V/V_0$ となる。

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\frac{4\pi}{3}(r^3 - R_0^3) = -\frac{4\pi}{3}[(R_0 - x)^3 - R_0^3] \\ &\approx -V_0[(1 - 3x/R_0) - 1] \\ \therefore \frac{\Delta V}{V_0} &= \frac{3x}{R_0}\end{aligned}$$

(1) 水深 h における圧力は $p = p_0 + \rho gh$ であるから

$$\begin{aligned}\sigma &= \rho gh = \frac{3x}{R_0}K \\ \therefore x &= \frac{\rho gh R_0}{3K} = \frac{1020 \times 9.8 \times 5000 \times 0.05}{3 \times 1.66 \times 10^{11}} = 5.0 \times 10^{-6} \text{ m} = 5.0 \text{ } \mu\text{m}\end{aligned}$$

(2) σ は外部応力と大きさは等しく逆向きである。この問題は外部圧力 p が圧縮応力であるからステンレス球の水深 5000 m で体積減少量を ΔV (>0) とする。内部応力は外向きである。水面でのステンレス球の体積を V_0 として外部圧力 p を用いれば、式(10.11)と逆符号で

$$p = K \frac{\Delta V}{V_0}$$

が成り立つ。 ΔV (>0) 弾性エネルギー W は外圧が圧縮した仕事に等しいから。海上と 5000m 深海での圧力差を p_1 とすると

$$\begin{aligned}W &= \frac{K}{V_0} \int_0^{\Delta V} V' dV' = \frac{K}{2V_0} \Delta V^2 = \frac{K}{2V_0} \left(\frac{p_1 V_0}{K} \right)^2 = \frac{V_0}{2K} p_1^2 \\ &= \frac{4 \times 3.14 \times 0.05^3}{6 \times 1.66 \times 10^{11}} (4.9 \times 10^7)^2 = 3.8 \text{ J}\end{aligned}$$