『工科系の物理学基礎 』問題の解答例と解説

2024 年 5 月 30 日版

※解答には複数の答え方があってよい．ここに挙げた例はその一つである．解答例とともに，読者の学びのために解説などを記す．解説では，問題の背景や解答で用いた方法や考え方の補足説明と書き方について必要な注意を述べる．その他関連した事柄も含まれる．問題のねらい，として教科書の中でのその問題の位置づけを述べる．
※解答を作成する際に心がけるべきこと：解答として教科書の中で説明された基本事項については説明を省くことが許される場合がある．その場合でも，計算の理由と具体的な計算について省かずに記すこと．

※有効数字について：
有効数字について物理量の数値を答える問題では有効数字を考慮して解答すること．ただし本書では、問題文からは有効数字が明確でない場合には，有効数字 2 桁で答えるようにしてください．また題意から有効数字の桁数を予想できるものもあります．例えば気圧の高度による違いを知るために高度が 0 m と 100 m の気圧はそれぞれ何ヘクトパスカルか，と問われれば 4 桁の数値が必要になります．将来、精度を重視した計算をする場合は次の 5 点に注意して対応する必要があります。

1. 例えば 300，-23456，0.0023，-40.000000 について，それぞれ有効数字の桁数（有効桁数）は 3 桁，5 桁，2 桁，8 桁である．指数表記の場合は，0.37×10^5，-0.8300×10^{-9}，2.99792×10^8 の有効数字はそれぞれ 2 桁，4 桁，6 桁である．有効数字の一番下の桁の数字はさらに 1 桁下の数字を四捨五入した値を意味し，一番下の位の数字はより精度の高い数値と比べれば ±1 変化しうる．また実験的に得られた数値は複数回測定値の平均値や正規分布の中心値等を意味するため，一番下の位の数字の変動幅は 1 より大きい場合がある．

> 補足）長さ 300 m と記載したときの数値 300 は整数表記ではあるが小数点以下を略した実数の意味である．通常は 3 桁の有効数字とみなすが，一の位と十の位の 0 は四捨五入された場合もあるため有効数字 1 桁の場合や有効数字が 2 桁の場合が含まれる．そのため精確に有効数字 2 桁で表記する際は指数表記 3.0×10^2 とする．多くの書籍では精確な表記が省略される場合がしばしば見られるが，精密な計算の場合は指数表記を使用すると良い．

2. 一番上の位の数字が 1 の場合は注意が必要である．例えば気圧が 1013 hPa と記されていれば，通常は有効数字 4 桁として扱うが，誤差は ~ 1 hPa であるから相対誤差が $\sim 1/1013$ である．有効数字 3 桁で書かれた低気圧 981 hPa の誤差も ~ 1 hPa であるからその相対誤差は $\sim 1/981$ であり，1013 hPa の相対誤差とほぼ同じである．つまりある数値の一番上の位の数字が 1 の場合は，相対誤差を考慮して有効数字桁数を見かけの桁数より 1 つ下げて扱う必要がある．一番上の位の数字が 2 以上であれば通常通りの有効桁数でよい．市販されている電圧等のデジタル計測器の表示 digits が 6 桁であっても一番上の位の最大数が 1 の場合，その測定器の有効桁数が $5_{1/2}$ 桁と表記されることもある．

> 補足）例えば，$4.3\times0.23=0.989$ の場合，4.3 も 0.23 も有効数字 2 桁なので結果は 0.99

となる．ところが，$4.4 \times 0.23 = 1.012$ の場合も有効数字 2 桁の計算なので，1.0 と答えたいところだが，それぞれの相対誤差を 1/44 と 1/23 として考えれば，数理統計学で学ぶように上記 2 つの値の積の相対誤差は $[(1/44)^2 + (1/23)^2]^{1/2} = 0.049$ となり，誤差は $1.012 \times 0.049 = 0.050$ となるから，誤差を含めた結果は 1.01 ± 0.05 である．これは 0.96 〜1.06 と幅があるため答えは 1.0 で良いように見えるが誤差は 0.1 の半分 の 0.05 であるから与えられた数値の精度を見捨てないために 1.01 を答えとする．これは変動の中心値と考えればよい．誤差を含めた数値表記 4.40 ± 0.04，0.23 ± 0.01 が与えられている場合，有効桁数を 1 桁上げた計算の結果は 1.012 ± 0.045 となるが，実質の有効数字は 1.01 である．

3. 問題文に，答えの有効数字の指定があれば，解答は有効数字より 1 桁多い計算をしたうえで一番下の桁の数字を四捨五入して決める．問題文に答えの有効数字の記載がない場合は、問題文中に与えられた複数の数値のそれぞれの有効数字を確かめ，問題を解く際に使用する式に与えられた数値を代入することで有効数字が何桁になるかが決まる．例えば数値を代入した式が $1.2 + 2$ の場合，2 の有効桁数が 1 桁であるため小数点以下が不明となり和は有効数字 1 桁の 3 となる．$1.200 + 0.0025$ の場合の答えは 1.203，$1.2 + 0.0025$ の場合の答えは 1.2 となる．$1.200 + 0.25$ の場合は 1.45 となる．つまり複数の小数の和や差の場合は最下位の桁がもっとも小数点に近い数値の有効数字に合わせることになる．

4. 乗除算の場合，例として 1.200×0.0025 は小さいほうの有効数字桁数で決まり 0.0030 となる．

5. 一方で円周率 π や整数の平方根や重力加速度等の既知の数値の場合は，問題で与えられた数値の有効数字より 1 桁多い有効桁数で式に代入して計算を行う．対数や指数等の様々な関数の使用や積分や微分を行う場合，独立変数やパラメータの有効数字が結果の有効数字桁数となる．

第 1 章　運動の記述

1.2-1

【解答例】

まず軌跡を求める．座標が時間の関数として与えられているので，時間 t を消去することができれば軌跡が求まる．x と y の式から，$x^2 + y^2 = R^2$ を示すことができる．これは原点を中心とする半径 R の円である．また，z は常に 0 であるから，軌跡は xy 平面上にある．次に，運動の始点と向きを求める．$t = 0$ とすると質点の y 座標と z 座標は 0 なので，x 軸上にあり，t が増えるに従い $y > 0$ の方向に動くことがわかる．位置座標の三角関数に現れる角速度 ω を用いて，運動の周期は $\dfrac{2\pi}{\omega}$ と表される．

これらをまとめて，質点は xy 平面上で，原点を中心とする半径 R の円周上を，$z > 0$ の側から見て反時計回りに運動する．時刻 $t = 0$ には，x 軸上の点 $(R, 0, 0)$ を通過し，時間 $2\pi/\omega$ で円周を一周する．

