

『工科系の物理学基礎』問題の解答例と解説

2023年8月2日 修正版 (修正箇所はp.34)

※解答には複数の答え方があってよい。ここに挙げた例はその一つである。解答例とともに、読者の学びのために解説などを記す。解説では、問題の背景や解答で用いた方法や考え方の補足説明と書き方について必要な注意を述べる。その他関連した事柄も含まれる。問題のねらい、として教科書の中でのその問題の位置づけを述べる。

※解答を作成する際に心がけるべきこと：解答として教科書の中で説明された基本事項については説明を省くことが許される場合がある。その場合でも、計算の理由と具体的な計算について省かずに記すこと。

※有効数字について：

有効数字について物理量の数値を答える問題では有効数字を考慮して解答すること。ただし本書では、問題文からは有効数字が明確でない場合には、有効数字2桁で答えるようにしてください。また題意から有効数字の桁数を予想できるものもあります。例えば気圧の高度による違いを知るために高度が0mと100mの気圧はそれぞれ何ヘクトパスカルか、と問われれば4桁の数値が必要になります。将来、精度を重視した計算をする場合は次の5点に注意して対応する必要があります。

1. 例えば300, -23456, 0.0023, -40.000000について、それぞれ有効数字の桁数(有効桁数)は3桁, 5桁, 2桁, 8桁である。指数表記の場合は、 0.37×10^5 , -0.8300×10^{-9} , 2.99792×10^8 の有効数字はそれぞれ2桁, 4桁, 6桁である。有効数字の一番下の桁の数字はさらに1桁下の数字を四捨五入した値を意味し、一番下の位の数字はより精度の高い数値と比べれば ± 1 変化しうる。また実験的に得られた数値は複数回測定値の平均値や正規分布の中心値等を意味するため、一番下の位の数字の変動幅は1より大きい場合がある。

補足) 長さ300mと記載したときの数値300は整数表記ではあるが小数点以下を略した実数の意味である。通常は3桁の有効数字とみなすが、一の位と十の位の0は四捨五入された場合もあるため有効数字1桁の場合や有効数字が2桁の場合が含まれる。そのため精確に有効数字2桁で表記する際は指数表記 3.0×10^2 とする。多くの書籍では精確な表記が省略される場合がしばしば見られるが、精密な計算の場合は指数表記を使用すると良い。

2. 一番上の位の数字が1の場合は注意が必要である。例えば気圧が1013hPaと記されていれば、通常は有効数字4桁として扱うが、誤差は ~ 1 hPaであるから相対誤差が $\sim 1/1013$ である。有効数字3桁で書かれた低気圧981hPaの誤差も ~ 1 hPaであるからその相対誤差は $\sim 1/981$ であり、1013hPaの相対誤差とほぼ同じである。つまりある数値の一番上の位の数字が1の場合は、相対誤差を考慮して有効数字桁数を見かけの桁数より1つ下げて扱う必要がある。一番上の位の数字が2以上であれば通常通りの有効桁数でよい。市販されている電圧等のデジタル計測器の表示digitsが6桁であっても一番上の位の最大数が1の場合、その測定器の有効桁数が $5_{1/2}$ 桁と表記されることもある。

補足) 例えば、 $4.3 \times 0.23 = 0.989$ の場合、4.3も0.23も有効数字2桁なので結果は0.99

となる．ところが， $4.4 \times 0.23 = 1.012$ の場合も有効数字 2 桁の計算なので，1.0 と答えたいところだが，それぞれの相対誤差を $1/44$ と $1/23$ として考えれば，数理統計学で学ぶように上記 2 つの値の積の相対誤差は $[(1/44)^2 + (1/23)^2]^{1/2} = 0.049$ となり，誤差は $1.012 \times 0.049 = 0.050$ となるから，誤差を含めた結果は 1.01 ± 0.05 である．これは $0.96 \sim 1.06$ と幅があるため答えは 1.0 で良いように見えるが誤差は 0.1 の半分 の 0.05 であるから与えられた数値の精度を見捨てないために 1.01 を答えとする．これは変動の中心値と考えればよい．誤差を含めた数値表記 4.40 ± 0.04 ， 0.23 ± 0.01 が与えられている場合，有効桁数を 1 桁上げた計算の結果は 1.012 ± 0.045 となるが，実質の有効数字は 1.01 である．

3. 問題文に，答えの有効数字の指定があれば，解答は有効数字より 1 桁多い計算をしたうえで一番下の桁の数字を四捨五入して決める．問題文に答えの有効数字の記載がない場合は，問題文中に与えられた複数の数値のそれぞれの有効数字を確かめ，問題を解く際に使用する式に与えられた数値を代入することで有効数字が何桁になるかが決まる．例えば数値を代入した式が $1.2 + 2$ の場合，2 の有効桁数が 1 桁であるため小数点以下が不明となり和は有効数字 1 桁の 3 となる． $1.200 + 0.0025$ の場合の答えは 1.203， $1.2 + 0.0025$ の場合の答えは 1.2 となる． $1.200 + 0.25$ の場合は 1.45 となる．つまり複数の小数の和や差の場合は最下位の桁がもっとも小数点に近い数値の有効数字に合わせることになる．

4. 乗除算の場合，例として 1.200×0.0025 は小さいほうの有効数字桁数で決まり 0.0030 となる．

5. 一方で円周率 π や整数の平方根や重力加速度等の既知の数値の場合は，問題で与えられた数値の有効数字より 1 桁多い有効桁数で式に代入して計算を行う．対数や指数等の様々な関数の使用や積分や微分を行う場合，独立変数やパラメータの有効数字が結果の有効数字桁数となる．

第 1 章 運動の記述

1.2-1

【解答例】

まず軌跡を求める．座標が時間の関数として与えられているので，時間 t を消去することができれば軌跡が求まる． x と y の式から， $x^2 + y^2 = R^2$ を示すことができる．これは原点を中心とする半径 R の円である．また， z は常に 0 であるから，軌跡は xy 平面上にある．次に，運動の始点と向きを求める． $t = 0$ とすると質点の y 座標と z 座標は 0 なので， x 軸上にあり， t が増えるに従い $y > 0$ の方向に動くことがわかる．位置座標の三角関数に現れる角速度 ω を用いて，運動の周期は $\frac{2\pi}{\omega}$ と表される．

