付 録 A　問題略解

7 月 13 日版

※問題には，法則や概念を理解できたかどうか確認するため，また，学んだ考え方をまとめる機会になるような問題から，いくつかのステップを踏まないと答えられないものまであります．
※略解では，それらの区別なく，詳しい答え方・考え方を示さずに最終の数値や式を与えるだけ，あるいは方針を示すだけにしています．
※読者の皆さんが問題を解くときには，結果として得られるはずの答の数値や式を書くことだけを目指すのではなく，問題を解くことにより授業で学んだ知識や考え方の筋道を自分なりに再構築する機会ととらえて，ていねいな解答文を作ることを心がけてください．

A.1　第 1 章問題

問題 1.2-1　xy 平面上で，原点を中心とする半径 R の円周上を反時計回りに運動する．時刻 $t=0$ には，x 軸上の点 $(R,0,0)$ を通過し，時間 $2\pi/\omega$ で円周を一周する．

問題 1.3-1　$v_x=a$，$v_y=0$，$v_z=b(c-2t)$．

問題 1.3-2　$\dot{\theta}=\omega$ であるから，$v_x=-a\omega\sin\theta, v_y=a\omega\cos\theta$ と求まる．図は省略．

問題 1.3-3　$\boldsymbol{A}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ とすると，$\boldsymbol{A}=(R\theta\sin\theta,-R\theta\cos\theta)$．また，質点の座標を (x,y) とすると，$x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta)$，$y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ であり，$\dot{x}=R\theta\dot{\theta}\cos\theta$，$\dot{y}=R\theta\dot{\theta}\sin\theta$ となる．すると，$\boldsymbol{v}=(\dot{x},\dot{y})$ として，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}=0$ が成り立つ．

問題 1.5-1　$\dot{r}=-V\cos\varphi$,　$\dot{\varphi}=(V/a)\sin^2\varphi$.　［$\varphi=\pi/2$ のときに，$|\dot{r}|$ が最小（$\dot{r}=0$）になり，$\dot{\varphi}$ が最大（$\dot{\varphi}=V/a$）になる．］

A.2　第 2 章問題

問題 2.2-1　$0<t<t_1$ と $t_1<t$ のそれぞれの時間帯で，加速度は $\ddot{x}=a$，$\ddot{x}=b$．質点に働いている力はそれぞれ，ma，mb．数値を代入してそれぞれ，5×10^{-2}N，1.0×10^{-1}N．(グラフは省略) この運動では速度が時刻 $t=t_1$ で不連続．理由として非常に短い時間だけ作用した大きな力が考えられる．

問題 2.2-2　(1) 物体に作用する力は重力と斜面から受ける垂直抗力（大きさを R とおく）．これらの合力が円運動をさせている．水平成分の大きさは $R\cos\theta$．鉛直成分の和が 0 であることから，R が求まる．(2) $\omega=\sqrt{g/a\tan\theta}$.　(3) $\omega=\sqrt{g/h}/\tan\theta$．以上により円運動の半径の 1/2 乗に反比例する．なお，一般に求心力 F と回転角速度 ω の関係から，$\omega=\sqrt{F/ma}$.

問題 2.3-1　軌道を表す方程式と斜面を表す方程式（$y=-x\tan\alpha$）から着地点の x,y 座標を求める．$\ell=2{v_0}^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta/g\cos^2\alpha$．これは $\theta=\pi/4-\alpha/2$ で最大．

問題 2.4-1 例題の解のようにして，求める速度を表す式が得られる．ここでは，ばね定数を与えられた量によって表す式と組み合わせる．$66\,\mathrm{cm/s}$.

問題 2.6-1 $T = -m\ddot{x}/\cos\theta$ と $\dot{x} = -v_0 \sin\theta$ および $v_0 = \ell\dot{\theta}$ より，$T = mv_0^2/\ell$ を得る．この式の ℓ に式 (2.53) を代入する．

A.3 第 3 章問題

問題 3.2-1 $U(x) = mgRx/(R+x)$.

問題 3.3-1 最初の位置はポテンシャルエネルギーの初期値を与える．エネルギー保存則により，ばねの縮みの方程式．$(mg/k)(1+\sqrt{1+2kh/mg}\,)$.

問題 3.3-2 (a) $v_\mathrm{c} = 11.2\,\mathrm{km/s}$. (b) $h = Rv_0^2/(2gR - v_0^2)$. (c) 鉛直上向きに x 軸をとり，地表を座標原点にすると，問題 (b) の h を用いて $\sqrt{2gR^2/(R+h)}\int_0^T dt = \int_0^h \sqrt{(R+x)/(h-x)}\,dx$. これを使う．(d) $h = 400\,\mathrm{km}$ の場合，$v_0 = 2.7\,\mathrm{km/s}$，$T = 5.0\,\mathrm{min}$. $h = 3.58 \times 10^4\,\mathrm{km}$ の場合，$v_0 = 10.3\,\mathrm{km/s}$，$T = 4.1\,\mathrm{h}$.

