

第Ⅱ部 練習問題の解答例

<問題に解答するにあたって>

解答はメモではありません。自分が問題をどのように捉え、どのように思考したのかを表わすものです。普段から面倒臭がらずに書きましょう。その過程で頭の中も整理されて理解も深まります。

解答の仕方：

- ①はじめに問題文中に現れる用語の定義式を書く。
- ②法則を用いるときは法則名を書く。
- ③自分で新たに導入する文字についてはその定義を書く。
- ④定義式中の量（文字）に問題で与えられた値を代入するときは必ず単位とともに書く。
- ⑤数値を求める問題では、問題文で有効数字の桁数を明示してあるならば、乗除算に入る数値の最小桁数が有効桁数となる。
もしも、問題文で例えば 1.0 m とせず 1 m と有効数字の 0 を非表示の場合は、とりあえず他の数値の有効桁数で解答する。

*テキスト巻頭の「物理学で学ぶことと物理学の学び方」を読み返し、物理的思考プロセスを学ぶことを意識しましょう。

練習問題 1.1

- [1] 一樣な断面積 S 長さ L のワイヤに引張り力 F を加えたとき引張応力 σ は $\sigma = \frac{F}{S}$ ，伸びが ΔL のとき

の伸びひずみ ε は $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ で与えられ、ヤング率 E はフックの法則より $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ で与えられる。よって

次のように求められる。

- (1) 引張応力

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{102 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{0.1 \text{ cm}^2} = \frac{102 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{0.1(10^{-2} \text{ m})^2} = 100 \times 10^6 \text{ kg/ms}^2 = 100 \text{ MPa}$$

- (2) 伸びひずみ

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.22 \text{ cm}}{2 \text{ m}} = \frac{0.22 \times 10^{-2} \text{ m}}{2 \text{ m}} = 1.1 \times 10^{-3} = 0.11\%$$

- (3) ヤング率

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{100 \text{ MPa}}{1.1 \times 10^{-3}} = 91 \text{ GPa}$$

- [2] 一樣な断面積 S 長さ L の棒に引張り力 F を加えたとき引張応力 σ は $\sigma = \frac{F}{S}$ ，伸びが ΔL のときの伸

びひずみ ε は $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ である。ヤング率 E はフックの法則より $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ で与えられる。よって ε と ΔL

は次のように求められる。

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{275 \times 10^6 \text{ Pa}}{110 \times 10^9 \text{ Pa}} = 2.50 \times 10^{-3}$$

$$\therefore \Delta L = 2.50 \times 10^{-3} \times 300 \text{ mm} = 2.50 \times 10^{-3} \times 0.3 \text{ m} = 7.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.75 \text{ mm}$$

註) 問題文に弾性率と書いてあるが題意よりこれは引張り弾性を意味しているので解答ではヤング率と記した。

- [3] 一樣な断面積 S 長さ L の棒に引張り力 F を加えたとき引張応力 σ は $\sigma = \frac{F}{S}$ ，伸びが ΔL のときの伸

びひずみ ε は $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ と与えられる。ヤング率 E はフックの法則より $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ ，ポアソン比 ν は

$\nu = -\left(\frac{\Delta d}{d}\right) \bigg/ \left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ で与えられる。

$$\nu = -\left(\frac{\Delta d}{d}\right) \bigg/ \left(\frac{\Delta L}{L}\right) = -\left(\frac{-2.5 \times 10^{-3} \text{ mm}}{10 \text{ mm}}\right) \bigg/ \varepsilon = \frac{2.5 \times 10^{-4}}{\varepsilon} = 0.34$$

$$\therefore \varepsilon = 7.35 \times 10^{-4}$$

よって引張荷重 F は次のように求められる。

$$F = \sigma S = \varepsilon ES = 7.35 \times 10^{-4} \times 97 \text{ GPa} \times 3.14 \times (5 \text{ mm})^2 \\ = 7.35 \times 10^{-4} \times 97 \times 10^9 \text{ Pa} \times 3.14 \times 25 \times (10^{-3} \text{ m})^2 = 5.6 \times 10^3 \text{ N} = 5.6 \text{ kN}$$

- [4] セン断応力 τ とずれひずみ γ とずれ弾性率 G の関係はフックの法則より $\tau = G\gamma$ ， $\gamma = \Delta a/a = \tan \theta$ が成り立つ。面積 S の面に平行にかかるずれの力を F とすれば、ずれ応力 τ は $\tau = F/S$ と書けるから、それぞれ次のように求まる。

- (1) ずれの角 θ は $\gamma = \tan \theta = \Delta a/a$ から決まる。 $\Delta a/a = 1/30$ と 1 よりずっと小さいので近似的に

$$\theta \approx \tan \theta = \Delta a/a = 1/30 \text{ rad} = 0.0333 \text{ rad} (= 1.9^\circ) \text{ となる。} \quad (2 \pi \text{ rad} = 360 \text{ deg.})$$

* もう一桁下まで見てみると $\tan \theta = 0.03333$ ， $\theta = 0.03332$ なので

$|\theta| \ll 1$ では $\theta \sim \tan \theta$ であることが確認できる

- (2) セン断応力は $\tau = \frac{0.1 \text{ kgf}}{a^2} = \frac{0.1 \times 9.8 \text{ N}}{(0.3 \text{ m})^2} = \frac{0.98 \text{ N}}{0.09 \text{ m}^2} = 10.9 \text{ Pa}$ となる。