これらをまとめて，質点は xy 平面上で，原点を中心とする半径 R の円周上を， $z > 0$ の側から見て反時計回りに運動する．時刻 $t = 0$ には， x 軸上の点 $(R, 0, 0)$ を通過し，時間 $2\pi/\omega$ で円周を一周する．

【解説】

問が「運動はどのようなものか」であるとき何を答えるべきか．1.2 節で学んだ範囲で分かったように，運動を表現することは位置座標を時間の関数として表すことである．逆に位置座標が時間の関数で与えられたときに，表現されている運動の特徴とは何か．以下に 1.2 節までで取り上げた運動の特徴をあげてみよう．

1. [全体像] 軌跡の図形

2. [動き] 運動の向き

ここまででは運動の速さについては扱われていない。この問題のように繰り返す運動ならば、周期を答える。

【問題のねらいなど】

質点の運動の様子を記述する方法をここまでで学び、質点の座標を時間の関数として表現することを理解した。そこで、その逆に座標の記述から運動の特徴を把握できることを試している。

【補足】

1.2節まででは速度について学んでいないので、通常の運動の様子を記述で使う「等速円運動」のような言い方は求められていない。

1.3-1

【解答例】

質点の位置が時間の関数として与えられるならば、速度はその関数の微分である。式 (1.10) によって位置を表す x, y, z が時間 t の関数として与えられているので、 x, y, z それぞれを t で微分すると、おのおのが質点の速度ベクトルの x 成分, y 成分, z 成分を与える。それぞれを v_x, v_y, v_z と記すと、微分を計算した結果得られる式をまとめて、 $v_x = a, v_y = 0, v_z = b(c - 2t)$, となる。

【解説】

運動が、位置を表す時間の関数として与えられているので、微分の計算をすること、そのことを整理して記述する。

【問題のねらい】

位置から速度を正しく求めること、そのことを説明できる力をつける。

1.3-2

【解答例】

質点の位置が時間の関数として与えられるならば、速度はその関数の微分である。位置を表す x, y が時間 t の関数として与えられているので、 x, y それぞれを t で微分すると、 $\dot{\theta} = \omega$ であるから、 $v_x = -a\omega \sin \theta, v_y = a\omega \cos \theta$ と求まる。

運動の軌跡は図 1 に示すように半径 a の円周である。各時刻 t での質点の位置の偏角、 $\omega t + \pi/4$, はそれぞれ $\pi/4, \pi/4 + \pi/4 = \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4$ である。速度 \mathbf{v} と位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ が $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ をみたすことが確かめられるので、速度ベクトルは動径方向と垂直、つまり円の接線方向を向く。

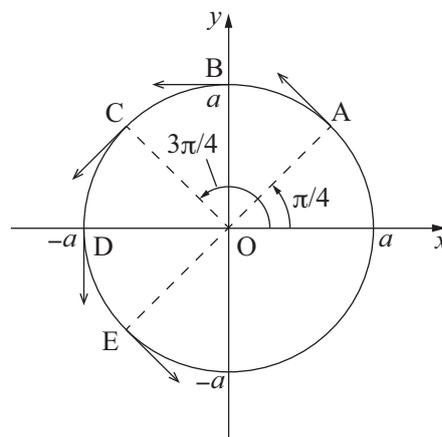


図 1: 円運動をする質点の軌跡と、指定された時刻の速度の方向。A~E は問題で指定された時刻の質点の位置を意味する。矢印は各位置における速度ベクトルの方向を示す。

【解説】

運動が、位置を表す時間の関数として与えられているので、微分の計算をすること、そのことを整

理して記述する.

【問題のねらい】

位置から速度を正しく求めること, 図示して説明できる力をつける.

1.3-3

【解答例】

まず, 円板に巻き付けられた糸がほぐれる場合を考える. 点 P の動きに対する拘束条件によって点 P の座標を表す式を求める. 角度 θ を媒介変数として用いる. 点 P の座標 (x, y) を θ の関数として表し, θ が時間の関数であるとする. したがって, 位置座標を時間で微分して得られる速度は合成関数の微分によって求められる.

質点の座標 (x, y) は点 Q の位置ベクトルとベクトル \overrightarrow{QP} の和で与えられるので, $\mathbf{A} = \overrightarrow{QP}$ とすると, $x = R \cos \theta + A_x$, $y = R \sin \theta + A_y$ である. 線分 PQ の長さが弧 RQ の長さに等しく, 弧 RQ の長さは $R\theta$ であることから, また, ベクトル \overrightarrow{QP} の x 軸を基準にした偏角は $\theta - \frac{\pi}{2}$ であることから, $\mathbf{A} = (R\theta \sin \theta, -R\theta \cos \theta)$ である. これらより,

$$x = R(\cos \theta + \theta \sin \theta), \quad y = R(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

である. これより, v_x, v_y の計算はそれぞれ,

$$v_x = \dot{x} = R(-\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \sin \theta + \theta \dot{\theta} \cos \theta) = R\theta \dot{\theta} \cos \theta,$$

$$v_y = \dot{y} = R(\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \cos \theta + \theta \dot{\theta} \sin \theta) = R\theta \dot{\theta} \sin \theta$$

のようにできる. 題意は, 内積 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ がゼロであることを示すことであるので, 上記の (x, y) と (v_x, v_y) の表式を用いて計算してみると,

$$v_x A_x + v_y A_y = 0$$

が確かめられ, \mathbf{v} と \mathbf{A} は互いに垂直である. すなわち, \mathbf{v} は QP に垂直である.