問題 3.6-1 球を薄い球殻に分割する．n 番目の球殻の質量を M_n とすると，この球殻によるポテンシャルは $U_n = -GM_n m/r$. 球によるポテンシャル U は，$U = \sum_n U_n = -G\left(\sum_n M_n\right) m/r = GMm/r$.

問題 3.6-2 $g = GM/R^2 = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$.

問題 3.6-3 作用する力は式 (3.42)．中心からの距離に比例する．運動方程式は単振動．表面から反対側表面までの時間は単振動の周期 T から求まり，$T/2 = \pi\sqrt{R/g}$. 前問の数値を使って $42\,\mathrm{min}$.

問題 3.6-4 (a) $v_0 = \sqrt{GM/(R+h)}$. (b) $T = 2\pi(R+h)^{3/2}/\sqrt{GM} = 92\,\mathrm{min}$. (c) 静止衛星の高度を H，地球の自転周期を T，地球の半径を R とすると，$H = (GM)^{1/3}(T/2\pi)^{2/3} - R = 3.579 \times 10^4\,\mathrm{km}$. (d) $v_1 = v_0/\sqrt{1+h/2R} = 7.55\,\mathrm{km/s}$.

問題 3.6-5 地球の半径を R，静止衛星の高度を H とすると，h_0 は
$R = (R+h_0)\left((R+h_0)/(R+H)\right)^3 / \left(2 - \left((R+h_0)/(R+H)\right)^3\right)$ を満たす．この式の右辺に $R = 6.4 \times 10^3\,\mathrm{km}$，$H = 35.8 \times 10^3\,\mathrm{km}$，$h_0 = 23.4 \times 10^3\,\mathrm{km}$ を代入して計算すると $6.4 \times 10^3\,\mathrm{km}$ となり，これは有効数字の範囲で R に等しい．したがって，$h_0 = 23.4 \times 10^3\,\mathrm{km}$ であることが確認できた．

問題 3.7-1 $\sqrt{2g\ell} < v_0 < \sqrt{5g\ell}$，$\cos\varphi_0 = 2/3 - {v_0}^2/3g\ell$.

問題 3.7-2 (a) $x > 0$ の領域で $U(x) = mgx\sin\alpha$，$x < 0$ の領域で $U(x) = mgx\sin\alpha + kx^2/2$. $U(x)$ のグラフは省略．(b) $a_0 = (2mg/k)\sin\alpha$. (c) $b = a(a/a_0 - 1)$.

A.4 第 4 章問題

問題 4.1-1 $(v_0/\alpha)\sin\theta - (g/\alpha^2)\ln[1 + (\alpha v_0/g)\sin\theta]$.

問題 4.1-2 テイラー展開の公式 $\ln(1-\varepsilon) = -\varepsilon - \varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3 + \ldots$ を利用する．

問題 4.1-3 (a) $1.2\,\mathrm{cm/s}$，(b) $0.69\,\mathrm{mm/s}$.

問題 4.2-1 運動方程式を用いて運動のようすを説明する．まず，傾斜角にかかわらず，速さが減少することをいう．最高地点到達後の傾斜角による力の大きさの違いに注目して，場合 (i) と (ii) に分けて静止か運動するか，どんな運動かを説明する．

問題 4.2-2 位置 $x = 0$ を通過する時刻を $t = 0$，静止する位置を $x = \ell$ に達する時刻を $t = t_0$ とする．$m\dot{v} = -mg\mu'$ を用いて $t_0 = v_0/g\mu'$. これを $x = \int_0^t v dt$ に用いて，$\ell = v_0^2/2g\mu'$.

問題 4.2-3 質点に作用した力積は $Ft = -\mu' mgt$，運動量の変化は $-mv_0$. 力積と運動量との関係から，時間は $v_0/g\mu'$. また，質点に加えられた仕事は $Fx = -\mu' mgx$，運動エネルギーの変化は $-m{v_0}^2/2$. 仕事・エネルギーの定理から，距離は ${v_0}^2/2g\mu'$.

問題 4.2-4　解き方は問題 4.2-2 あるいは問題 4.2-3 と同じ．7.9 m.