【解説】

問が「運動はどのようなものか」であるとき何を答えるべきか．1.2 節で学んだ範囲で分かったように，運動を表現することは位置座標を時間の関数として表すことである．逆に位置座標が時間の関数で与えられたときに，表現されている運動の特徴とは何か．以下に 1.2 節までで取り上げた運動の特徴をあげてみよう．

1. ［全体像］軌跡の図形

2.　［動き］運動の向き

ここまででは運動の速さについては扱われていない．この問題のように繰り返す運動ならば，周期を答える．

【問題のねらいなど】

質点の運動の様子を記述する方法をここまでで学び，質点の座標を時間の関数として表現することを理解した．そこで，その逆に座標の記述から運動の特徴を把握できることを試している．

【補足】

1.2 節までででは速度について学んでいないので，通常の運動の様子の記述で使う「等速円運動」のような言い方は求められていない．

1.3-1

【解答例】

質点の位置が時間の関数として与えられるならば，速度はその関数の微分である．式 (1.10) によって位置を表す x, y, z が時間 t の関数として与えられているので，x, y, z それぞれを t で微分すると，おのおのが質点の速度ベクトルの x 成分，x 成分，x 成分を与える．それぞれを v_x, v_y, v_z と記すと，微分を計算した結果得られる式をまとめて，$v_x = a$，$v_y = 0$，$v_z = b(c-2t)$，となる．

【解説】

運動が，位置を表す時間の関数として与えられているので，微分の計算をすること，そのことを整理して記述する．

【問題のねらい】

位置から速度を正しく求めること，そのことを説明できる力をつける．

1.3-2

【解答例】

質点の位置が時間の関数として与えられるならば，速度はその関数の微分である．位置を表す x, y が時間 t の関数として与えられているので，x, y それぞれを t で微分すると，$\dot{\theta} = \omega$ であるから，$v_x = -a\omega \sin\theta$, $v_y = a\omega \cos\theta$ と求まる．

運動の軌跡は図 1 に示すように半径 a の円周である．各時刻 t での質点の位置の偏角，$\omega t + \pi/4$，はそれぞれ $\pi/4, \pi/4 + \pi/4 = \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4$ である．速度 $\boldsymbol{v}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y)$ が $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = 0$ をみたすことが確かめられるので，速度ベクトルは動径方向と垂直，つまり円の接線方向を向く．

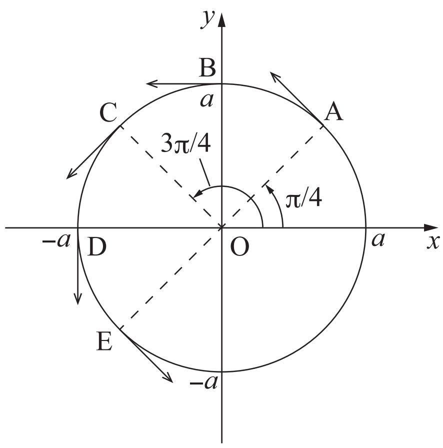

図 1: 円運動をする質点の軌跡と、指定された時刻の速度の方向．A〜E は問題で指定された時刻の質点の位置を意味する．矢印は各位置における速度ベクトルの方向を示す。

【解説】

運動が，位置を表す時間の関数として与えられているので，微分の計算をすること，そのことを整

理して記述する．
【問題のねらい】
位置から速度を正しく求めること，図示して説明できる力をつける．

1.3-3
【解答例】
まず，円板に巻き付けられた糸がほぐれる場合を考える．点 P の動きに対する拘束条件によって点 P の座標を表す式を求める．角度 θ を媒介変数として用いる．点 P の座標 (x, y) を θ の関数として表し，θ が時間の関数であるとする．したがって，位置座標を時間で微分して得られる速度は合成関数の微分によって求められる．

質点の座標 (x, y) は点 Q の位置ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の和で与えられるので，$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ とすると，$x = R\cos\theta + A_x$，$y = R\sin\theta + A_y$ である．線分 PQ の長さが弧 RQ の長さに等しく，弧 RQ の長さは $R\theta$ であることから，また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の x 軸を基準にした偏角は $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ であることから，$\boldsymbol{A} = (R\theta\sin\theta, -R\theta\cos\theta)$ である．これらより，

$$x = R(\cos\theta + \theta\sin\theta), \quad y = R(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

である．これより，v_x, v_y の計算はそれぞれ，

$$v_x = \dot{x} = R(-\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\sin\theta + \theta\dot{\theta}\cos\theta) = R\theta\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$v_y = \dot{y} = R(\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\cos\theta + \theta\dot{\theta}\sin\theta) = R\theta\dot{\theta}\sin\theta$$

のようにできる．題意は，内積 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$ がゼロであることを示すことであるので，上記の (x, y) と (v_x, v_y) の表式を用いて計算してみると，

$$v_xA_x + v_yA_y = 0$$

が確かめられ，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{A}$ は互いに垂直である．すなわち，$\boldsymbol{v}$ は QP に垂直である．

つぎに，任意の形状の物体に巻き付けられた糸がほぐれる場合を考える（図 2）．糸の先端を P，ほぐれた部分の糸 QP の長さを s とし，糸と物体の表面が接する点 Q の座標を $(x(s), y(s))$ とする．QP が x 軸となす角を θ（θ は s の関数として表すことができる）とすると，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (s\cos\theta, s\sin\theta)$ だから，P の座標 $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}})$ は次のように表される．

$$x_{\mathrm{P}} = x + s\cos\theta, \quad y_{\mathrm{P}} = y + s\sin\theta.$$

したがって，点 P の速度 $\boldsymbol{v}$ の成分は

$$v_x = \dot{x}_{\mathrm{P}} = \frac{dx_{\mathrm{P}}}{ds}\,\dot{s} = \left(\frac{dx}{ds} + \cos\theta - s\frac{d\theta}{ds}\sin\theta\right)\dot{s},$$
$$v_y = \dot{y}_{\mathrm{P}} = \frac{dy_{\mathrm{P}}}{ds}\,\dot{s} = \left(\frac{dy}{ds} + \sin\theta + s\frac{d\theta}{ds}\cos\theta\right)\dot{s}$$

のように計算できる．

ここで，dx/ds と dy/ds を θ を用いて表すために，ほぐれた糸 QP は点 Q における物体の表面の接線方向を向いているという条件を利用する．そのために，糸がさらに少しだけほぐれて，ほぐれた糸の長さが $s + ds$ になった状況を考える．このときの物体と糸との接点を Q′ とすると，$ds \to 0$ の極限で線分 Q′Q と QP は平行になる．したがって，Q′ の座標を $(x + dx, y + dy)$ とすると，$\overline{\mathrm{Q'Q}} = ds$ だから，次の関係が成り立つ（図 2 の右側の三角形参照）．

$$\frac{-dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{-dy}{ds} = \sin\theta.$$