つぎに, 任意の形状の物体に巻き付けられた糸がほぐれる場合を考える (図 2). 糸の先端を P, ほぐれた部分の糸 QP の長さを s とし, 糸と物体の表面が接する点 Q の座標を $(x(s), y(s))$ とする. QP が x 軸となす角を θ (θ は s の関数として表すことができる) とすると, $\overrightarrow{QP} = (s \cos \theta, s \sin \theta)$ だから, P の座標 (x_P, y_P) は次のように表される.

$$x_P = x + s \cos \theta, \quad y_P = y + s \sin \theta.$$

したがって, 点 P の速度 \mathbf{v} の成分は

$$v_x = \dot{x}_P = \frac{dx_P}{ds} \dot{s} = \left(\frac{dx}{ds} + \cos \theta - s \frac{d\theta}{ds} \sin \theta \right) \dot{s},$$

$$v_y = \dot{y}_P = \frac{dy_P}{ds} \dot{s} = \left(\frac{dy}{ds} + \sin \theta + s \frac{d\theta}{ds} \cos \theta \right) \dot{s}$$

のように計算できる.

ここで, dx/ds と dy/ds を θ を用いて表すために, ほぐれた糸 QP は点 Q における物体の表面の接線方向を向いているという条件を利用する. そのために, 糸がさらに少しだけほぐれて, ほぐれた糸の長さが $s + ds$ になった状況を考える. このときの物体と糸との接点を Q' とすると, $ds \rightarrow 0$ の極限で線分 $Q'Q$ と QP は平行になる. したがって, Q' の座標を $(x + dx, y + dy)$ とすると, $\overrightarrow{Q'Q} = ds$ だから, 次の関係が成り立つ (図 2 の右側の三角形参照).

$$\frac{-dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{-dy}{ds} = \sin \theta.$$

この関係を, 上で導いた v_x, v_y の式に代入して, 次式を得る.

$$\mathbf{v} = (-\sin \theta, \cos \theta) s \dot{s} \frac{d\theta}{ds}.$$

いま, $\overrightarrow{QP} = (s \cos \theta, s \sin \theta)$ であるから, $\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{v} = 0$ となることが確かめられる. すなわち \mathbf{v} は QP に垂直である.

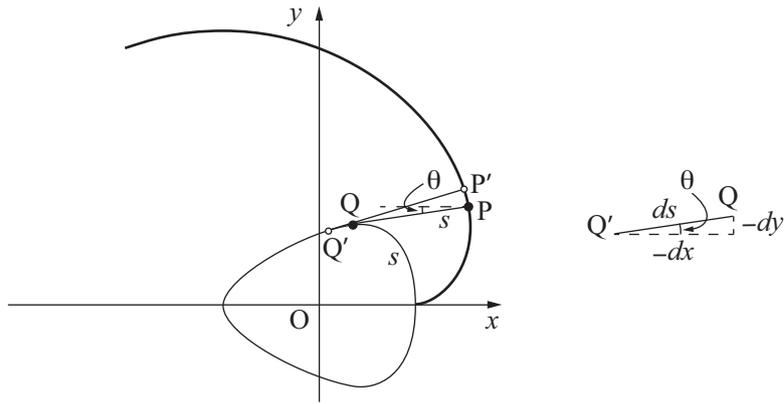


図 2: 任意の形状の物体（細い閉じた曲線）に巻き付けられた糸をほぐすときに糸の先端が描く曲線（太い曲線）. ほぐれた糸の長さが s と $s + ds$ のときの糸の先端がそれぞれ P と P' , ほぐれた糸と物体が接する点がそれぞれ Q と Q' である. また, 線分 QP と x 軸のなす角が θ である. 右の図は線分 $Q'Q$ を拡大したもので, この図では $dx < 0$, $dy < 0$ である.

【解説】

拘束条件が与えられていること, 点 P の座標は時間の関数としては与えられていないこと, がポイントである. 拘束条件を利用するときには, 条件を式で表すとよい. 質点の位置座標が時間の関数として分かっていなくても, 媒介変数を用いればその時間依存性を仮定することにより速度を求めることができ, 条件式を使うことができる. それにより題意にいう速度が満たす関係式を証明することができる. 今の場合はベクトル \vec{QP} の大きさと向きが図より読み取れるので, それを利用するとよい. このとき, 点 Q を通り, それぞれ x 軸と y 軸に平行な 2 本の補助線が役に立つ. ちなみに, ここに現れた点 P の描く図形はインボリュート曲線（伸開線）とよばれていて, 工学において有用である. 他にも拘束条件の下での運動を考える問題を解いてみるとよい.

【問題のねらい】

拘束条件が与えられたときの 2 次元あるいは 3 次元空間の運動を時間やその代わりにの媒介変数によって式で表す力をつける. それによって速度を求めることもできるし, 運動の特徴を表す関係式を導くこともできることを理解する.

【補足】

ある曲線上を運動する質点の速度について, その向きは曲線上で質点の位置における接線の向きである. この問題は, 問題文で定義された曲線の接線についての幾何学上の性質を尋ねているものである.

1.5-1

【解答例】

直線上を等速で運動する質点を原点にいる観測者からみた場合, 質点までの距離 r とその方角 φ が時間と伴にどう変化するかを問う問題である. 単純な運動なので, 直交座標 (x, y) と平面極座標 (r, φ) の基本的関係式

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

もとにして \dot{r} と $\dot{\varphi}$ を計算することができる.

質点が y 軸を横切る時刻を t_0 とすると x と y の時間 t 依存性は次のように表される.

$$x = -V(t - t_0), \quad y = a.$$

これらの式を上関係式に代入すると

$$r \cos \varphi = -V(t - t_0), \quad r \sin \varphi = a \tag{1}$$

となる. \dot{r} と $\dot{\varphi}$ を求めるために, これらの式の両辺を時間で微分すると次式が得られる.

$$\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = -V, \quad \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = 0.$$

この2つの式を連立させて \dot{r} と $\dot{\varphi}$ について解いて, 次の結果を得る.

$$\dot{r} = -V \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{V \sin \varphi}{r} = \frac{V}{r} \sin^2 \varphi.$$

ただし, 最後の式変形では, r を用いずに $\frac{a}{r}$ φ だけを用いて結果を表すために式 (1) の第2式を使った.