問題 4.2-5　ばねの復元力を F，最大摩擦力を $F_{\rm m}$ とする．(i) $2\mu' - \mu > 0$ の場合 $F - F_{\rm m} = 2mg(\mu' - \mu)$，一般に $\mu' < \mu$ だから．(ii) $2\mu' - \mu < 0$ の場合，$F - F_{\rm m} = -2mg\mu' < 0$ であるから．

問題 4.3-1　摩擦力によってなされる負の仕事を求め，エネルギーの負の増加が得られる．速度が 0 の時最も縮む．その関係式を方程式として解く．$(mg\mu'/k)[\sqrt{1 + (k/m)(v_0/g\mu')^2}\ - 1]$ だけ縮む．

A.5　第 5 章問題

問題 5.1-1　地球から重心までの距離を ℓ とすると，$\ell = 4.671 \times 10^3\,{\rm km}$．地球の半径の約 0.73 倍．

問題 5.2-1　円板を押し込む距離を a とすると，手を放す前のばねの伸びは $-(mg/k+a)$．下の板が床から離れるとき，ばねの伸びは mg/k，その時の上の板の位置は手を放す前を基準にして $a+2mg/k$，その時の上の板の速度を v とする．エネルギー保存の式を立てる．求める条件は $a > 2mg/k$.

問題 5.3-1　$a\sqrt{mk/M(M+m)}$.

問題 5.3-2　(a) エネルギー保存則の表式は $ka^2/2 = MV^2/2 + m({v_x}^2 + {v_y}^2) + mga\sin\alpha$，運動量保存則の x 成分の表式は $0 = mv_x - MV$，拘束条件は $v_y = (v_x + V)\tan\alpha$．結果，$V = m\cos\alpha\sqrt{(ka^2 - 2mga\sin\alpha)/m(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}$,
$v_x = MV/m$，$v_y = (M+m)V\tan\alpha/m$　 (b) 例題 2.3-1 の結果は $l = {v_0}^2\sin 2\theta/g$．初めの速度を (v_x, v_y) と置くと $l = 2v_xv_y/g$．これより，$l = M(ka^2 - 2mga\sin\alpha)\sin 2\alpha/mg(M + m\sin^2\alpha)$.

問題 5.3-3　前問と同様にして $V = m\cos\alpha\sqrt{2gh/(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}$.

問題 5.3-4　初めの運動量 mv，後の運動量 $(m+M)V$．$mv/(m+M)$.

問題 5.4-1　初めの相対運動の運動エネルギーは $m(v_1 - v_2)^2/2$，ただし換算質量 $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$．ばねの縮み l としてポテンシャルエネルギーは $kl^2/2$．$(v_1 - v_2)\sqrt{m_1m_2/k(m_1+m_2)}$.

A.6　第 6 章問題

問題 6.2-1　(a) 式 (6.38) において，力の大きさは mg，支点からの距離は ℓ，支点から質点への向きを基準とした力の偏角は $\theta = -\varphi$，よって $N = -mgl\sin\varphi$.（注：図のような $\varphi > 0$ の時には時計回りにトルクが働くことから，$N < 0$ と判断する．）

(b) 求められた N と $L = ml^2\dot{\varphi}$ を用いて，式 (6.43) より式 (2.51) が導かれる．

問題 6.2-2　与えられた (x, y) の時間微分から，式 (6.42) を用いると，$L = mab$.

問題 6.2-3　$L = m(xv_y - yv_x) = mav$.

問題 6.2-4　$L = -(1/2)mv_0gt^2\cos\theta$．これにより確かめられる．

問題 6.2-5　トルクは 0 であるから，質点の角運動量は保存する．$\omega = 4\omega_0$.

問題 6.3-1　$\boldsymbol{L} = (-acm\omega\cos\omega t,\ -acm\omega\sin\omega t,\ a^2m\omega)$．よって原点に関する角運動量の z 成分は時間に依らず一定で，x 成分と y 成分は振動する．

問題 6.3-2　重力による原点に関するトルクの z 成分は 0．張力による支点に関するトルクは 0.

問題 6.4-1　$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ を成分で表すと $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = A_x(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_x + A_y(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_y + A_z(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_z = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$ ここで最右辺を，$\boldsymbol{B}$ の成分に注目して整理すると，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = B_x(C_yA_z - C_zA_y) + B_y(C_zA_x - C_xA_z) + B_z(C_xA_y - C_yA_x) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$．同様に，$\boldsymbol{C}$ の成分に注目して整理すると，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ が得られる．

問題 6.5-1　$\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{p}_i = m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$ を両者に代入する．$M = \sum_i m_i$ として $\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i = M\dot{\boldsymbol{R}}$ であることを用いる．両者とも $\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{R}\times(M\dot{\boldsymbol{R}})$ に等しい．　【別解】両者の差が 0 であることを示す．そのために上記の関係を用いる．また $\boldsymbol{p}_i - m_i\dot{\boldsymbol{q}}_i = \dot{R}$ を用いる．