この関係を，上で導いた v_x，v_y の式に代入して，次式を得る．

$$\boldsymbol{v} = (-\sin\theta, \cos\theta)s\dot{s}\frac{d\theta}{ds}.$$

いま，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (s\cos\theta, s\sin\theta)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ となることが確かめられる．すなわち $\boldsymbol{v}$ は QP に垂直である．

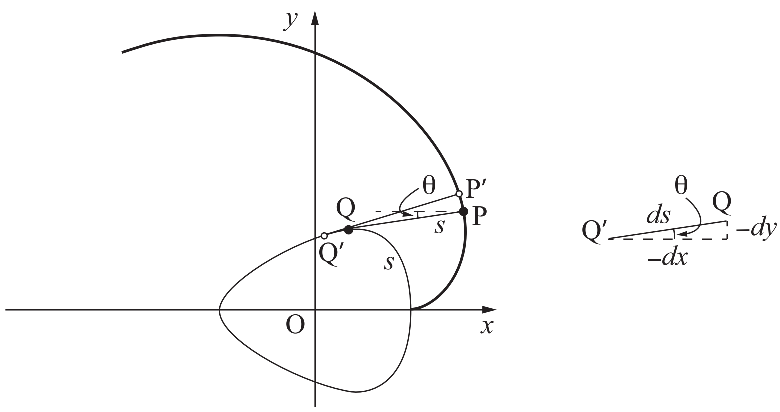

図 2: 任意の形状の物体（細い閉じた曲線）に巻き付けられた糸をほぐすときに糸の先端が描く曲線（太い曲線）．ほぐれた糸の長さが s と $s+ds$ のときの糸の先端がそれぞれ P と P′，ほぐれた糸と物体が接する点がそれぞれ Q と Q′ である．また，線分 QP と x 軸のなす角が θ である．右の図は線分 Q′Q を拡大したもので，この図では $dx<0$，$dy<0$ である．

【解説】

拘束条件が与えられていること，点 P の座標は時間の関数としては与えらていないこと，がポイントである．拘束条件を利用するときには，条件を式で表すとよい．質点の位置座標が時間の関数として分かっていなくても，媒介変数を用いればその時間依存性を仮定することにより速度を求めることができ，条件式を使うことができる．それにより題意にいう速度が満たす関係式を証明することができる．今の場合はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の大きさと向きが図より読み取れるので，それを利用するとよい．このとき，点 Q を通り，それぞれ x 軸と y 軸に平行な 2 本の補助線が役に立つ．ちなみに，ここに現れた点 P の描く図形はインボリュート曲線（伸開線）とよばれていて，工学において有用である．他にも拘束条件の下での運動を考える問題を解いてみるとよい．

【問題のねらい】

拘束条件が与えられたときの 2 次元あるいは 3 次元空間の運動を時間やその代わりの媒介変数によって式で表す力をつける．それによって速度を求めることもできるし，運動の特徴を表す関係式を導くこともできることを理解する．

【補足】

ある曲線上を運動する質点の速度について，その向きは曲線上で質点の位置における接線の向きである．この問題は，問題文で定義された曲線の接線についての幾何学上の性質を尋ねているものである．

1.5-1

【解答例】

直線上を等速で運動する質点を原点にいる観測者からみた場合，質点までの距離 r とその方角 φ が時間と伴にどう変化するのかを問う問題である．単純な運動なので，直交座標 (x,y) と平面極座標 (r,φ) の基本的関係式

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

もとにして $\dot{r}$ と $\dot{\varphi}$ を計算することができる．

質点が y 軸を横切る時刻を t_0 とすると x と y の時間 t 依存性は次のように表される．

$$x = -V(t-t_0), \qquad y = a.$$

これらの式を上の関係式に代入すると

$$r\cos\varphi = -V(t-t_0), \qquad r\sin\varphi = a \tag{1}$$

となる．$\dot{r}$ と $\dot{\varphi}$ を求めるために，これらの式の両辺を時間で微分すると次式が得られる．

$$\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -V, \qquad \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = 0.$$

この 2 つの式を連立させて $\dot{r}$ と $\dot{\varphi}$ について解いて，次の結果を得る．

$$\dot{r} = -V\cos\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \frac{V\sin\varphi}{r} = \frac{V}{a}\sin^2\varphi.$$

ただし，最後の式変形では，r を用いずに φ だけを用いて結果を表すために式 (1) の第 2 式を使った．

【別解】

直線上を等速で運動する質点について，その速度の直交座標系 (x, y) での成分 v_x, v_y は x, y には依存しない定数として容易に書き下せる．すると式 (1.46) により速度の極座標成分 v_r, v_φ はそれら定数と平面極座標の φ で表される．一方で，それら v_r, v_φ は式 (1.49) によって極座標 r, φ と極座標の微分 $\dot{r}, \dot{\varphi}$ で表すことができる．これらを $\dot{r}, \dot{\varphi}$ に対する方程式として解けば答が得られるが，注意することは φ の関数として表わさなければならないことで，r を消去するために軌跡を条件として用いる必要がある．

まず，速度の直交座標成分は，

$$v_x = -V, \qquad v_y = 0$$

である．これらを式 (1.46) に代入すると

$$v_r = -V\cos\varphi, \qquad v_\varphi = V\sin\varphi. \tag{2}$$

さらに，式 (1.49) は

$$\dot{r} = v_r, \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{r}$$

と書ける．ここに式 (2) を代入する．ただし，最後の式に含まれる r を φ を用いて表すために，粒子の y 座標がつねに a であることを利用する．つまり，

$$y = r\sin\varphi = a \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{a}{\sin\varphi}.$$

こうして次の結果を得る．

$$\dot{r} = -V\cos\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \frac{V}{a}\sin^2\varphi.$$

【解説】

等速直線運動を表すには，直交座標系 (x, y) が便利である．しかし，もし平面極座標系での記述が必要な場合には，本文で述べた変換規則が役に立つ．ここでは，速度の極座標成分 v_r, v_φ は式 (1.44) で定義され，それらは式 (1.46) によって v_x, v_y で表される．

例えば，極座標系で座標の時間変化率は直交座標系 (x, y) の場合と異なり，一定ではなく極値をとることがわかる．実際，$\varphi = \pi/2$ のとき（粒子が y 軸を通過するとき）に，$|\dot{r}|$ が最小（$\dot{r} = 0$）になり，$\dot{\varphi}$ が最大（$\dot{\varphi} = V/a$）になる．