【別解】

直線上を等速で運動する質点について, その速度の直交座標系 (x, y) での成分 v_x, v_y は x, y には依存しない定数として容易に書き下せる. すると式 (1.46) により速度の極座標成分 v_r, v_φ はそれら定数と平面極座標の φ で表される. 一方で, それら v_r, v_φ は式 (1.49) によって極座標 r, φ と極座標の微分 $\dot{r}, \dot{\varphi}$ で表すことができる. これらを $\dot{r}, \dot{\varphi}$ に対する方程式として解けば答が得られるが, 注意することは φ の関数として表わさなければならないことで, r を消去するために軌跡を条件として用いる必要がある.

まず, 速度の直交座標成分は,

$$v_x = -V, \quad v_y = 0$$

である. これらを式 (1.46) に代入すると

$$v_r = -V \cos \varphi, \quad v_\varphi = V \sin \varphi. \quad (2)$$

さらに, 式 (1.49) は

$$\dot{r} = v_r, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{r}$$

と書ける. ここに式 (2) を代入する. ただし, 最後の式に含まれる r を φ を用いて表すために, 粒子の y 座標がつねに a であることを利用する. つまり,

$$y = r \sin \varphi = a \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\sin \varphi}.$$

こうして次の結果を得る.

$$\dot{r} = -V \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{V}{a} \sin^2 \varphi.$$

【解説】

等速直線運動を表すには, 直交座標系 (x, y) が便利である. しかし, もし平面極座標系での記述が必要な場合には, 本文で述べた変換規則が役に立つ. ここでは, 速度の極座標成分 v_r, v_φ は式 (1.44) で定義され, それらは式 (1.46) によって v_x, v_y で表される.

例えば, 極座標系で座標の時間変化率は直交座標系 (x, y) の場合と異なり, 一定ではなく極値をとることがわかる. 実際, $\varphi = \pi/2$ のとき (粒子が y 軸を通過するとき) に, $|r|$ が最小 ($\dot{r} = 0$) になり, $\dot{\varphi}$ が最大 ($\dot{\varphi} = V/a$) になる.

【問題のねらい】

座標, 速度などについて, 異なる座標系での記述の間の変換規則を応用することができるようにする.

第2章 運動方程式

2.2-1

【解答例】

質点の位置座標が時間の関数として与えられているので, 時間微分によって速度を時間の関数として計算でき, さらに速度の時間微分によって加速度の式が求められ, これによって, 与えられた質量を用いて力を求めることができる. この計算を行うと, 速度は $0 < t < t_1$ と $t_1 < t$ の時間帯でそれぞれ $\dot{x} = at$, $\dot{x} = b(t - t_1)$ である. また, 加速度はそれぞれ $\ddot{x} = a$, $\ddot{x} = b$ である. 加速度と質量

の積により、質点に働いている力はそれぞれ、 ma 、 mb と求まる。数値を代入して $0 < t < 1\text{s}$ では $5 \times 10^{-2}\text{N}$ 、 $1\text{s} < t$ では $1.0 \times 10^{-1}\text{N}$ である。

位置座標 $x(t)$ 、速度 $v(t)$ 、力 $F(t)$ のグラフは図 3 のように描ける。

この運動で速度が時刻 $t = t_1$ で不連続であることは不自然である。このように観測されているならば、理由として直前まで動いていた質点の速度を 0 にさせてしまう力が作用したこと、短時間なので位置はほとんど変わらなかったこと、が考えられる。非常に短い時間だけ作用した大きな力があり、その力積は x 軸の向きに $-m(b-a)$ と推定される。設問の数値の場合には、その大きさは $5 \times 10^{-2}\text{Ns}$ である。

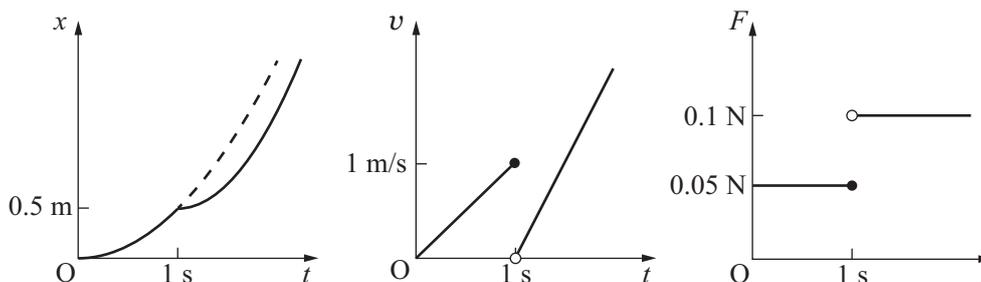


図 3: 問題 2.2-1 の質点の位置座標, 速度, 働く力

【解説】

本節(第2章2.2節)で学ぶことの基本の一つが、時間の関数として与えられた運動する質点の位置から力を求めることである。これを知識として、そのまま使って問題の要求に答える能力は基本である。求まった時間の関数をグラフにすることも同様に必須事項といえる。

ところで、与えられた位置座標の時間変化のデータあるいは数式に意外なことや不自然なことが含まれていないとも限らない。データなどの誤りを疑う場合もあろう。この問いでは不連続という不自然さを例にしてそれを示している。

2.2-2

【解答例】

(1) 図 4 に示すように、斜面から受ける垂直抗力の大きさを R とする。題意から、質点の鉛直方向の運動は起こらないから、垂直抗力を水平方向成分と鉛直方向成分とに分けたうちの鉛直上向き成分は重力とつり合い、 $mg = R \sin \theta$ が成り立つ。水平方向成分 $F = R \cos \theta$ は題意から、円運動を起している向心力である

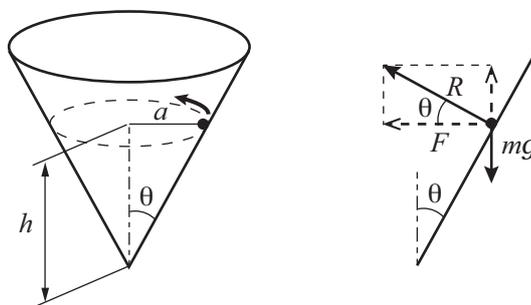


図 4: 問題 2.2-2 の運動のようすと、質点に働く力

(2) 向心力の大きさ F と円運動の角速度 ω の間に $F = m\omega^2 a$ が成り立つ。前の小問で求めた関係より $F = mg / \tan \theta$ が得られるので、 $\omega = \sqrt{g/a \tan \theta}$ と求まる。