問題 6.5-2　$\boldsymbol{L} = \sum_i (\boldsymbol{R}+\boldsymbol{q}_i)\times\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{R}\times(\sum_i \boldsymbol{p}_i) + \sum_i \boldsymbol{q}_i\times\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}_0$．同様に，$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}_0$．また，式 (6.71) により (6.66) は，左辺 $=\dot{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{P}}+\dot{\boldsymbol{L}}_0=\dot{\boldsymbol{R}}\times(M\dot{\boldsymbol{R}})+\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}+\dot{\boldsymbol{L}}_0=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}+\dot{\boldsymbol{L}}_0$，右辺 $=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}_0$．

問題 6.5-3　ベクトル積の分配則を使うと，$\boldsymbol{N}_0=\sum_{i=1}^N \boldsymbol{q}_i\times(m_i\boldsymbol{g})=\left(\sum_{i=1}^N m_i\boldsymbol{q}_i\right)\times\boldsymbol{g}$．式 (6.68) を代入すると，$\sum_{i=1}^N m_i\boldsymbol{q}_i=0$．

問題 6.5-4　運動量と角運動量の保存則を利用する．$V=v_0/2$，$\omega=v_0/(2l)$．

問題 6.6-1　$M=4\pi^2a^3/(GT^2)=1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$．

問題 6.6-2　(a) $a=(r_{\min}+r_{\max})/2$，$b=\sqrt{r_{\min}r_{\max}}$．

(b) 面積速度は $h=r_{\min}v_{\max}/2=r_{\max}v_{\min}/2$，公転周期は $T=\pi(r_{\min}+r_{\max})\sqrt{r_{\min}r_{\max}}/(2h)$ と表すことができる．これらの式から h を消去すると，目的の式が得られる．

問題 6.6-3　$1.471\times10^{22}\,\mathrm{kg}$. これは地球の質量の 0.00246 倍.

問題 6.6-4　(a) ケプラーの第三法則を利用する．258 日．　(b) $v_{\mathrm{R}}/v_{\mathrm{E}}=\sqrt{2/(1+a_{\mathrm{E}}/a_{\mathrm{M}})}=1.10$．　$v_R-v_E=0.10\,v_E$．　(c) 地球を離れるときに必要なロケットの速さの最小値を v_R とすると，$v_R/v_E=\sqrt{2(1-a_{\mathrm{E}}/a_{\mathrm{M}})}=0.827$．地球から見たロケットの速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_R-\boldsymbol{v}_E$ の大きさは $v=\sqrt{v_R^2+v_E^2}=1.3\,v_E$．小問 (b) における相対速度の約 13 倍．　(d) $\dfrac{1}{v_{\mathrm{E}}}\sqrt{\dfrac{a_{\mathrm{M}}}{2a_{\mathrm{E}}}}\displaystyle\int_{a_{\mathrm{E}}}^{a_{\mathrm{M}}}\frac{dr}{\sqrt{a_{\mathrm{M}}/r-1}}=85$ 日．

A.7　第 7 章問題

問題 7.1-1　円錐の高さを H とする．円錐の軸上で，頂点から距離 $(3/4)H$ の位置に重心．

問題 7.1-2　[1]　(1) 点 C.　(2) 力 1：支点からの抗力．C に作用する．大きさと向きは未定．力 2：各点に作用する重力．C に作用しているとしてよい．大きさ Mg．向きは鉛直下向き．力 3：ひもの張力．円板との接点に作用する．向きは鉛直下向き．大きさは未定．これを T とおく．(注 $T<mg$.) (3) 重力と抗力のトルクは C，O のいずれに関しても 0．ひもの張力のトルクは C，G のいずれに関しても $-RT$．　[2]　(1) 力その 1：重力．C に作用するとしてよい．大きさは Mg で鉛直下向き．　力その 2：ひもの張力．円周の接点に作用．大きさは未定．これを T とおく．鉛直上向き．　(2) 重力の C と O のまわりのトルクは 0．張力の C と O のまわりのトルクは $-RT$．

問題 7.2-1　(1) D の R のまわりの慣性モーメントは $I_{\mathrm{D}}=I_0+MR^2$．E も同様．よって $I=2I_0+2MR^2$．　(2) D を細分化してそれぞれの位置を $\boldsymbol{r}_i$，質量を m_i，点 A の位置を $\boldsymbol{R}$ として $\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{R}$ とおき，C に関する D の角運動量 $\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$ を求めると，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{R}\times M\dot{\boldsymbol{R}}$ が得られる．ただしここで与えられた条件から $\dot{\boldsymbol{q}}_i=0$ であること，定義から $\sum_i m_i\boldsymbol{q}_i=0$ であることを用いる．E についても同様，角運動量は $2MR^2\omega$．