【問題のねらい】

座標，速度などについて，異なる座標系での記述の間の変換規則を応用することができるようにする．

第 2 章　運動方程式

2.2-1

【解答例】

質点の位置座標が時間の関数として与えられているので，時間微分によって速度を時間の関数として計算でき，さらに速度の時間微分によって加速度の式が求められ，これによって，与えられた質量を用いて力を求めることができる．この計算を行うと，速度は $0 < t < t_1$ と $t_1 < t$ の時間帯でそれぞれ $\dot{x} = at$，$\dot{x} = b(t - t_1)$ である．また，加速度はそれぞれ $\ddot{x} = a$，$\ddot{x} = b$ である．加速度と質量

の積により，質点に働いている力はそれぞれ，ma，mb と求まる．数値を代入して $0 < t < 1\,\mathrm{s}$ では $5 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}$，$1\,\mathrm{s} < \mathrm{t}$ では $1.0 \times 10^{-1}\,\mathrm{N}$ である．

位置座標 $x(t)$，速度 $v(t)$，力 $F(t)$ のグラフは図 3 のように描ける．

この運動で速度が時刻 $t = t_1$ で不連続であることは不自然である．このように観測されているならば，理由として直前まで動いていた質点の速度を 0 にさせてしまう力が作用したこと，短時間なので位置はほとんど変わらなかったこと，が考えられる．非常に短い時間だけ作用した大きな力があり，その力積は x 軸の向きに $-m(b-a)$ と推定される．設問の数値の場合には，その大きさは $5 \times 10^{-2}\,\mathrm{N\,s}$ である．

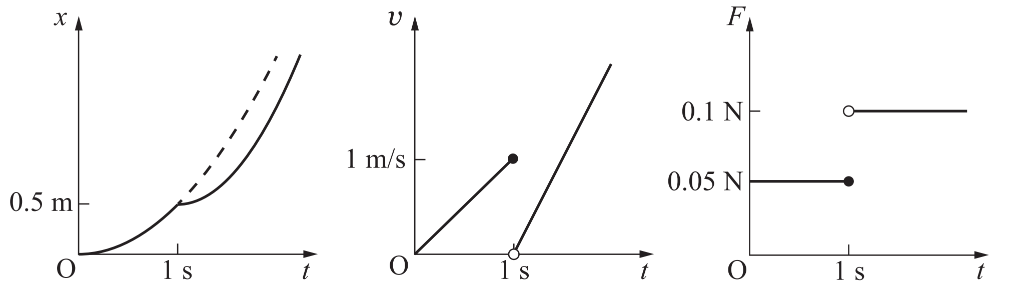

図 3: 問題 2.2-1 の質点の位置座標，速度，働く力

【解説】

本節 (第 2 章 2.2 節）で学ぶことの基本の一つが，時間の関数として与えられた運動する質点の位置から力を求めることである．これを知識として，そのまま使って問題の要求に答える能力は基本である．求まった時間の関数をグラフにすることも同様に必須事項といえる．

ところで，与えられた位置座標の時間変化のデータあるいは数式に意外なことや不自然なことが含まれていないとも限らない．データなどの誤りを疑う場合もあろう．この問いでは不連続という不自然さを例にしてそれを示している．

2.2-2

【解答例】

(1) 図 4 に示すように，斜面から受ける垂直抗力の大きさを R とする．題意から，質点の鉛直方向の運動は起こらないから，垂直抗力を水平方向成分と鉛直方向成分とに分けたうちの鉛直上向き成分は重力とつり合い，$mg = R\sin\theta$ が成り立つ．水平方向成分 $F = R\cos\theta$ は題意から，円運動を起こしている向心力である

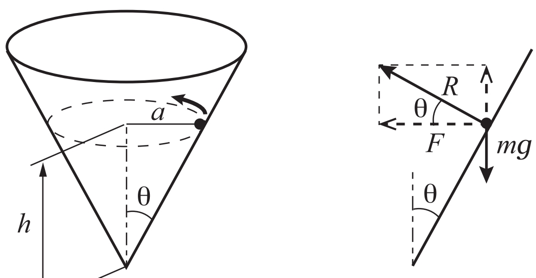

図 4: 問題 2.2-2 の運動のようすと，質点に働く力

(2) 向心力の大きさ F と円運動の角速度 ω の間に $F = m\omega^2 a$ が成り立つ．前の小問で求めた関係より $F = mg/\tan\theta$ が得られるので，$\omega = \sqrt{g/a\tan\theta}$ と求まる．

(3) 与えられた a と h の関係を用いて，$\omega = \sqrt{g/h\tan^2\theta}$ と書ける．この式から，回転運動の面が徐々に下がって h が減少すると，回転の角速度は h の平方根に反比例して増大することが分かる．

問いの趣旨は，向心力を用いて考えることにあるので，小問 (1) で示した向心力 F の式に注目す

る．R は重力と面の傾き角 θ のみで定まり，半径 a には依らない．したがって F も同様であり．高さが減って半径が減っても向心力は変わらないといえる．つまり，小問 (2) の F の表式から ω と a の 1/2 乗の積が一定である．

まとめると，回転する水平面の高さ h が減少して回転の半径が減ったとき，向心力が共通であるので回転の角速度は円運動の半径の 1/2 乗に反比例する．

【解説】

等速円運動をする質点に働く力について，本節ではニュートンの運動法則から導かれることを示し，第 2 法則の例として理解されるように書かれているが，結果は円の半径と回転の角速度を用いた公式のように得られている．これが与えられたので，応用することによって公式としての親しみを増すことも期待されている．なぜ力が（言い換えれば加速度が）角速度の 2 乗に比例するかを思いながら公式として記憶することができれば役に立つであろう．この節で学んだことに沿っていえば，それは加速度が時間での 2 階微分によって求められるから，である．

もう一つ，この問題設定の目的は等速円運動の加速度（つまり質点に働く力）の向きについて，慣れることも想定している．力が軌跡の存在する平面の中にあって円の中心を向いていることを単なる知識ではなく，斜面で質点に働く力のつり合いや合成を考えるときに，思い出して役に立てることが大事である．

2.3-1

【解答例】

ニュートンの運動方程式に基づいて，地表付近の重力により物体が一定加速度の運動をするとその軌跡は放物線になることを学んだ．題意は，その軌跡を一般に式 (2.30) として求めたうえで，初期条件に合わせて定数を選んで軌跡の方程式を求め，図 2.11 に定義された飛距離を計算することである．

図 2.11 のように x 軸と y 軸を設定すると，選手の軌跡は，例題 2.3-1 の場合と同じ式で与えられる．すなわち，

$$y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}$$

この右辺をまとめなおすと，曲線が原点 $(0,0)$ を通ることを顕に示す方程式，

$$y = -\frac{gx}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(x - \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right). \tag{3}$$