(3) 与えられた a と h の関係を用いて、 $\omega = \sqrt{g/h \tan^2 \theta}$ と書ける。この式から、回転運動の面が徐々に下がって h が減少すると、回転の角速度は h の平方根に反比例して増大することが分かる。

問いの趣旨は、向心力を用いて考えることにあるので、小問 (1) で示した向心力 F の式に注目す

る。 R は重力と面の傾き角 θ のみで定まり、半径 a には依らない。したがって F も同様であり。高さが減って半径が減っても向心力は変わらないといえる。つまり、小問 (2) の F の表式から ω と a の $1/2$ 乗の積が一定である。

まとめると、回転する水平面の高さ h が減少して回転の半径が減ったとき、向心力が共通であるので回転の角速度は円運動の半径の $1/2$ 乗に反比例する。

【解説】

等速円運動をする質点に働く力について、本節ではニュートンの運動法則から導かれることを示し、第2法則の例として理解されるように書かれているが、結果は円の半径と回転の角速度を用いた公式のように得られている。これが与えられたので、応用することによって公式としての親しみを増すことも期待されている。なぜ力が（言い換えれば加速度が）角速度の2乗に比例するかを思いながら公式として記憶することができれば役に立つであろう。この節で学んだことに沿っていえば、それは加速度が時間での2階微分によって求められるから、である。

もう一つ、この問題設定の目的は等速円運動の加速度（つまり質点に働く力）の向きについて、慣れることも想定している。力が軌跡の存在する平面の中であって円の中心を向いていることを単なる知識ではなく、斜面で質点に働く力のつり合いや合成を考えると、思い出して役に立てることが大事である。

2.3-1

【解答例】

ニュートンの運動方程式に基づいて、地表付近の重力により物体が一定加速度の運動をするとその軌跡は放物線になることを学んだ。題意は、その軌跡を一般に式 (2.30) として求めたうえで、初期条件に合わせて定数を選んで軌跡の方程式を求め、図 2.11 に定義された飛距離を計算することである。

図 2.11 のように x 軸と y 軸を設定すると、選手の軌跡は、例題 2.3-1 の場合と同じ式で与えられる。すなわち、

$$y = -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

この右辺をまとめなおすと、曲線が原点 $(0, 0)$ を通ることを頭に示す方程式、

$$y = -\frac{gx}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right). \tag{3}$$

が得られる。一方、斜面の方程式は

$$y = -x \tan \alpha \tag{4}$$

で与えられるから、斜面と軌跡との交点の x 座標は、

$$-\frac{gx}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right) = -x \tan \alpha$$

を満たす。選手が着地する地点の x 座標は、この方程式の $x \neq 0$ の解である。すなわち、

$$x - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{2(v_0 \cos \theta)^2}{g} \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos \theta}{g \cos \alpha}$$

と計算できる。また、飛距離 ℓ と着地点の x 座標は、 $x = \ell \cos \alpha$ という関係にあるので、

$$\ell = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos \theta}{g \cos^2 \alpha}$$

となる。この式で θ に依存する部分は

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta \sin(\theta + \alpha) &= 2 \cos \theta (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) = \sin 2\theta \cos \alpha + (\cos 2\theta + 1) \sin \alpha \\ &= \sin(2\theta + \alpha) + \sin \alpha \end{aligned}$$

と書き換えることができるので、 $2\theta + \alpha = \pi/2$ のとき、すなわち

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

のときに l が最大になることが分かる。

【解説】

投射体の水平到達距離を求める計算はよく知られていて、この教科書でも例題 2.3-1 で取り上げた。その類題として投射点から水平方向の距離ではなく、着地面が傾いているという一段階応用の程度を上げた問題である。軌跡との交点を求める手続きは同じであり、解くべき方程式が少し変わる。結果の表式で $\alpha = 0$ と置いてみると、お手本にした問題の答に帰着することがわかり、どのように複雑化されたのかを考察することもできる。

【問題のねらい】

例題 2.3-1 は高校生の時に解いて答を知っているから少し違う問題で力を試してみたいという人にはこの問題は役に立つ。このように、解き方を知っている問題と細部で少し違うような問題を解くことは、知っている解答を再現しながら新しい部分を付け加えて解答を作ることの練習になる。一般に、込み入った題意の問題を解く場合に、単純化した設定の問題を先に一度解いておくことは有効である。計算などの負担を軽くし、見通しをよくして、間違いの可能性を減らしたうえで解答を作り、それに追加する形で本来の問題の解答を作っていくと、楽に解けるものである。

【教訓】

問題のページの脚注最後の問に答えることは簡単ではない。しかし、答えようとしてそれぞれに考えることがあれば、それは今後の役に立つ。一つの例を書いておく。

例題 2.3-1 では、軌跡の方程式を使って投げ上げ角度 α が 45° の時に最大飛距離が出ることが示された。これをもっと簡単に説明してみる。飛距離は水平速度と滞空時間の積である。したがって速度の水平方向成分が $v \cos \theta$ 、また滞空時間が初速度の鉛直成分で $2v \sin \theta / g$ と表せることにより、飛距離は $\cos \theta \sin \theta$ に比例することがいえる。この量が最大になる条件は $\theta = \pi/4$ である。本問でも同じように考えられないだろうか。しかし残念ながら、落下点の高さが飛距離とともに下がっていくので、滞空時間の計算が簡単ではない。上記の、軌跡の方程式から求める方法が能率の点から見て最適であるようだ。

2.4-1

【解答例】

例題 2.4-1 では、ばね定数と物体の質量が与えられているとして運動を予測した。題意は、経験的にばね定数を知って例題のような運動について物体がばねから離れるときの速さを数値で求めることである。

ばね定数は重力とばねの力のつり合い条件を使って求められる。物体の質量を m 、ばねのばね定数を k としておき、ばねにおもりを吊したときのばねの伸びを l とすると、 $k = mg/l$ が成り立つ。