- (3) ゼラチンのずれ弾性率は $G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{10.9 \text{ Pa}}{1/30} = 327 \text{ Pa}$ と求められる。

- [5] 引張応力 σ と伸びひずみ ε ($\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$) とヤング率 E の関係はフックの法則より $\sigma = E\varepsilon$ であり、ポ

アソン比 ν は $\nu = -\left(\frac{\Delta d}{d}\right) \bigg/ \left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ で与えられる。

断面積 S ($\pi d^2/4$) 長さ L の丸棒を考える。この体積 V は $V = SL$ である。引張り応力を加えて丸棒が ΔL 伸びたとき直径が Δd 増加しても体積は変わらないのであるから、

$$\frac{\pi}{4}(d+\Delta d)^2(L+\Delta L)=\frac{\pi}{4}d^2L$$

$$\text{左辺}=\frac{\pi}{4}d^2L(1+\frac{\Delta d}{d})^2(1+\frac{\Delta L}{L})$$

$$\therefore (1+\frac{\Delta d}{d})^2(1+\frac{\Delta L}{L})=1$$

2 次の微小量を無視すれば $\frac{2\Delta d}{d}+\frac{\Delta L}{L}=0$ となるから、 $\frac{\Delta d}{d}=-\frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L}$ を得る。これをポアソン比の式

に代入すれば、 $\nu=-\left(\frac{\Delta d}{d}\right)/\left(\frac{\Delta L}{L}\right)=0.5$ となる。

[6] ポアソン比の定義式は $\nu=-\left(\frac{\Delta d}{d}\right)/\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ である。前問のように体積変化のない物体のポアソン比

は 0.5 であるから、ポアソン比が 0.5 より小さい物体では伸びひずみを与えても伸びに垂直な方向の寸法のひずみは伸びひずみの半分より小さいので細くならない。つまり体積は増加することになる。ポアソン比が 0 であれば、物体の体積の増加率は伸びひずみに等しくなる。それは物体の密度が伸びひずみに反比例して減少することを意味する。

解説：ここではポアソン比の定義式を示すことが 1 つ目のポイント。そしてポアソン比の式中に現れる、引張り力に垂直方向の物体のひずみがどうなるか示すのが 2 つ目のポイントである。この問題ならここまでで良いが、できれば物理的思考として、どのような物体の性質（ここでは密度）のときにポアソン比 0 となるか考えてみてほしい。

練習問題 1.2

[1] 天井に固定した長さ L の棒の上端から下向きに x 軸をとり、上端を 0 として座標 x のところの棒の断面積を $S(x)$ とする。棒の下端の断面積を S_0 とする。

棒の下端から x までの部分の体積は $V=\int_x^L S(x)dx$ である。

上端から x の距離の断面にかかる応力 $\sigma(x)$ は

$$\sigma(x)=\frac{Mg+\rho g\int_x^L S(x)dx}{S(x)}$$

となる。 x によらずこの応力が σ_0 で一定とすると、

$$S(x)\sigma_0=Mg+\rho g\int_x^L S(x)dx$$

となる。ここで両辺を x で微分すると $\sigma_0\frac{dS(x)}{dx}=-\rho gS(x)$ となる。 $x=L$ で $S=S_0$ であることを

用いてこれを解くと、 $S(x)=S_0\exp[\frac{\rho g(L-x)}{\sigma_0}]$ となる。

下端を考えると $\sigma_0=Mg/S_0$ なので、 $S(x)=S_0\exp[\frac{\rho S_0(L-x)}{M}]$ を得る。

したがって、天井に固定した上端の断面積に対して、上端から離れるにつれて指数関数的に断面積が

減少する、下端に近づくにつれて細くなる棒状物体である。

[2]

(1) 下端の円錐の頂点から x の距離にある水平面での切り口の断面積を S とし、その厚さ dx の部分を考える。これより下の円錐部分の体積は $Sx/3$ である。この部分の重さは $\rho gSx/3$ であるので、考えている厚さ dx の部分に作用する応力は $\rho gx/3$ である。この厚さ dx の板の部分の伸び $d\lambda$ は $d\lambda=\frac{\rho gx}{3E}dx$ となり、全体の伸び λ は $\lambda=\int_0^l\frac{\rho gx}{3E}dx=\frac{\rho g}{6E}l^2$ となる。

(2) 回転中心 O から x のところの長さ dx の部分に働く遠心力は $(\rho Sdx)x\omega^2$ である。 O から距離 x の部分が、それより先の部分に作用する遠心力によって引かれる力は $\int_x^l(\rho Sdx)x\omega^2=\rho S\omega^2\frac{l^2-x^2}{2}$ とな

る。従って、その場所の応力は $\rho\omega^2\frac{l^2-x^2}{2}$ となる。その場所の dx の長さの部分の伸び $d\lambda$ はフックの