（注）一般に，質点系の角運動量 $\boldsymbol{L}=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$ は、系を部分系 A, B$\cdots$ に分割してそれら各々についてそれぞれの重心のまわりの角運動量を $\boldsymbol{L}_0^{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{L}_0^{\mathrm{B}}$，$\cdots$ とし，部分系それぞれの重心の位置と重心の運動量を $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{A}}$ などのように記すとき，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0^{\mathrm{A}}+\boldsymbol{L}_0^{\mathrm{B}}+\cdots+\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}\times\boldsymbol{P}_{\mathrm{A}}+\cdots$ である．

問題 7.3-1　$T=2\pi\sqrt{(R/g)[\ell/R+R/(2\ell)]}$．グラフは省略.

問題 7.3-2　角運動量保存則より，$I\dot\theta=mR^2(\dot\varphi-2\dot\theta)(1-\cos\varphi)$ が成り立つ（$I=2MR^2$ は円板の慣性モーメント）．これより，円板の回転する角度 $\Delta\theta$ は
$\Delta\theta=\int_0^{2\pi} mR^2(1-\cos\varphi)/\left(I+2mR^2(1-\cos\varphi)\right)d\varphi=\pi\left(1-1/\sqrt{1+2m/M}\right)$.

問題 7.4-1　$t_{\mathrm{B}}>t_{\mathrm{A}}>t_{\mathrm{C}}$.

問題 7.4-2　円柱が段差の辺 C で衝突する直前，転がり角速度 $\omega_0=v/R$ と円柱の軸まわりの慣性モーメント $I_0=MR^2/2$ を用いて，C まわりの角運動量は $L_{\mathrm{C}}=I_0\omega_0+Mv(R-h)$．衝突の直後は，辺 C から見た円柱の軸への仰角を θ を用いて $L_{\mathrm{C}}=(I_0+MR^2)\dot\theta$ と書ける．衝突後の力学的エ

ネルギーは，$E=(I_0+MR^2)\dot{\theta}^2/2+Mg(R-h)$．その後 $\theta=\pi/2$ に達したときの運動エネルギーを K とすると，$E=K+MgR$．登り切る条件は $K>0$ である．$v>2R\sqrt{3hg}/(3R-2h)$．

問題 7.4-3　半球の中心を C，重心を G$(x,y,0)$，2 点の距離を d と記す．G を通るこの面の垂線まわりの慣性モーメントを I と記す．床との接点において作用する垂直抗力を K（y 方向），摩擦力を F（x 方向）とおく．$M\ddot{x}=F$．$|\varphi|\ll 1$ だから，$y=R-d$, $K=Mg$，また $I\ddot{\varphi}=(R-d)F-d\varphi K$，および $\dot{x}=-(R-d)\dot{\varphi}$（滑らない条件）．$I$ は式 (7.47) に，d は例題 7.1-1 に．$2\pi\sqrt{26R/15g}$．

問題 7.4-4　円板は時計回りに角度 $\pi[1-\sqrt{(M+m)/(M+3m)}]$ だけ回転する．

問題 7.5-1　毎秒 58 回転．

問題 7.6-1　点 A に関するトルクがゼロであるという条件より，$Mg(\ell/2)\sin\theta-R_2\ell\sin\theta+F_2\ell\cos\theta=0$．この式の F_2 に式 (7.80) の第二式を代入，式 (7.81) と同じ式が得られる．

問題 7.6-2　棒の鉛直方向からの傾き角を α とすると，$T=(Mg\ell/2h)\sin\alpha\cos^2\alpha$．

問題 7.6-3　$2m/M<(2\mu-\tan\theta)/(\tan\theta-\mu)$ ならば，はしごを登り切るまで滑ることはない．さもなければ，$\ell[2\mu(1+M/m)\cot\theta-M/m]$ だけ登ったときに滑りはじめる．

A.8　第 8 章問題

問題 8.1-1　(a) 4 倍．(b) 2 倍．(c) 2 倍．(d) 変化なし．

問題 8.1-2　ピストンの位置を往復運動の中心を原点として x で表すと $|\dot{x}|_{\max}=a\omega=18.8$ m/s，$|\ddot{x}|_{\max}=a\omega^2=7.1\times10^3\mathrm{m/s^2}$　．

問題 8.1-3　ばね定数は $k=20000\times4\mathrm{N/m}$．質量は $m=(1200+240)\mathrm{kg}$．

(a) 振動数を ν として，$\nu=1.19\mathrm{s}^{-1}$　(b) 1.68 s.