が得られる．一方，斜面の方程式は

$$y = -x\tan\alpha \tag{4}$$

で与えられるから，斜面と軌跡との交点の x 座標は，

$$-\frac{gx}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(x - \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right) = -x\tan\alpha$$

を満たす．選手が着地する地点の x 座標は，この方程式の $x \neq 0$ の解である．すなわち，

$$x - \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{2(v_0\cos\theta)^2}{g}\tan\alpha \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos\alpha}$$

と計算できる．また，飛距離 ℓ と着地点の x 座標は，$x = \ell\cos\alpha$ という関係にあるので，

$$\ell = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$$

となる．この式で θ に依存する部分は

$$\begin{aligned}2\cos\theta\sin(\theta+\alpha) &= 2\cos\theta(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) = \sin 2\theta\cos\alpha + (\cos 2\theta + 1)\sin\alpha \\ &= \sin(2\theta+\alpha) + \sin\alpha\end{aligned}$$

と書き換えることができるので，$2\theta + \alpha = \pi/2$ のとき，すなわち

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

のときに ℓ が最大になることが分かる．

【解説】

投射体の水平到達距離を求める計算はよく知られていて，この教科書でも例題 2.3-1 で取り上げた．その類題として投射点から水平方向の距離ではなく，着地面が傾いているという一段階応用の程度を上げた問題である．軌跡との交点を求める手続きは同じであり，解くべき方程式が少し変わる．結果の表式で $\alpha = 0$ と置いてみると，お手本にした問題の答に帰着することがわかり，どのように複雑化されたのかを考察することもできる．

【問題のねらい】

例題 2.3-1 は高校生の時に解いて答を知っているから少し違う問題で力を試してみたいという人にはこの問題は役に立つ．このように，解き方を知っている問題と細部で少し違うような問題を解くことは，知っている解答を再現しながら新しい部分を付け加えて解答を作ることの練習になる．一般に，込み入った題意の問題を解く場合に，簡単化した設定の問題を先に一度解いておくことは有効である．計算などの負担を軽くし，見通しをよくして，間違いの可能性を減らしたうえで解答を作り，それに追加する形で本来の問題の解答を作っていくと，楽に解けるものである．

【教訓】

問題のページの脚注最後の問に答えることは簡単ではない．しかし，答えようとしてそれぞれに考えることがあれば，それは今後の役に立つ．一つの例を書いておく．

例題 2.3-1 では，軌跡の方程式を使って投げ上げ角度 α が 45° の時に最大飛距離が出ることが示せた．これをもっと簡単に説明してみる．飛距離は水平速度と滞空時間の積である．したがって速度の水平方向成分が $v\cos\theta$，また滞空時間が初速度の鉛直成分で $2v\sin\theta/g$ と表せることにより，飛距離は $\cos\theta\sin\theta$ に比例することがいえる．この量が最大になる条件は $\theta = \pi/4$ である．本問でも同じように考えられないだろうか．しかし残念ながら，落下点の高さが飛距離とともに下がっていくので，滞空時間の計算が簡単ではない．上記の，軌跡の方程式から求める方法が能率の点から見て最適であるようだ．

2.4-1

【解答例】

例題 2.4-1 では，ばね定数と物体の質量が与えられているとして運動を予測した．題意は，経験的にばね定数を知って例題のような運動について物体がばねから離れるときの速さを数値で求めることである．

ばね定数は重力とばねの力のつり合い条件を使って求められる．物体の質量を m，ばねのばね定数を k としておき，ばねにおもりを吊したときのばねの伸びを ℓ とすると，$k = mg/\ell$ が成り立つ．

例題 2.4-1 のようにばねを水平に置いて物体を接触させ，最初に手でばねを a だけ縮めたあとで静かに手を放すとき，ばねが物体を押し出し，物体がばねから離れた後の速さ v は例題に説明したような計算により，$v = a\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ と求まる．この k に，上記で得られた表式を代入すると，速さは

$$v = a\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

で与えられる．この式に，$a = 3.0\,\mathrm{cm}$，$g = 980\,\mathrm{cm/s^2}$，$\ell = 2.0\,\mathrm{cm}$ を代入して計算すると，$v = 66\,\mathrm{cm/s}$ を得る．

【解説】

例題 2.4-1 は，ばねと物体が固定されていない投げ出し運動の設定なので，単に運動方程式を解くだけではなく力と加速の法則を用いて考えることを要求している．例題について示された解に従っていけばよいが，なぜ自然長の位置で物体がばねから離れるかについては，以下のように考えるとよい．

ばねと物体の間に働く力を考えてみよう．ばねが自然長よりも短い状態では，先端が止まっていようが動いていようが，自然長に戻る方向に力を及ぼす．この力によって物体はばねに押されてさらに加速される．つまり，ばねが自然長より短いときには，ばねと物体は押し合っていて離れることがな

い．自然長を超すとばねは縮もうとするのに対して，物体は押されなければ力が働かない限り一定の速度で進もうとするので，ばねと物体は離れる．

【問題のねらい】

ばねを使って何らかの行動をとる場合，例えば物体を接触させて押し縮め，反発力で放出するとき，ばね定数が与えられているとは限らない．どうすれば求まるか．この問題はその答えを示唆している．複数の違った知識を組み合わせて問題を解決する力をつけること．

2.6-1

【解答例】

例題 2.6-1 では運動方程式を使わずに運動の特徴を式で表すことが課題であった．本問の題意はその結果を利用して，糸の張力を運動方程式によって求めることにある．

張力を T とおき，運動方程式をたて，例題の結果を代入できるようにする．質点に対する拘束条件から，質点に作用する力の x 成分は $F_x = -T\cos\theta$ で与えられるので，運動方程式の x 成分は，

$$-T\cos\theta = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{m\ddot{x}}{\cos\theta} \tag{5}$$

となる．$\ddot{x}$ を求めるために例題 2.6-1 の途中の式を利用すると，$\dot{x} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta$ であり，$\ell\dot{\theta} = v_0$ であるから，

$$\dot{x} = -v_0\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -v_0\dot{\theta}\cos\theta$$

を得る．これを式 (5) に代入すると

$$T = mv_0\dot{\theta}$$

となる．ここで，再度 $\ell\dot{\theta} = v_0$ を用いて，

$$T = \frac{mv_0^2}{\ell}$$

が得られる．この式の ℓ に式 (2.53) を代入すると式 (2.54) になる．

【解説】

運動が与えられると運動方程式から力が求まることを実行してみる問題である．

【問題のねらい】

例題でとりあげられた運動について，教科書の記述としては完結していない．学習者が，運動方程式を使って力を求めることにより補完することになる．その双方を併せて，拘束条件のもとでの運動についてその記述の方法と運動方程式が意味することを学ぶ．拘束条件の用い方に慣れることも本問のねらいである．