例題 2.4-1 のようにばねを水平に置いて物体を接触させ、最初に手でばねを a だけ縮めたあとで静かに手を放すとき、ばねが物体を押し出し、物体がばねから離れた後の速さ v は例題に説明したような計算により、 $v = a\sqrt{\frac{k}{m}}$ と求まる。この k に、上記で得られた表式を代入すると、速さは

$$v = a\sqrt{\frac{g}{l}}$$

で与えられる。この式に、 $a = 3.0 \text{ cm}$ 、 $g = 980 \text{ cm/s}^2$ 、 $l = 2.0 \text{ cm}$ を代入して計算すると、 $v = 66 \text{ cm/s}$ を得る。

【解説】

例題 2.4-1 は、ばねと物体が固定されていない投げ出し運動の設定なので、単に運動方程式を解くだけではなく力と加速の法則を用いて考えることを要求している。例題について示された解に従っていけばよいが、なぜ自然長の位置で物体がばねから離れるかについては、以下のように考えるとよい。

ばねと物体の間に働く力を考えてみよう。ばねが自然長よりも短い状態では、先端が止まっているように動いているように、自然長に戻る方向に力を及ぼす。この力によって物体はばねに押されてさらに加速される。つまり、ばねが自然長より短いときには、ばねと物体は押し合っていて離れることがな

い. 自然長を超すとばねは縮もうとするのに対して, 物体は押されなければ力が働かない限り一定の速度で進もうとするので, ばねと物体は離れる.

【問題のねらい】

ばねを使って何らかの行動をとる場合, 例えば物体を接触させて押し縮め, 反発力で放出するとき, ばね定数が与えられているとは限らない. どうすれば求まるか. この問題はその答えを示唆している. 複数の違った知識を組み合わせ問題解決する力をつけること.

2.6-1

【解答例】

例題 2.6-1 では運動方程式を使わずに運動の特徴を式で表すことが課題であった. 本問の題意はその結果を利用して, 糸の張力を運動方程式によって求めることにある.

張力を T とおき, 運動方程式をたて, 例題の結果を代入できるようにする. 質点に対する拘束条件から, 質点に作用する力の x 成分は $F_x = -T \cos \theta$ で与えられるので, 運動方程式の x 成分は,

$$-T \cos \theta = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{m\ddot{x}}{\cos \theta} \quad (5)$$

となる. \ddot{x} を求めるために例題 2.6-1 の途中の式を利用すると, $\dot{x} = -l\dot{\theta} \sin \theta$ であり, $l\dot{\theta} = v_0$ であるから,

$$\dot{x} = -v_0 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -v_0 \dot{\theta} \cos \theta$$

を得る. これを式 (5) に代入すると

$$T = mv_0 \dot{\theta}$$

となる. ここで, 再度 $l\dot{\theta} = v_0$ を用いて,

$$T = \frac{mv_0^2}{l}$$

が得られる. この式の l に式 (2.53) を代入すると式 (2.54) になる.

【解説】

運動が与えられると運動方程式から力が求まることを実行してみる問題である.

【問題のねらい】

例題でとりあげられた運動について, 教科書の記述としては完結していない. 学習者が, 運動方程式を使って力を求めることにより補完することになる. その双方を併せて, 拘束条件のもとでの運動についてその記述の方法と運動方程式が意味することを学ぶ. 拘束条件の用い方に慣れることも本問のねらいである.

第 3 章 仕事とエネルギー

3.3-1

【解答例】

問題の前半は, 1次元運動における重力のポテンシャルを問うものである. 重力は質点の位置に依存し, 速度やほかの変数には依存しないので, 定義式 (3.8) に従って重力の表式からポテンシャルエネルギーの表式を求めることができる. 題意により $x_* = 0$ である. 右辺を本問で与えられた式に置き換えて計算すると,

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x F(x') dx' = \int_0^x \frac{mgR^2}{(R+x')^2} dx' = \left[-\frac{mgR^2}{R+x'} \right]_0^x \\ &= mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+x} \right) = \frac{mgRx}{R+x}. \end{aligned}$$

問題の後半では, 3次元運動における重力ポテンシャルを問うている. 後半部における x の定義が前半部とは異なっていることに注意する必要がある. 地球による重力は, 地球の中心に向かう中心力と考えてよい (詳しくは 3.5 節参照). 質量 m の物体に作用する重力 \mathbf{F} の大きさは r^2 に反比例し,

地表 ($r = R$) では mg なので,

$$\mathbf{F} = -\frac{mgR^2}{r^2}\mathbf{e}_r = f(r)\mathbf{e}_r, \quad f(r) = -\frac{mgR^2}{r^2} \quad (6)$$

と表すことができる。ただし、 \mathbf{e}_r は地球の中心からみて物体の方向を向く単位ベクトルである。中心力のポテンシャルは本文の式 (3.29) を用いて計算できるので、この式に上記の $f(r)$ の式と $r_* = \infty$ (基準点が無限遠なので) を代入して計算すると、

$$U(r) = -\int_{\infty}^r f(r') dr' = \int_{\infty}^r \frac{mgR^2}{(r')^2} dr' = \left[-\frac{mgR^2}{r'} \right]_{\infty}^r = -\frac{mgR^2}{r} \quad (r > R).$$

つぎに、地球の中心を原点とする直交座標を (x, y, z) とし、ポテンシャルの偏微分 $\partial U/\partial x$ 等を計算して、式 (3.23) により重力 \mathbf{F} の成分を求める。いま、ポテンシャルは $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の関数として与えられているので、例えば x による偏微分は (合成関数の微分の規則を使って) 次のように計算できる。

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dU}{dr} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{dU}{dr} \frac{x}{r}.$$

さらに、 $U(r)$ の結果より $dU/dr = mgR^2/r^2$ となるので

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{mgR^2}{r^3} x$$

を得る。 y や z による偏微分も同様で、上の結果において x を y や z で置き換えたものが得られる。したがって、式 (3.23) より、

$$F_x = -\frac{mgR^2}{r^3} x, \quad F_y = -\frac{mgR^2}{r^3} y, \quad F_z = -\frac{mgR^2}{r^3} z.$$