法則より $d\lambda=\frac{\rho\omega^2(l^2-x^2)}{2E}dx$ となる。全体の伸び λ は $\lambda=\int_0^l\frac{\rho\omega^2(l^2-x^2)}{2E}dx=\frac{\rho\omega^2}{3E}l^3$ となる。

[3] 海水の密度を 1 g/cm^3 とし、深さによる密度変化を無視するとし、水深 5000 m での水圧 p は $p=5000\text{ m}\times 1000\text{ kg/m}^3\times 9.8\text{ m/sec}^2=49\text{ MPa}$ となる。

半径 r の球の体積は $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ より r が Δr だけ縮む時の体積は次のようになる。

$$V-\Delta V=\frac{4}{3}\pi(r-\Delta r)^3\approx\frac{4}{3}\pi r^3(1-3\frac{\Delta r}{r})\quad (\text{テイラー展開の1次の項まで利用})$$

よって、体積ひずみは $-\frac{\Delta V}{V}=-\frac{3\Delta r}{r}$ となる。体積弾性率の定義式は、 ΔV と Δr は増分ではなく減少分

を正にとっているので次のようになる。

$$p=K\frac{\Delta V}{V}=3K\frac{\Delta r}{r},\quad \therefore\Delta r=\frac{p}{3K}r$$

よって、 $\Delta r=pr/3K=(49\text{ MPa}\times 5\text{ cm})/(3\times 1.3\times 10^{11}\text{ N/m}^2)=6.28\times 10^{-4}\text{ cm}$

[4] $\nu=-\frac{\Delta r/r}{\Delta L/L}$ より $\Delta r=-\frac{\Delta L}{L}\nu r$ 、よって中空部の容積は、変形前の体積 V が πr^2L であるから、

$$\begin{aligned}(L+\Delta L)\pi(r+\Delta r)^2&=(L+\Delta L)\pi(r-\nu\frac{\Delta L}{L}r)^2=L\pi r^2(1+\frac{\Delta L}{L})(1-\nu\frac{\Delta L}{L})^2\\&=L\pi r^2(1+\frac{\Delta L}{L}-2\nu\frac{\Delta L}{L}+\dots\dots\dots)\end{aligned}$$

となり、容積の増加は $\Delta V\approx L\pi r^2(\frac{\Delta L}{L}-2\nu\frac{\Delta L}{L})=\pi r^2\Delta L(1-2\nu)$ となる。

この式を v について解くと $v = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta V}{\pi r^2 \Delta L} \right)$ を得る。

練習問題 1.3

[1] ねじりモーメント N は、式(1.36)より $N = \frac{\pi d^4}{32} \frac{G}{l} \theta$ 。よって、

$$\theta = \frac{32 \times 2 \times 10^3 \times 200}{3.14 \times 2^4 \times 8 \times 10^5} = 0.318 \text{ rad}$$

となる。1 rad が 57.3° であるから、求める答えは 18.2° 。

註) ラジアンは rad, 角度の度は $^\circ$, 分は $'$, 秒は $''$ と表記するが、ここで書いたような小数表記で良い。 $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

[2] 解説) 基本式から片持ち梁のたわみ量をもとめる式や長方形断面の棒の慣性モーメントの導出はすでに示しているのでそれをもとに考える。ただしそれらの式を暗記することまでは要求しない。その意味でこの問題の目的は式(1.27)で実際の例では値がどうなるかを計算することにある。

解) 式(1.27)に上記数値を代入して計算すれば次のようになる。

$$\text{片持ち梁のたわみの式(1.27)より } y = \frac{6Mg}{a^3bE} \left(l - \frac{x}{3} \right) x^2.$$

端部なので $l = x$ であるから、端部の下がり y は

$$y = \frac{6Mg}{a^3bE} \left(\frac{2}{3} \right) l^3 = \frac{4Mg}{a^3bE} l \quad \text{より } y = \frac{4 \times 100 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{(0.1 \text{ m})^4 \times 10^{11} \text{ Pa}} \times 1 \text{ m} = 0.4 \text{ mm}$$

[3] 解説) この問題では、棒の両端を支え中央部に荷重をかけるので、[2]とはまったく別の解析になると思われるが、考え方を変えれば式(1.27)を応用できることがわかる。

解) 荷重をかけた中央部は構造の対称性から水平になると言える。つまり中央部を水平に固定し、両端を上向きに力を加えた片持ち梁の変形と考えることができる。したがって式(1.27)に梁の長さを $l/2$ 、端に $Mg/2$ の上向き力をかけたときのたわみを計算すれば良い。上記数値を代入して計算すれば次のようになる。

$$y = \frac{3Mg}{a^3bE} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) x^2, \quad x = l/2 \text{ を代入して、}$$

$$y = \frac{Mg}{4a^3bE} l^3 = \frac{30 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{4 \times (3 \times 10^{-2} \text{ m})^3 \times (30 \times 10^{-2} \text{ m}) \times (100 \times 10^9 \text{ Pa})} \times (4 \text{ m})^3 \\ = 5.8 \times 10^{-3} \text{ m} = 5.8 \text{ mm}$$

練習問題 1.4

[1] 解説) 練習問題 1.3 [2]と同じく、式(1.27)の使用は問題で指示されたものとする。

解) 式(1.27)より、 Mg なる力がかかったときの $x=l$ におけるたわみによる変位 h は、 $h = \frac{4Mg}{a^3bE} l^3$ で