第 3 章　仕事とエネルギー

3.3-1

【解答例】

問題の前半は，1 次元運動における重力のポテンシャルを問うものである．重力は質点の位置に依存し，速度やほかの変数には依存しないので，定義式 (3.8) に従って重力の表式からポテンシャルエネルギーの表式を求めることができる．題意により $x_* = 0$ である．右辺を本問で与えられた式に置き換えて計算すると，

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x F(x')\,dx' = \int_0^x \frac{mgR^2}{(R+x')^2}\,dx' = \left[-\frac{mgR^2}{R+x'}\right]_0^x \\ &= mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+x}\right) = \frac{mgRx}{R+x}. \end{aligned}$$

問題の後半では，3 次元運動における重力ポテンシャルを問うている．後半部における x の定義が前半部とは異なっていることに注意する必要がある．地球による重力は，地球の中心に向かう中心力と考えてよい（詳しくは 3.5 節参照）．質量 m の物体に作用する重力 $\boldsymbol{F}$ の大きさは r^2 に反比例し，

地表（$r=R$）では mg なので，

$$\boldsymbol{F} = -\frac{mgR^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r = f(r)\boldsymbol{e}_r, \qquad f(r) = -\frac{mgR^2}{r^2} \tag{6}$$

と表すことができる．ただし，$\boldsymbol{e}_r$ は地球の中心からみて物体の方向を向く単位ベクトルである．中心力のポテンシャルは本文の式 (3.29) を用いて計算できるので，この式に上記の $f(r)$ の式と $r_* = \infty$（基準点が無限遠なので）を代入して計算すると，

$$U(r) = -\int_\infty^r f(r')\,dr' = \int_\infty^r \frac{mgR^2}{(r')^2}\,dr' = \left[-\frac{mgR^2}{r'}\right]_\infty^r = -\frac{mgR^2}{r} \qquad (r > R).$$

つぎに，地球の中心を原点とする直交座標を (x,y,z) として，ポテンシャルの偏微分 $\partial U/\partial x$ 等を計算して，式 (3.23) により重力 $\boldsymbol{F}$ の成分を求める．いま，ポテンシャルは $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の関数として与えられているので，例えば x による偏微分は（合成関数の微分の規則を使って）次のように計算できる．

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{dU}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{dU}{dr}\frac{x}{r}.$$

さらに，$U(r)$ の結果より $dU/dr = mgR^2/r^2$ となるので

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{mgR^2}{r^3}x$$

を得る．y や z による偏微分も同様で，上の結果において x を y や z で置き換えたものが得られる．したがって，式 (3.23) より，

$$F_x = -\frac{mgR^2}{r^3}x, \quad F_y = -\frac{mgR^2}{r^3}y, \quad F_z = -\frac{mgR^2}{r^3}z.$$

これをベクトル表記すると式 (6) のようになる．こうして，ポテンシャルの計算に間違いがないことが確認できる．特にこの結果で $y=z=0$ とおくと，$x>R$ ならば $r=x$ となることに注意して，

$$\boldsymbol{F}(x,0,0) = \left(-\frac{mgR^2}{x^2}, 0, 0\right) \qquad (x > R)$$

を得る．この力の x 成分は,（問題の前半部と後半部で x の定義が異なることに注意すると）前半の問題で与えた $F(x)$ の式と矛盾しないことがわかる．

【解説】

ポテンシャルエネルギーを学んだ．最も身近に感じられる力の一つである重力についてポテンシャルエネルギーを知ることが重要である．積分の計算は容易であるが，重力のポテンシャルは基本的で重要である．

前半部の結果は，$x \ll R$ の場合には $U \approx mgx$ となり，地表付近での見慣れた重力ポテンシャルエネルギーの式が得られる．このように得られた結果の極限が，すでに知っている結果に一致するかどうかを調べることにより，結果に間違いがないかどうかのチェックをすることができる．

【問題のねらい】

力とポテンシャルの関係について間違いなく理解できること．力の向きと符号について注意深くすることと同じように，ポテンシャルの符号とその増加する方向（ポテンシャルの勾配のことである）について注意する感覚が育つこと．問題の後半部では，3 次元のポテンシャルの計算および偏微分の計算に慣れることもねらっている．

3.3-2

【解答例】

ひもの回転角を φ とすると，おもりの速さは $\ell\dot{\varphi}$ であるから，エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\varphi})^2 + mg\ell(1-\cos\varphi)$$

と表される．初期条件（$\varphi = 0$ のとき $\ell\dot{\varphi} = v_0$）より $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ である．したがって，エネルギー保存則より

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{\ell}\left(\frac{v_0^2}{g\ell} + 2\cos\varphi - 2\right). \tag{7}$$

また，ひもの張力を T とすると，半径方向の運動方程式は

$$m\ell\dot{\varphi}^2 = T - mg\cos\varphi$$

と表される．これら二つの式から $\dot{\varphi}$ を消去して，

$$T = mg\left(\frac{v_0^2}{g\ell} + 3\cos\varphi - 2\right). \tag{8}$$

が得られる．

いま，式 (7) の左辺は負になることはないので，この式より φ の範囲は

$$\frac{v_0^2}{g\ell} \geq 2(1 - \cos\varphi) \tag{9}$$

に限られることが分かる．また，ひもがたるまないためには $T \geq 0$ でなければならないので，式 (8) より，ひもがたるまない条件として

$$\frac{v_0^2}{g\ell} \geq 2 - 3\cos\varphi \tag{10}$$

が得られる．条件 (9) は図 5 の曲線 a の上側の領域に対応し，条件 (10) は曲線 b の上側の領域に対応する．この図から分かるように，$v_0^2/g\ell \leq 2$ の場合には条件 (9) を満たす φ の領域（図 の水平線 i）において，条件 (10) は満たされる．この場合には，ひもはたるむことなく，$-\varphi_{\max} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ の範囲で振動を行う．また，$v_0^2/g\ell > 5$ の場合には全ての φ の領域で条件 (9) と (10) が満たされる（図 の水平線 iii）．この場合には，ひもはたるむことなく，おもりは回転運動（$\dot{\varphi} > 0$）を行う．そして，$2 < v_0^2/g\ell < 5$ の場合には，条件 (9) を満たす φ の領域の一部分（図 の水平線 ii）だけで，条件 (10) が満たされる．つまり，条件 (10) の等号を満たす角度 φ に達したときに $T = 0$ となって，その後はひもがたるむ．よって，ひもがたるむための v_0 の条件は

$$\sqrt{2g\ell} < v_0 < \sqrt{5g\ell}$$

であり，ひもがたるむときの回転角 φ_0 は

$$\frac{v_0^2}{g\ell} = 2 - 3\cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_0 = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3g\ell}$$