問題 8.1-4　(a) $\ell=\ell_0+mg/k$．$\omega=\sqrt{k/m}$．

(b) 図 8.5(a) の 2 個のバネは，それぞれが単独でおもりに力を及ぼすことに比べて半分の伸びで済む．$\omega=\sqrt{2k/m}$．図 8.5(b) では，2 倍の伸びである．$\omega=\sqrt{k/2m}$．

問題 8.2-1　$c_1=-c_2=v_0/2\kappa$．グラフの概形は，$\mathrm{e}^{2\kappa t_0}=(\lambda+\kappa)/(\lambda-\kappa)$ とするとき $0\le t<t_0$ で $\dot{x}>0$，$t\ge t_0$ で $\dot{x}\le 0$ であること，$t\to\infty$ で $x\to 0$ となること，によって確かめられる．極大を与える $\omega_0 t/2\pi$ の値は，t_0 を求め $\lambda/\omega_0=1.5$ を用いて，約 0.14．

問題 8.2-2　$a=5\mathrm{cm}$ として，$k=mg/a=19.6\mathrm{N/m}$．$\omega_0=\sqrt{k/m}=14\mathrm{s}^{-1}$．(a) $\tau=60\,s$ とおく．$\exp(-\lambda\tau)=1/2$ より $\lambda=\ln 2/\tau=0.0116\mathrm{s}^{-1}$，$\gamma=2m\lambda=2.3\times10^{-3}\,\mathrm{kg/s}$．(b) $x(t)=a-ae^{-\lambda t}\cos(\omega t)$，$\omega=\sqrt{{\omega_0}^2-\lambda^2}$．$\omega\approx\omega_0$ と近似．

問題 8.2-3　もし $a\leqq\mu mg/k$ ならば，静止したまま．もし $a>\mu mg/k$ ならば，最初しばらくの間 $m\ddot{x}=-kx+\mu' mg$ が成り立つ．$x=y+\mu' mg/k$ で定義した y の解を，初期条件 $\dot{y}=0, y=a-\mu' mg/k$ の下で求め，$x=\mu' mg/k+(a-\mu' mg/k)\cos\omega t$（ただし $\omega^2=k/m$）．次にもし $a-2\mu' mg/k\leqq\mu mg/k$ ならば，$x=-a+2\mu' mg/k$ で静止する．もしそうでなければ，その後，正方向に動く．その運動は以上と同様にして求める．まとめると，$a_n=(\mu+2n\mu')mg/k$ とおく（$n=0,1,2\cdots$）とき，a の値が $a_{n-1}<a\leqq a_n$ の範囲にあるならば（ただし $a_{-1}=0$ とする），n 回目（0 回目を手を初めて離したときとして）の停止の後，その場に静止し続ける．このときの静止位置は $x_n=(-1)^n(a-2n\mu' mg/k)$．

問題 8.2-4　方程式 $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+{\omega_0}^2=0$ の与えられた初期条件を満たす解は，$\lambda=\omega$ の時 $x=(a+(v+\lambda a)t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ である．$a>0$，$v+\lambda a<0$ とされているから，$x(t)$ は初期値 $x(0)>0$ から速度 $v<0$ で減少し，一度だけ 0 になる．その後は，$\dot{x}=0$ となる時刻 $t=|v|/\lambda(|v|-\lambda a)$ で最小値をとった後，緩やかに増大して $x=0$ に負側から徐々に近づく．

問題 8.3-1　$c(\Omega)=f/m\left(({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+4\Omega^2\lambda^2\right)$ である．$c(\Omega)$ を微分してその符号を調べる．最大値は $c_{\max}=f/2m\lambda\sqrt{{\omega_0}^2-\lambda^2}$．

問題 8.3-2　微分方程式 $\ddot{x}+\omega_0^2 x=(f/m)\cos\omega_0 t$ が満たされることは，代入して確認できる．が，また，a を未知数として解 $x=at\sin\omega_0 t$ を仮定し，方程式に代入すると，$a=f/(2m\omega_0)$ が得られる．

問題 8.3-3　(a) $c_1=f({\omega_0}^2-\Omega^2)/m\left(({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+(2\lambda\Omega)^2\right)$，$c_2=2f\lambda\Omega/m\left(({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+(2\lambda\Omega)^2\right)$．(b) $c_1\cos\Omega t+c_2\sin\Omega t=c\cos(\Omega t+\delta)$ を満たす c と δ は三角関数の性質から，$c=\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2}$ および $\tan\delta=-c_2/c_1$ で表される．上で求めた c_1,c_2 を代入して式 (8.41) が得られる．