ある。これより、 $F = \frac{a^3bE}{4l^3} h$ 。右端の下がり h が 0 から h になるまでの間になされた仕事 W がこの

棒に蓄えられる弾性エネルギーである。よって $W = \int_0^h F dh' = \frac{Eba^3}{4l^3} \int_0^h h' dh' = \frac{Eba^3}{8l^3} h^2$ となる。

[2] 図 1.20 を角柱として考えると、体積 $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ である。面積 $\Delta x \Delta z$ の角柱上面にせん断力 F を作用させて、 θ' なるせん断ひずみを与えると、 $F = G \Delta x \Delta z \theta'$ となる。角柱の厚さは Δy なので、さらに $d\theta'$ だけひずみを与える時の F の作用点の移動はほぼ $\Delta y d\theta'$ であるから、その時の仕事は $F \Delta y d\theta'$ である。従って、角度を 0 から θ までずらすときの仕事 W は

$$W = \int_0^\theta F \Delta y d\theta' = \int_0^\theta G \Delta x \Delta z \theta' \Delta y d\theta' = \frac{1}{2} G \Delta x \Delta y \Delta z \theta^2 = \frac{1}{2} G \theta^2 V \text{ となる。}$$

これが角柱に蓄えられるエネルギーである。

練習問題 2.1

解) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて左辺を書き換えれば、

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + i \{ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi \}$$

となる。一方、右辺は次のようになる。

$$e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi) \\ = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + i \{ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi \}$$

したがって $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ となる。

練習問題 2.2

解説) ロープを伝わる横波の仕事率の式(2.93) $I = \rho_w v \omega^2 a^2 / 2$ を導くにあたり、弦の横波の波動方程式に基づき、張力を指定した上で無限の長さのロープを想定している。長さが有限の場合は末端で波の反射等の条件を指定しなければならないが、ここでは波の反射に関する情報が与えられていないので、ロープは十分に長いものとして反射は考えない。角振動数を変える場合はロープの一端に置く振動源の振動数を変えることで可能である。波の位相速度と角振動数と波長や波数の間には相互に関係式があるので、すべて独立に変えることはできない。張力が一定であれば位相速度 v が一定となるから波長は角振動数に逆比例することになる。さらに、弦の横波の波動方程式の導出においては振幅が小さいという制約が入っていたことに留意すべきである。なぜなら振幅がとて大きい場合は弦の伸びが大きくなり張力が高くなるからである。この問題では、波動方程式が成り立つ微小振幅の条件を満たす範囲で解答することになる。ここでは、波の仕事率の式(2.93) $I = \rho_w v \omega^2 a^2 / 2$ の暗記を要求するわけではなく、本節ですでに導出されたものとして解答する。

[1] ロープを伝わる横波の仕事率は教科書の式(2.93) $I = \rho_w v \omega^2 a^2 / 2$ となる。ここで、 ω は角振動数、 v

は波の位相速度、 a は波の振幅、 ρ_w はロープの線密度である。張力を T とすると $v = \sqrt{T/\rho_w}$ となり

張力のみに依存する。

- (1) ロープを伝わる波の仕事率の式中にロープの長さは入らないので、ロープ長が2倍になっても角振動数 ω が一定なら波の仕事率は変わらない。
- (2) 波の仕事率の式は波の振幅と角振動数の積 ωa の2乗に比例するので、振幅を2倍にして角振動数を半分にした時の波の仕事率は変わらない。
- (3) $\omega = vk = 2\pi v / \lambda$ (λ は波長)であるから、波の仕事率の式は a / λ の2乗に比例するので、波長と振幅を共に2倍にしたとき波の仕事率は変わらない。
- (4) (1)で述べたように波の仕事率の式中にロープの長さは入らないが、波長を半分にすれば(3)で述べたように波の仕事率は λ の2乗に逆比例するので他の量 (T, a, v) を変化させなければ、波の仕事率は4倍となる。

[2] 弦の振動の波動関数が $y = 0.25 \sin(0.4x - 25t)$ であるから、式(2.93) $I = \rho_w v \omega^2 a^2 / 2$ において $a = 0.25 \text{ m}$ 、波数 $k = 0.4 \text{ m}^{-1}$ 、 $\omega = 25 \text{ rad/s}$ となる。波長を λ 、振動数を f とすると次のようになる。(1) $v = \omega / k = 62.5 \text{ m/s}$ 、(2) $\lambda = 2\pi / k = 15.7 \text{ m}$ 、(3) $f = \omega / 2\pi = 3.98 \text{ Hz}$ 、(4) $I = \rho_w v \omega^2 a^2 / 2 = 24.4 \text{ W}$ 。