で与えられる．

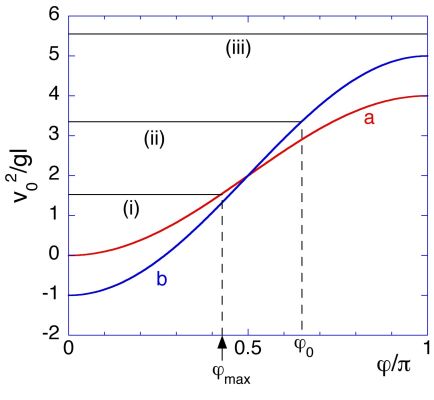

図 5:　曲線 a と b はそれぞれ，不等式 (9) と (10) の右辺の関数のグラフである．

3.3-3

【解答例】

(1) $x > 0$ の領域では重力によるポテンシャルエネルギーだけが存在するので $U(x) = mgx\sin\alpha$．$x \leq 0$ の領域では，これにバネによるポテンシャルエネルギーが加わるので $U(x) = mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}kx^2$．$U(x)$ のグラフは図 6 のようになる．

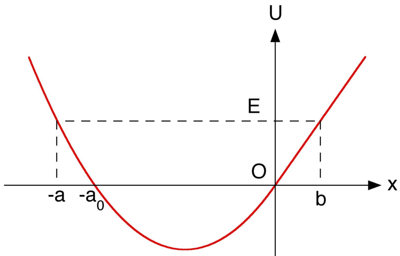

図 6: ポテンシャル $U(x)$ のグラフ．$x>0$ の領域では直線，$x<0$ では放物線である．

(2) 初期状態では $x=-a$，$\dot{x}=0$ なので，エネルギーは

$$E=U(-a)=\frac{1}{2}ka^2-mga\sin\alpha. \tag{11}$$

エネルギー保存則

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)$$

より，($\dot{x}^2\geq 0$ なので）運動は $E\geq U(x)$ の範囲で起きる．ポテンシャル $U(x)$ のグラフから分かるように，$E\leq 0$ ならば運動の範囲は $x\leq 0$ の領域にとどまるので，質点はバネから離れることなく運動を続ける．一方，$E>0$ ならば，$x>0$ の領域にまで質点は到達するので，バネから離れることがある．式 (11) より，$E=0$ となるのは a の値が

$$\frac{1}{2}ka^2-mga\sin\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{2mg}{k}\sin\alpha$$

となるときである．よって，$a_0=(2mg/k)\sin\alpha$．

(3) a_0 を使うと，$mg\sin\alpha=ka_0/2$ と表されるので，式 (11) は $E=ka(a-a_0)/2$ と書き換えられる．$a>a_0$ の場合に質点が達する最高点の座標を b とすると，最高点では $\dot{x}=0$ だから，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}ka(a-a_0)=U(b)$$

が成り立つ．いま，$b>0$ だから $U(b)=mgb\sin\alpha=ka_0b/2$．したがって

$$b=a\left(\frac{a}{a_0}-1\right).$$

3.4-1

【解答例】

最初の位置が高さ h であると分かっているとき，重力のポテンシャルエネルギーは mgh である．これと，最後の位置が未知数であるときのバネと重力のポテンシャルエネルギーとを使って，エネルギー保存則を方程式として解く．

バネの最大の縮みを ℓ とする．落下し始めるときと，バネが最も縮むときには質点の速度はゼロなので，エネルギー保存則より，

$$mgh=\frac{1}{2}k\ell^2-mg\ell$$

が成り立つ．これを ℓ について解くと，

$$\ell=\frac{mg}{k}\pm\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{2mgh}{k}}$$

となる．$\ell>0$ でなければならないので，複号のうち $+$ を採用する．よって，

$$\ell=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right).$$

【解説】

最も身近にあって重力とともにポピュラーな保存力がバネの力である．本問はこの両方が絡む問題である．質点の運動を，運動方程式ではじめから終わりまで追いかけるとしたら，途中で力が交代するので手続は面倒である．この解答例のように，ポテンシャルエネルギーの形にして方程式を立てる

と方程式も簡単になり，容易に解けることがわかる．力のポテンシャルが位置エネルギーの役割を果たしており，高校時代からこの考え方に慣れている人にはなじみの問題であろう．

【問題のねらい】

力学的エネルギー保存則を用いると容易に解ける問題があることを知り，解く際の基本的な考え方に慣れること．保存則の利用は，物理学において極めて有用で重要性も高い．

3.4-2

【解答例】

鉛直上向きに x 軸をとり，地表を座標原点に選ぶ．地球の重力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は問題 3.3-1 で求めており，$U(x) = mgRx/(R+x)$ である．エネルギー保存則より，$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(0) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ が成り立つ．この式に $U(x)$ の表式を代入して整理すると，次が得られる：

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{2gRx}{R+x}. \tag{12}$$

(1) 式 (12) の右辺は x の単調減少関数であり，$x \to \infty$ のとき $v_0^2 - 2gR$ に収束する．したがって $v_0^2 > 2gR$ であれば常に $\dot{x}^2 > 0$ が成り立ち，$\dot{x} > 0$ は時間とともに減少するけれどもゼロになることはなく，物体は無限遠まで飛び去る．よって，

$$v_c = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \times (6.37 \times 10^6\,\mathrm{m/s})} = 11.17\,\mathrm{km/s}.$$

(2) 物体が到達する最高点 $x = h$ において $\dot{x} = 0$ だから，式 (12) より，

$$v_0^2 = \frac{2gRh}{R+h} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}. \tag{13}$$

(3) 式 (13) を使って式 (12) 右辺の v_0 を h で表して整理すると，

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gR^2(h-x)}{(R+h)(R+x)}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{R+x}{h-x}}\,\frac{dx}{dt}$$

となる．この式の両辺を $t = 0$ から $t = T$ まで積分すると，

$$\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\,T = \int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}}\,dx. \tag{14}$$

以上でこの問題に対する解答は完結するが，参考までにこの積分を実行して式 (3.38) を導く過程も説明しよう．この積分を実行するために $y = \sqrt{(h-x)/(R+x)}$ と置換すると，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R+h}{2(R+x)^2}\sqrt{\frac{R+x}{h-x}}, \quad R + x = \frac{R+h}{1+y^2}$$

となる．したがって，式 (14) の右辺は

$$\int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}}\,dx = 2(R+h)\int_0^{\sqrt{h/R}} \frac{dy}{(1+y^2)^2}$$