これをベクトル表記すると式 (6) のようになる。こうして、ポテンシャルの計算に間違いがないことが確認できる。特にこの結果で $y = z = 0$ とおくと、 $x > R$ ならば $r = x$ となることに注意して、

$$\mathbf{F}(x, 0, 0) = \left(-\frac{mgR^2}{x^2}, 0, 0 \right) \quad (x > R)$$

を得る。この力の x 成分は、(問題の前半部と後半部で x の定義が異なることに注意すると) 前半の問題で与えた $F(x)$ の式と矛盾しないことがわかる。

【解説】

ポテンシャルエネルギーを学んだ。最も身近に感じられる力の一つである重力についてポテンシャルエネルギーを知ることが重要である。積分の計算は容易であるが、重力のポテンシャルは基本的に重要である。

前半部の結果は、 $x \ll R$ の場合には $U \approx mgx$ となり、地表付近での見慣れた重力ポテンシャルエネルギーの式が得られる。このように得られた結果の極限が、すでに知っている結果に一致するかどうかを調べることにより、結果に間違いがないかどうかのチェックをすることができる。

【問題のねらい】

力とポテンシャルの関係について間違いなく理解できること。力の向きと符号について注意深くすることと同じように、ポテンシャルの符号とその増加する方向 (ポテンシャルの勾配のことである) について注意する感覚が育つこと。問題の後半部では、3次元のポテンシャルの計算および偏微分の計算に慣れることもねらっている。

3.3-2

【解答例】

ひもの回転角を φ とすると、おもりの速さは $l\dot{\varphi}$ であるから、エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + mgl(1 - \cos \varphi)$$

と表される。初期条件 ($\varphi = 0$ のとき $l\dot{\varphi} = v_0$) より $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ である。したがって、エネルギー保存則より

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} \left(\frac{v_0^2}{gl} + 2 \cos \varphi - 2 \right). \quad (7)$$

また、ひもの張力を T とすると、半径方向の運動方程式は

$$m\ell\dot{\varphi}^2 = T - mg \cos \varphi$$

と表される。これら二つの式から $\dot{\varphi}$ を消去して、

$$T = mg \left(\frac{v_0^2}{gl} + 3 \cos \varphi - 2 \right). \quad (8)$$

が得られる。

いま、式 (7) の左辺は負になることはないので、この式より φ の範囲は

$$\frac{v_0^2}{gl} \geq 2(1 - \cos \varphi) \quad (9)$$

に限られることが分かる。また、ひもがたるまないためには $T \geq 0$ でなければならないので、式 (8) より、ひもがたるまない条件として

$$\frac{v_0^2}{gl} \geq 2 - 3 \cos \varphi \quad (10)$$

が得られる。条件 (9) は図 5 の曲線 a の上側の領域に対応し、条件 (10) は曲線 b の上側の領域に対応する。この図から分かるように、 $v_0^2/gl \leq 2$ の場合には条件 (9) を満たす φ の領域 (図の水平線 i) において、条件 (10) は満たされる。この場合には、ひもはたるむことなく、 $-\varphi_{\max} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ の範囲で振動を行う。また、 $v_0^2/gl > 5$ の場合には全ての φ の領域で条件 (9) と (10) が満たされる (図の水平線 iii)。この場合には、ひもはたるむことなく、おもりは回転運動 ($\dot{\varphi} > 0$) を行う。そして、 $2 < v_0^2/gl < 5$ の場合には、条件 (9) を満たす φ の領域の一部 (図の水平線 ii) だけで、条件 (10) が満たされる。つまり、条件 (10) の等号を満たす角度 φ に達したときに $T = 0$ となって、その後はひもがたるむ。よって、ひもがたるむための v_0 の条件は

$$\sqrt{2gl} < v_0 < \sqrt{5gl}$$

であり、ひもがたるむときの回転角 φ_0 は

$$\frac{v_0^2}{gl} = 2 - 3 \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gl}$$

で与えられる。

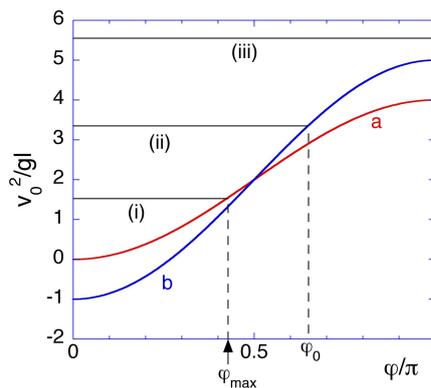


図 5: 曲線 a と b はそれぞれ、不等式 (9) と (10) の右辺の関数のグラフである。

3.3-3

【解答例】

(1) $x > 0$ の領域では重力によるポテンシャルエネルギーだけが存在するので $U(x) = mgx \sin \alpha$. $x \leq 0$ の領域では、これにバネによるポテンシャルエネルギーが加わるので $U(x) = mgx \sin \alpha + \frac{1}{2}kx^2$. $U(x)$ のグラフは図 6 のようになる。

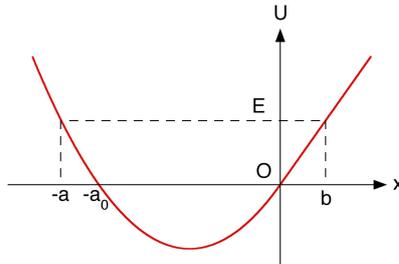


図 6: ポテンシャル $U(x)$ のグラフ. $x > 0$ の領域では直線, $x < 0$ では放物線である.

(2) 初期状態では $x = -a$, $\dot{x} = 0$ なので, エネルギーは

$$E = U(-a) = \frac{1}{2}ka^2 - mga \sin \alpha. \quad (11)$$

エネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

より, ($\dot{x}^2 \geq 0$ なので) 運動は $E \geq U(x)$ の範囲で起きる. ポテンシャル $U(x)$ のグラフから分かるように, $E \leq 0$ ならば運動の範囲は $x \leq 0$ の領域にとどまるので, 質点はバネから離れることなく運動を続ける. 一方, $E > 0$ ならば, $x > 0$ の領域にまで質点は到達するので, バネから離れることがある. 式 (11) より, $E = 0$ となるのは a の値が

$$\frac{1}{2}ka^2 - mga \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2mg}{k} \sin \alpha$$

となるときである. よって, $a_0 = (2mg/k) \sin \alpha$.