練習問題 2.3

位相速度： $v_p = \omega / k = Ak^{-1/2}$ ，群速度： $v_g = d\omega / dk = (A/2) k^{-1/2}$

練習問題 2.4

[1] 弦の長さを l 、線密度を ρ_w とする。おもりを下げたり、引っ張ったりして、弦を張る(張力を T とおく)とき、弦を伝播する横波の速度 v は

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_w}} \quad \text{——①}$$

で与えられる。基本振動の波長 λ は、

$$\lambda = 2l \quad \text{——②}$$

であり、基本振動の振動数を f とすると、

$$v = \lambda f \quad \text{——③}$$

が成り立つ。よって①～③式より、基本振動の振動数は次式で得られる。

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho_w}}$$

$$(1) f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho_w}} = \frac{1}{2\text{ m}} \sqrt{\frac{40 \times 9.8 \text{ N}}{60 \text{ g/cm}}} = \frac{1}{2\text{ m}} \sqrt{\frac{40 \times 9.8 \text{ N}}{0.060 \text{ kg/0.01 m}}} = 4.0 \text{ Hz}$$

$$(2) f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho_w}} = \frac{1}{2 \times 0.5 \text{ m}} \sqrt{\frac{1000 \text{ N}}{50 \text{ g/cm}}} = \frac{1}{2 \times 0.5 \text{ m}} \sqrt{\frac{1000 \text{ N}}{0.050 \text{ kg/0.01 m}}} = 14 \text{ Hz}$$

[2] パイプの長さを l とおくと、片開きの場合の基本音の波長 λ は $\lambda = 4l$ となる。一方、基本音の振動数 f と音速 v の関係は $v = \lambda f$ である。したがって、 $f = v / 4l = (343 \text{ m/s}) / (4 \times 25 \text{ cm}) = 343 \text{ Hz}$ 。

[3] (1)ばねに加える力 F と伸び x との関係は $F = kx$ 。弾性体の棒の場合は、ヤング率を E とすると $F/S = Ex/l_0$ 。これより、 $E = kl_0/S$ を得る。

(2) このばねに等価な弾性体の密度 ρ は $\rho = M/l_0 S$ である。長さを l に引き伸ばしたことにより密度は $\rho' = \rho l_0 / l$ となる。また、このときヤング率は(1)の結果より $E' = kl/S$ となる。波動方程式の E と ρ を E' と ρ' に置き換えると、以下を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E'}{\rho'} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{E'}{\rho'} = \left(\frac{l}{l_0} \right)^2 \frac{E}{\rho}$$

(3) ばねの固有角振動数は(3.121)式より

$$\omega_n = vk_n = \frac{n\pi v}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E'}{\rho'}} = \frac{n\pi}{l} \left(\frac{l}{l_0} \right) \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{n\pi}{l_0} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

となり、引き伸ばしても変化しない。

練習問題 2.5

[1] 2つの波は次のように表せる。

$y_1 = A \sin(\omega t + kx)$ 、 $y_2 = B \sin(\omega t - kx)$ 。この和をとると以下ようになる。

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + kx) + B \sin(\omega t - kx) \\ &= A(\sin \omega t \cos kx + \cos \omega t \sin kx) + B(\sin \omega t \cos kx - \cos \omega t \sin kx) \\ &= (A + B) \cos kx \sin \omega t + (A - B) \sin kx \cos \omega t \\ &= (A + B) \cos kx \sin \omega t + |A - B| \sin kx \sin(\omega t \pm \pi/2) \end{aligned}$$

ここで符号は $A > B$ の時は+、 $A < B$ の時は-をとる。

第一項と第二項は振幅 $A+B$ 、 $A-B$ の定在波である。

この2つの間には位相差 $\pm \pi/2$ があるので、 $(\pi/2)/2\pi = 1/4$ 波長のずれがある。

[2] 2.9.2項の一点でつながれた異なる材質の2種類の弦の場合を、弾性体の棒に置き換えて説明すればよい。よって、張力が両側で等しいことの代わりに応力が等しいことを使う。

入射波、反射波、透過波の振幅をそれぞれ a_1 、 b_1 、 a_2 とおくと、変位は式(2.123)と与えられる。こ

こで、各々の棒における伝播速度 v_i が2.5節のように $v_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}}$ ($i=1,2$) であることを用いると、波

数は $k_i = \frac{\omega}{v_i} = \omega \sqrt{\frac{\rho_i}{E_i}}$ ($i=1,2$) で与えられる。また、各々の棒における応力は、2.5節のように $E_i \frac{\partial u_i}{\partial x}$

($i=1,2$) と表わされる。つなぎ目で変位は連続なので、 $u_1 = u_2$ である。また、つなぎ目で応力が等し

いとする、 $E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$ である。よって、下記を得る。

$$\begin{aligned} a_1 \sin(-\omega t) + b_1 \sin(-\omega t + \delta_1) &= a_2 \sin(-\omega t + \delta_2) \\ E_1 k_1 a_1 \cos(-\omega t) - E_1 k_1 b_1 \cos(-\omega t + \delta_1) &= E_2 k_2 a_2 \cos(-\omega t + \delta_2) \end{aligned}$$

ここで、任意の t でこの式が常に成立するためには $\delta_1 = \delta_2 = 0$ 、かつ

$$a_1 + b_1 = a_2$$

$$E_1 k_1 a_1 - E_1 k_1 b_1 = E_2 k_2 a_2$$

でなければならない。これらより、 $b_1 = \frac{E_1 k_1 - E_2 k_2}{E_1 k_1 + E_2 k_2} a_1$ および $a_2 = \frac{2E_1 k_1}{E_1 k_1 + E_2 k_2} a_1$ でなくてはならない。