と書き換えられる．さらに，この式の右辺の積分は，部分積分を利用して，

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^2} &= \int \left[\frac{1}{1+y^2} - \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\right] dy = \arctan y - \left\{-y \cdot \frac{1}{2(1+y^2)} + \int \frac{dy}{2(1+y^2)}\right\} \\ &= \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2}\arctan y\end{aligned}$$

と実行できる．よって，式 (14) の右辺は

$$\int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}}\,dx = 2(R+h)\left[\frac{\sqrt{Rh}}{2(R+h)} + \frac{1}{2}\arctan\sqrt{\frac{h}{R}}\right]$$

となる．したがって，式 (14) より次の結果を得る．

$$T = \sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left[\sqrt{\frac{h}{R}} + \left(1 + \frac{h}{R}\right)\arctan\sqrt{\frac{h}{R}}\right]. \tag{15}$$

(4) 式 (13) の第一式と式 (15) に $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$，$R = 6.37\times 10^3\,\mathrm{km}$ と $h = 400\,\mathrm{km}$ を代入すると，$v_0 = 2.72\,\mathrm{km/s}$ と $T = 300.6\,\mathrm{s} = 5.01\,\mathrm{min}$ が得られる．また，$h = 3.58\times 10^4\,\mathrm{km}$ の場合には，$v_0 = 10.30\,\mathrm{km/s}$，$T = 1.477\times 10^4\,\mathrm{s} = 4.10\,\mathrm{h}$ が得られる．

3.5-1

【解答例】

本文の図 3.13 に示されているように，問題にしている球形の物体を薄い球殻の集まりとみなす．物体による重力ポテンシャルは，それぞれの球殻による重力のポテンシャルの表式を求めてその和をとればよい．

いま注目する球殻を，半径 a の球面と半径 $a + da$ の球面に挟まれた領域とする．この体積は $4\pi a^2 da$ であり，その質量を $M_{\mathrm{shell}}(a, da)$ と記すと $M_{\mathrm{shell}}(a, da) = 4\pi a^2\rho(a)da$ である．球殻の外部の点にある質点に対するこの球殻の質量による重力のポテンシャルは，球殻上で質量が一様に分布していることから，球殻の質量が中心に集中しているとした場合の重力のポテンシャルで与えられる．このことは文中の式 (3.44) の導出と同様にして示すことができる．球の中心と質量 m の質点の距離を r とし，このポテンシャルを $U_{\mathrm{shell}}(r; a, da)$ と記し，式 (3.44) の表式を利用すると，$U_{\mathrm{shell}}(r; a, da) = -GM_{\mathrm{shell}}(a, da)m/r$ で表される．

求める球状の物体によるポテンシャル $U(r)$ は，質点の位置がどの球殻についてもその外側にあることから，単にすべての球殻についてポテンシャルの和によって以下のように求められる．

$$U(r) = (U_{\mathrm{shell}}(r; a, da)\ \text{の総和}) = -\int_0^R \frac{G\times\left(4\pi a^2\rho(a)da\right)m}{r}$$

この a についての積分を実行して，$M = \int_0^R \rho(a)\times 4\pi a^2 da$ より，$U(r) = -\dfrac{GMm}{r}$ であることが示された．

【解説】

本文の 3.5 節では，式 (3.42) が成り立つ条件として質量が一様に分布していることを用いたが，実は，$r \geq R$ の表式は質量分布が球対称でありさえすれば成り立つ．本問には，このことに注意を向ける意味がある．ただし，式 (3.42) において，$r < R$ の表式は質量分布が一様な場合にだけ成り立つのだ，ということも注意しておく．

また，保存力が与えられるとそのポテンシャルが定義され，その表式を求めることができるが，力の起源が複数の場合それらの和をとることは，一般にはベクトルである力そのものの和としては困難である．そのような場合でもポテンシャルはスカラー量であるために和を容易に求められる．この問題ではそのことが実感できるであろう．

3.5-2

【解答例】

重力加速度は，重力による質点の運動の加速度であり，力が質点の質量と加速度の積であることから重力の大きさから求めることができる．地上における重力の大きさ F は，地球の質量を M，質点の質量を m，重力定数を G，地球の中心から地表までの距離を R とすると，$F = GMm/R^2$ である．よって重力加速度は $g = GM/R^2$ となる．与えられた数値を代入して計算すると，$g = 9.820\,\mathrm{m/s^2}$．

3.5-3

【解答例】

トンネル中を運動する質量 m の質点に作用する地球の重力は式 (3.43) に与えられる．これにより運動方程式を立て，それを解いて運動を求める．

地球の中心を原点とし，トンネルに沿って中心から入り口に向かって x 軸をとる．地球の半径を R とする．質点の位置を x とすると，質点と地球の中心の距離は $r = |x|$ である．質点に作用する x 方向の力 F は，式 (3.43) の $r < R$ の場合を適用して，

$$F = -\frac{GMm}{R^3}x$$

と表される．ここで力の向きはは質点の位置から原点に向かうことから，F の符号は x の符号と逆になることに注意する．これより，運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{R^3}x, \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

ただし，ω を $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ で定義した．この方程式に従う運動は単振動であり，入り口から出口までを振幅の小さい単振子のように往復運動する．その周期は $T = 2\pi/\omega$ である．

計算のため数値をとりやすい重力加速度 g を $g = GM/R^2$ を用いて周期の式の中に代入すると $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ が得られる．$R = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$，$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ を代入して，求める所要時間は周期の半分であることから，約 42 分．

3.5-4

【解答例】

(1) 等速円運動をする人工衛星の質量を m，円運動の半径を r，速さを v_0 とすると，この加速度は ${v_0}^2/r$ である．これの地球の中心からの距離が r であることから，本節で示されたことにより重力の大きさは GMm/r^2 である．よって，運動方程式は

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{m{v_0}^2}{r}$$

となる．また，$r = R + h$ が与えられているので，これより

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

が得られる．

(2) 円運動の速さが v_0 で半径が r のとき周期は一周に要する時間として求まり，$T = 2\pi r/v_0$ である．$r = R + h$ と前の小問の式から，

$$T = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

である．問題 3.5-2 で与えられた R, M, G の数値とここで与えられた h を用いて $92\,\mathrm{min}$ と求まる．

(3) 静止衛星の高度を H，地球の自転周期を T，地球の半径を R とすると，前の小問の式の高度 h に H を用いて，$R + H = (T\sqrt{GM}/2\pi)^{2/3}$ である．したがって

$$H = (GM)^{1/3}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{2/3} - R$$

となる．与えられた T と問題 3.5-2 の R, M, G の値を用いて $H = 3.579 \times 10^4\,\mathrm{km}$ と求まる．