問題 8.3-4　(a) $\ddot{u}+\omega_0^2 u=(f/m)\cos\Omega t$，ただし $\omega_0=\sqrt{k/m}$，$f=kA$．　(b) a,α を任意定数として $u=a\cos(\omega_0 t+\alpha)+(f/m\omega_0(\omega_0^2-\Omega^2))\cos\Omega t$．　(c) $\Omega=2\omega_0$ を代入し，計算の結果 $\alpha=0$，$a=A/3$ が得られ，$u(t)=(A/3)\cos\omega_0 t-(A/3)\cos 2\omega_0 t$．グラフは省略．

問題 8.3-5　(a) 近似的な運動方程式は $m\ddot{x}=(mg/\ell)(x-A\cos\Omega t)$．$\omega_0=\sqrt{g/\ell}$，$f=mgA/\ell$ とおくことにより，確かめられる．　(b) 抵抗 $-\gamma\dot{x}$ が働くとき，$\lambda=\gamma/(2m)$ とおき，$\lambda=(\omega_0/(10\pi))\ln 2=0.022\,\omega_0$．　振幅は近似式 (8.43) において $\Omega=\omega_0$ とすると $c=f/(2m\omega_0\lambda)$．$f=mgA/\ell=m\omega_0^2 A$，よって $c/A=5\pi/\ln 2\approx 23$．共鳴が起こる場合には，このように強制力のもとになる小さな動きが大きな振幅を与える．

問題 8.4-1　(a) それぞれの伸びは x_1-x_0，x_2-x_0 であることから．　(b) 横棒の質量が 0．バネの力がつり合う条件から x_0 を求める．　(c) $x=x_1-x_2$, $X=x_1+x_2$ として方程式を立てる．$\omega_0=\sqrt{k/m}$，$\omega_1=\sqrt{k\lambda/m(2k+\lambda)}$．　(d) 図は省略．横棒は動かず 2 つのおもりが逆向きに，あるいは，2 つが同じ高さを保ち一緒に，振動．

問題 8.4-2　(a) 変位は $x_1=a\theta+\ell\varphi_1$, $x_2=a\theta+\ell\varphi_2$，力は $-mg\varphi_1$，$-mg\varphi_2$ であることから．　(b) ひもの張力 T は変位の 1 次微小量の範囲ではすべて等しい．横棒が受ける横向きの力は $-T\theta+T\varphi_1-T\theta+T\varphi_2=0$．　(c) $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ と θ の方程式を立てる．$\omega_0=\sqrt{g/\ell}$, $\omega_1=\sqrt{g/(a+\ell)}$．(d) 図は省略する．横棒は動かず 2 つのおもりが逆向きに，あるいは，上のひもと下のひもが一直線状になり 2 つのおもりがそろって，振動する．

A.9　第 9 章問題

問題 9.1-1　電車の加速度は後方に向かって大きさを α とすると $\alpha=v_0/\tau$．電車に固定された座標系では，おもりに鉛直下向きに mg ，水平前向きに $m\alpha$ の力が働く．それらの力がおもりに対してする仕事の和は天井に達するまで正でなくてはならない．$\tau_c=v_0/g$．

問題 9.2-1　リングの上に固定された座標系で，ある場所にビーズが止まっているとして，ビーズに作用する力は，水平面内の回転軸から離れる向きに見かけの力と鉛直下向きに重力．それぞれ大きさが $ma\omega^2\sin\theta$ と mg．これらの円の接線方向の成分がつり合う．その条件式が解をもつためには $\omega_c=\sqrt{g/a}$ として $\omega\geqq\omega_c$ ．解から，つり合いの位置は $\theta=\arccos[g/(a\omega^2)]$．

問題 9.3-1　式 (9.17) の各関係式の両辺を微分する．右辺は x' と y' の微分と三角関数の微分の式である．整理すると式 (9.35)，(9.36)，(9.37) の右辺．一方で，式 (9.25) の右辺第 2 項 $\omega\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_{z'}$ であることに注意して，またベクトル積の定義から $\omega(-y'\boldsymbol{e}_{x'}+x'\boldsymbol{e}_{y'})$．よって，式 (9.25) の右辺は $(\dot{x}'-\omega y')\boldsymbol{e}_{x'}+(\dot{y}'+\omega x')\boldsymbol{e}_{y'}+\dot{z}'\boldsymbol{e}_{z'}$．これに式 (9.19) を用い，左辺 $\dot{x}\boldsymbol{e}_x+\dot{y}\boldsymbol{e}_y+\dot{z}\boldsymbol{e}_z$ と比較．このように，式 (9.35)，(9.36)，(9.37) は慣性系 S と運動系 S′ における速度の関係を表す．