よって、反射波と入射波の比および透過波と入射波の比は、次式で表される。

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2E_1 k_1}{E_1 k_1 + E_2 k_2} = \frac{2E_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}}{E_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} + E_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}} = \frac{2\sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}}$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{E_1 k_1 - E_2 k_2}{E_1 k_1 + E_2 k_2} = \frac{E_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} - E_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}}{E_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} + E_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}} = \frac{\sqrt{E_1 \rho_1} - \sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}}$$

練習問題 2.6

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{x}{r^2} \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{x}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

を得る。y, zについても同様に行うと

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$= \left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad \text{を得る。}$$

練習問題 2.7

$$\delta = L\theta_{n+1} - L\theta_n = L(\theta_{n+1} - \theta_n) \cong L(\tan \theta_{n+1} - \tan \theta_n) \cong L(\theta_{n+1} - \theta_n)$$

$$\cong L(\sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n) = L \left(\frac{2\pi(n+1)}{kd} - \frac{2\pi n}{kd} \right) = \frac{2\pi L}{kd} = \frac{\lambda L}{d}$$

練習問題 2.8

y 軸上の点を Q(0,y)，Q から OP に下した垂線の足を H とする。このとき

$$QP \cong OP - OH \cong r - OQ \sin \theta = r - y \sin \theta$$

であるから、Q 近傍の dy 部分を波源とする波が点 P につくる波の振幅は

$$du = A \sin \{k \times QP - \omega t - \phi\} dy = A \sin \{k(r - y \sin \theta) - \omega t - \phi\} dy$$

と与えられる。

練習問題 2.9

$$u = \int du = \int_{-d/2}^{d/2} A \sin \{k(r - y \sin \theta) - \omega t - \phi\} dy = \int_{-d/2}^{d/2} A \sin \{(kr - \omega t - \phi) - ky \sin \theta\} dy$$

$$= A \int_{-d/2}^{d/2} \{\sin(kr - \omega t - \phi) \cos(ky \sin \theta) - \cos(kr - \omega t - \phi) \sin(ky \sin \theta)\} dy$$

$$= A \sin(kr - \omega t - \phi) \int_{-d/2}^{d/2} \cos(ky \sin \theta) dy = A \sin(kr - \omega t - \phi) \left[\frac{\sin(ky \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$= A \sin(kr - \omega t - \phi) \frac{\sin((kd/2) \sin \theta)}{(k/2) \sin \theta} = \frac{Ad \sin((kd/2) \sin \theta)}{(kd/2) \sin \theta} \sin(kr - \omega t - \phi)$$

練習問題 3.1

[1] 上面を押す圧力 P_1 は

$$P_1 = \rho_{\text{water}} g h_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 10 \text{ m} = 9.8 \times 10^4 \text{ Pa} = 98 \text{ kPa}$$

同様に底面を押す圧力 P_2 は $P_2 = \rho_{\text{water}} g h_2 = 118 \text{ kPa}$

立方体の空気中での重さを M ，水中で浮力 F を受けたときの重さを M' とする。

$$F = (P_2 - P_1) a^2 = \rho_{\text{water}} g a^3 \quad \text{であるから，}$$

水中の力は $M'g = Mg - F = \rho_{\text{solid}} g a^3 - \rho_{\text{water}} g a^3 = (\rho_{\text{solid}} - \rho_{\text{water}}) g a^3$ となる。したがって水中での重さは $M' = (\rho_{\text{solid}} - \rho_{\text{water}}) a^3 = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 8 \text{ m}^3 = 7.2 \text{ ton}$

[2] 必要な気球の体積 V をとする。気球に働く有効浮力 F (浮力から自重を差し引いたもの) は、

$$\rho_{\text{He}} / \rho_{\text{air}} = 1/8 \text{ の関係を用いると， } F = (\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}) g V = (7/8) \rho_{\text{air}} g V \quad \text{となる。浮上させるに}$$

は、気球に働く有効浮力 F を物体に働く重力 Mg より大きくする必要である。

$$(7/8) \rho_{\text{air}} g V \geq Mg \rightarrow V \geq (8/7) M / \rho_{\text{air}} = 67 \text{ m}^3$$

[3] (1) 浮かぶための条件は、円錐体とおもりに働く重力が円錐体に働く浮力の最大値より小さいことで

ある。

$$mg + \rho g \pi r^2 h / 3 < \rho_{\text{water}} g \pi r^2 h / 3$$

$$\therefore m < (\rho_{\text{water}} - \rho) \pi r^2 h / 3$$

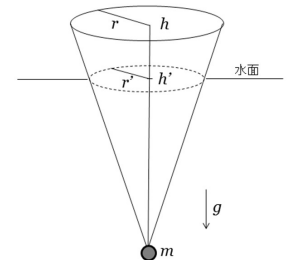
(2) 高さ h' における半径を r' とすると、

$$mg + \rho g \pi r^2 h / 3 = \rho_{\text{water}} g \pi r'^2 h' / 3$$

右辺に $r' = r(h'/h)$ を代入する。

$$mg + \rho g \pi r^2 h / 3 = \rho_{\text{water}} g \pi r^2 h'^3 / (3h^2)$$

$$\therefore h' = \left\{ \frac{1}{\rho_{\text{water}}} \left(\rho + \frac{3m}{\pi r^2 h} \right) \right\}^{1/3} h$$



[4] 空気の $M=2.90 \times 10^{-2}$ kg/mol, $g=9.81$ m/s², $T=273$ K, $R=8.31$ J/mol/K を使って式(3.11)の Mg/RT を求めると, 1.25×10^{-4} m⁻¹ となる. p/p_0 は $h=100$ m で 0.9876, 3000 m で 0.6865 となり, 気圧はそれぞれ 1000 hPa, 695 hPa となる.