問題 9.3-2　式 (9.35)，(9.36)，(9.37) の各関係式の両辺を微分する．右辺は x' と y' の微分および 2 次微分と三角関数の微分の式である．整理すると式 (9.38)，(9.39)，(9.40) の右辺．一方で，式 (9.30) の右辺第 2 項 $2\omega\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_{z'}$ とベクトル積の定義から $2\omega(-\dot{y}'\boldsymbol{e}_{x'}+\dot{x}'\boldsymbol{e}_{y'})$．同様に右辺第 3 項 $\omega^2\boldsymbol{e}_z\times(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{r})$ は $\omega^2\boldsymbol{e}_{z'}\times(x'\boldsymbol{e}_{y'}-y'\boldsymbol{e}_{x'})=-\omega^2(x'\boldsymbol{e}_{x'}+y'\boldsymbol{e}_{y'})$．よって式 (9.30) の右辺は $(\ddot{x}'-2\omega\dot{y}'-\omega^2 x')\boldsymbol{e}_{x'}+(\ddot{y}'+2\omega\dot{x}'-\omega^2 y')\boldsymbol{e}_{y'}$．これに式 (9.19) を用い，左辺 $\ddot{x}\boldsymbol{e}_x+\ddot{y}\boldsymbol{e}_y+\ddot{z}\boldsymbol{e}_z$ と比較．このように，式 (9.38)，(9.39)，(9.40) は慣性系 S と運動系 S′ における加速度の関係を表す．

問題 9.4-1　例題 9.4-2 のように運動方程式を立てる．地球の自転軸方向を表す単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $x'y'z$ 座標系で表しておく．運動方程式は ϕ を含む：$\dot{v}_{x'}, \dot{v}_z$ の式の $\cos\alpha$ に $\cos\phi$ がかかる，$\dot{v}_{y'}$ の式に $2m\omega v_z \cos\alpha \sin\phi$ の項が加わる，$\dot{v}_z$ の式に $-2m\omega v_{y'} \cos\alpha \sin\phi$ の項が加わる．結果，x' として式 (9.59) の x の表式で $\cos\alpha$ と第 2 項を展開した $\cos\theta\sin\alpha - \sin\theta\cos\alpha$ の $\cos\alpha$ の，どちらにも $\cos\phi$ がかかったもの，y' として式 (9.58) の y の表式，z として式 (9.58) の z の表式が得られる．ただし y' に対しては $v_0 = 0$ または $\theta = \pi/2$ の場合，それ以外で無視していた項 $-\frac{1}{3}g\omega t^3 \cos\alpha\sin\phi + v_0\omega t^2 \sin\theta\cos\alpha\sin\phi$，$z$ に対しては $v_0 = 0$ または $\theta = 0$ の場合に $-\omega v_0 t^2 \cos\alpha\cos\theta\sin\phi$ の項を加える．ここで v_0 の場合とは，発射するのではなく静かに落下させる場合を指す．

問題 9.4-2　（正誤表に訂正されたように真北に向かって投げたとする）例題 9.4-2 のようにして $\theta = 0$ の場合に $z = -\frac{1}{2}gt^2$，$x = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos\alpha + v_0\omega t^2 \sin\alpha$ を得る．距離と初速から t を求め，$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ と式 (9.42) に与えられた ω，$\alpha = 35°$ の正弦と余弦の値を用い，結果が確かめられる．

問題 9.4-3　図 9.11 の点 O を地上 h の場所にとり，例題 9.4-2 のようにして $x = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos\alpha$ および $z = -\frac{1}{2}gt^2$ を得る．赤道上であるから $\alpha = 0$，落下地点は地上で $z = -h$，真下から東に d ずれるとして $x = d$．t を消去して結果を得る．h, ω, g の数値を代入する．

問題 9.4-4　例題 9.4-2 のようにして $y = 0$，$z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$，$x = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos\alpha - v_0\omega t^2 \cos\alpha$ を得る．これは例題の $\theta = \pi/2$ の場合にあたる．$t > 0$ で $z = 0$ となる時刻 t における x の値 d を求める．$d = -\frac{4}{3}\omega {v_0}^3 \cos\alpha / g^2$．$\alpha = 0, v_0 = 100\mathrm{m/s}$ と g および ω の数値を代入．西向きに 1.0m ずれる．

問題 9.5-1　この場合には慣性力が作用しないので，潮汐力は式 (9.64) の $\boldsymbol{F}$ で与えられる．この力は地球上のどこでも月の方を向くので，月に近い地点で満潮，遠い地点で干潮になる．

問題 9.5-2　$F_{\mathrm{td}}^{太}/F_{\mathrm{td}}^{月} = (M_{太}/M_{月})(L_{月}/L_{太})^3 \approx 0.46$．