練習問題 3.2

固体にかかる重力と浮力との釣り合いにより次式が成り立つ.

$$\rho V g = \rho' (1 - a/100) V g, \quad a \cong 11\%$$

練習問題 3.3

[1] ガラス管壁と水の組合せでは, 濡れが良いため接触角 α は鋭角となるが, ガラスと水銀の組合せでは濡れが悪く接触角 α は鈍角となる. そのためガラス管を水銀液面に鉛直下向きに差し込んだ時, ガラス管内の液面は上に凸となって液側の圧力が気相より高くなるため管内水銀が下向きに押し出され管内液面は元の液面より下がる.

解説: 濡れの良さを決定するのは, 原子レベルの異物質間の接触と同種物質の接触でどちらがより安定 (自由エネルギーの低下) かによる. (自由エネルギーについては別途物理化学で学ぶ.)

[2] 原点から x 軸上 x の位置での両板の間隔 d は $d = 2x \tan \alpha$ である. 前出の式(3.21)の関係が導かれた論理を踏襲して, ここでは隙間 d の平行平板間の液体の表面張力と重力のつりあいを考えればよい. 位置 x における微小幅 Δx の液柱を考える. 液柱の高さ y , 接触角 θ を用いて, この微小幅液柱にかかる重力と表面張力の釣り合いの式は $\rho g y d \Delta x = 2\gamma \cos \theta \Delta x$ となる. これより $y = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g d}$ を得る. ここ

に $d = 2x \tan \alpha$ を代入すれば $xy = \frac{\gamma \cos \theta}{\rho g \tan \alpha} = \text{const.}$ の関係が成り立つ. これより, 液面の形は双曲線になる.

練習問題 3.4

[1] 直径 D のホースを流れる水について流量 Q [m³・s⁻¹] は連続の式 $Q = v(\pi D^2/4)$ で表される. 直径が 2 cm の時は,

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 20 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / 60 \text{ s}}{3.14 \times (2 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 1.06 \text{ m/s} = 106 \text{ cm/s}$$

直径が 1 cm の時は, 2 乗に逆比例だから, 424 cm/s となる.

練習問題 3.5

[1] 断面積が 20 cm² から 10 cm² に絞られた水平におかれた管路を密度一定 ($\rho = 1.6$ g/cm³) の流体が流れるときの大径部 (1) と小径部 (2) の静圧の差 ($\Delta p = p_2 - p_1$) を求めるにはベルヌーイの定理を用いればよい. 水平では重力の影響は考えなくて良いから

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

$$\therefore \Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

の関係が得られる. ここで質量保存則により流速は大径部 (1) と小径部 (2) でそれぞれ次のようになる.

$$v_1 = \frac{Q}{20 \text{ cm}^2} = \frac{30 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / 60 \text{ s}}{20 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0.25 \text{ m/s}, \quad v_2 = 0.5 \text{ m/s}$$

$$\therefore \Delta p = \frac{1.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{2} (0.25^2 - 0.5^2) \text{ m}^2 / \text{s}^2 = -150 \text{ Pa}$$

大径部の圧力は小径部の圧力より 150 Pa 高い.

(注) 流れの方向に座標軸をとる. そのときの差を求める場合, 常に後の値から前の値を引く習慣をつけることで混乱を避けることができる.

[2] 題意より粘性が影響せず, 流線の乱れもなく定常流近似ができるのでベルヌーイの定理を用いて解けばよい.

(1) ベルヌーイの定理により容器の液面下降速度 v_0 と小孔における流速 v_1 の関係として, 液面高さが x のとき次の式が成り立つ.

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g x + p_0 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g 0 + p_0$$

ここで $A \gg a$ であれば, 質量保存則より $\rho v_0 A = \rho v_1 a$ であるから, $v_0 \ll v_1$ となり

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 \text{ は } \frac{1}{2} \rho v_1^2 \text{ に比べて無視できる. したがって } v_1 = \sqrt{2gx} \text{ となる. この式と } v_0 = -\frac{dx}{dt} \text{ の関係を}$$

$\rho v_0 A = \rho v_1 a$ に代入すれば次の微分方程式を得る.

$$\rho A \frac{dx}{dt} = -\rho a \sqrt{2gx}$$

変数分離法を用いて積分すれば

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = -\int \frac{a\sqrt{2g}}{A} dt$$

$$\sqrt{x} = -\frac{a\sqrt{g}}{A\sqrt{2}} t + c$$

となる. 初期条件 $t=0$ で $x=h_0$ より $c=\sqrt{h_0}$ となる.

$$\therefore t = \frac{A\sqrt{2}}{a\sqrt{g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{x})$$

終条件として $t=t_1$ で $x=h'$ を代入すれば $t_1 = \frac{A\sqrt{2}}{a\sqrt{g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h'})$ となる.

$$(2) \text{ 上式で } h' = h_0/2 \text{ とする. } t_2 = \frac{A}{a\sqrt{g}} (\sqrt{2}-1)\sqrt{h_0}$$

$$(3) \quad h'=0 \quad \text{までの時間} \quad t_3 = \frac{A\sqrt{2}}{a\sqrt{g}}\sqrt{h_0}$$

[3] 小孔の断面積を a とすると、水面までの高さ x の時の時間 dt 間に流出する水量は質量保存則により次のような関係になる。

$$a\sqrt{2gx} \cdot dt = -A(x)dx, \quad a\sqrt{2gx} = -A(x)\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

水位の下がる速さ $-(dx/dt)$ が一定値 k であるとする、 $a\sqrt{2gx} = kA(x)$ より $A(x) = \frac{a\sqrt{2g}}{k}\sqrt{x}$ となる。断面積が $\sqrt{x}$ に比例するようにすればよい。

[4] 噴霧器の原理：A から空気を吹き込むことで細いノズルの出口直後 B では水平速度 v の気流が発生するがすぐに広がる。この流線はベンチュリー管の絞られた部分から断面積の大きな管径部に流れが広がる場合と同様に考えることができる。この流線に沿ってベルヌーイの定理を用いれば、ノズル出口 B での圧力を p_1 として図の右端の C 部において流速はほぼゼロで大気圧と考えれば次のようになる。気体密度を ρ 、大気圧を p_0 とする。

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_1 = p_0 \quad \therefore p_1 - p_0 = -\frac{1}{2}\rho v^2$$

つまりノズル出口 B に負圧が発生するので初め大気圧の鉛直筒内の気体が上向きに吸い出されそれに伴い液面がもち上がり、鉛直筒内液柱が上端部高さ h (容器内液面からの高さ) まで持ち上げて霧吹きを実現するには、 $\rho_L gh < \frac{1}{2}\rho v^2$ を満たす流速の気流が必要になる。(ρ_L は液体の密度)

練習問題 3.6

(1) 空気中のピンポン玉の上部に斜め下方から細い管を通して空気を吹き付けると、細い管から噴出された気流がピンポン玉の上部をかすめたあと広がるため、ベンチュリー管にベルヌーイの定理を応用するように、気流の速いピンポン玉の上部が負圧になるため、大気圧がピンポン玉下面に働きピンポン球を持ち上げる力となる。

(2) 2つの球を少し間隔をおいて並べて吊るし、その間に強い気流を拭きこめば、2つの球の間の狭い隙間を速い気流が流れ2球間を過ぎた後気流は広がるため流速は下がるので、ここにベンチュリー管の原理が適用できる。ベルヌーイの定理により2球間には負圧が発生し外側が大気圧であるため2球は引き寄せられる。

練習問題 3.7

[1] 半径 a の固体球 (密度 ρ_s) が密度 ρ_0 の液体中を終端速度 v ($Re < 1$) で落下しているとき液体の粘性率 μ をもとめるためにストークスの法則を用いる。球に働く下向き力を F とすると重力と浮力と粘性力がつりあって一定速度になるので次式が成り立つ。

$$F = \frac{4\pi a^3}{3}(\rho_s - \rho_0)g - 6\pi\mu av = 0$$

$$\text{したがって、} \mu = \frac{2a^2(\rho_s - \rho_0)g}{9v}.$$

[2] 前述の例題より粘性液体中をゆっくり落下する直径 d の球状金属粒子に働くストークスの粘性抵抗力は $3\pi\mu dv$ であるから、終端速度 v は

$$v = \frac{d^2(\rho_s - \rho_0)g}{18\mu} = \frac{(4000 - 1000) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{18 \times 0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}} d^2 = \frac{(4000 - 1000) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{18 \times 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}} d^2$$

$$= 1.63 \times 10^6 d^2$$

10 時間で 10 cm 落下する速度は $2.78 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ であるから $d = 1.31 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.31 \mu\text{m}$ 。この大きさの粒が液表面から 10 時間でちょうど底に達するので、これよりも小さい粒が底に達せず(沈まず)にいる。

練習問題 3.8

この問題はレイノルズ数 Re が同じ流体運動を問うものである。実際の流体運動のレイノルズ数は

$$Re = \frac{Lv}{(\mu/\rho)}$$

で与えられる。

(1) 流体は同じ空気であるから、実際の建物の 1/20 模型で同じ Re 数とするには風速を 20 倍にすれば良い。 $\therefore 100 \text{ m/s}$

$$(2) Re = \frac{Lv}{(\mu/\rho)} = \frac{10 \text{ m} \times 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 3.3 \times 10^6$$

(3) 流体を空気の 1/15 の動粘性係数 $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ の水とするなら、水の流速を 1/15 にすれば良い。
 $\therefore 6.7 \text{ m/s}$