(3) a_0 を使うと, $mg \sin \alpha = ka_0/2$ と表されるので, 式 (11) は $E = ka(a - a_0)/2$ と書き換えられる. $a > a_0$ の場合に質点が達する最高点の座標を b とすると, 最高点では $\dot{x} = 0$ だから, エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}ka(a - a_0) = U(b)$$

が成り立つ. いま, $b > 0$ だから $U(b) = mgb \sin \alpha = ka_0b/2$. したがって

$$b = a \left(\frac{a}{a_0} - 1 \right).$$

3.4-1

【解答例】

最初の位置が高さ h であると分かっているとき, 重力のポテンシャルエネルギーは mgh である. これと, 最後の位置が未知数であるときのバネと重力のポテンシャルエネルギーとを使って, エネルギー保存則を方程式として解く.

バネの最大の縮みを ℓ とする. 落下し始めるときと, バネが最も縮むときには質点の速度はゼロなので, エネルギー保存則より,

$$mgh = \frac{1}{2}k\ell^2 - mg\ell$$

が成り立つ. これを ℓ について解くと,

$$\ell = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

となる. $\ell > 0$ でなければならないので, 複号のうち $+$ を採用する. よって,

$$\ell = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}} \right).$$

【解説】

最も身近にあって重力とともにポピュラーな保存力がバネの力である. 本間はこの両方が絡む問題である. 質点の運動を, 運動方程式ではじめから終わりまで追いかけるとしたら, 途中で力が交代するので手続は面倒である. この解答例のように, ポテンシャルエネルギーの形にして方程式を立てる

と方程式も簡単になり、容易に解けることがわかる。力のポテンシャルが位置エネルギーの役割を果たしており、高校時代からこの考え方に慣れている人にはなじみの問題であろう。

【問題のねらい】

力学的エネルギー保存則を用いると容易に解ける問題があることを知り、解く際の基本的な考え方に慣れること。保存則の利用は、物理学において極めて有用で重要性も高い。

3.4-2

【解答例】

鉛直上向きに x 軸をとり、地表を座標原点に選ぶ。地球の重力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は問題 3.3-1 で求めており、 $U(x) = mgRx/(R+x)$ である。エネルギー保存則より、 $\frac{1}{2}mv_0^2 + U(0) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ が成り立つ。この式に $U(x)$ の表式を代入して整理すると、次が得られる：

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{2gRx}{R+x}. \quad (12)$$

(1) 式 (12) の右辺は x の単調減少関数であり、 $x \rightarrow \infty$ のとき $v_0^2 - 2gR$ に収束する。したがって $v_0^2 > 2gR$ であれば常に $\dot{x}^2 > 0$ が成り立ち、 $\dot{x} > 0$ は時間とともに減少するけれどもゼロになることはなく、物体は無限遠まで飛び去る。よって、

$$v_c = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times (9.80 \text{ m/s}^2) \times (6.37 \times 10^6 \text{ m/s})} = 11.17 \text{ km/s}.$$

(2) 物体が到達する最高点 $x = h$ において $\dot{x} = 0$ だから、式 (12) より、

$$v_0^2 = \frac{2gRh}{R+h} \Rightarrow h = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}. \quad (13)$$

(3) 式 (13) を使って式 (12) 右辺の v_0 を h で表して整理すると、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gR^2(h-x)}{(R+h)(R+x)}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} \frac{dx}{dt}$$

となる。この式の両辺を $t = 0$ から $t = T$ まで積分すると、

$$\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}} T = \int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} dx. \quad (14)$$

以上でこの問題に対する解答は完結するが、参考までにこの積分を実行して式 (3.38) を導く過程も説明しよう。この積分を実行するために $y = \sqrt{(h-x)/(R+x)}$ と置換すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R+h}{2(R+x)^2} \sqrt{\frac{R+x}{h-x}}, \quad R+x = \frac{R+h}{1+y^2}$$

となる。したがって、式 (14) の右辺は

$$\int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} dx = 2(R+h) \int_0^{\sqrt{h/R}} \frac{dy}{(1+y^2)^2}$$

と書き換えられる。さらに、この式の右辺の積分は、部分積分を利用して、

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(1+y^2)^2} &= \int \left[\frac{1}{1+y^2} - \frac{y^2}{(1+y^2)^2} \right] dy = \arctan y - \left\{ -y \cdot \frac{1}{2(1+y^2)} + \int \frac{dy}{2(1+y^2)} \right\} \\ &= \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \end{aligned}$$

と実行できる。よって、式 (14) の右辺は

$$\int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} dx = 2(R+h) \left[\frac{\sqrt{Rh}}{2(R+h)} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{\frac{h}{R}} \right]$$

となる。したがって、式 (14) より次の結果を得る。

$$T = \sqrt{\frac{R+h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R}} + \left(1 + \frac{h}{R} \right) \arctan \sqrt{\frac{h}{R}} \right]. \quad (15)$$

(4) 式 (13) の第一式と式 (15) に $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, $R = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ と $h = 400 \text{ km}$ を代入すると, $v_0 = 2.72 \text{ km/s}$ と $T = 300.6 \text{ s} = 5.01 \text{ min}$ が得られる. また, $h = 3.58 \times 10^4 \text{ km}$ の場合には, $v_0 = 10.30 \text{ km/s}$, $T = 1.477 \times 10^4 \text{ s} = 4.10 \text{ h}$ が得られる.

3.5-1

【解答例】

本文の図 3.13 に示されているように, 問題にしている球形の物体を薄い球殻の集まりとみなす. 物体による重力ポテンシャルは, それぞれの球殻による重力のポテンシャルの表式を求めてその和をとればよい.

いま注目する球殻を, 半径 a の球面と半径 $a + da$ の球面に挟まれた領域とする. この体積は $4\pi a^2 da$ であり, その質量を $M_{\text{shell}}(a, da)$ と記すと $M_{\text{shell}}(a, da) = 4\pi a^2 \rho(a) da$ である. 球殻の外部の点にある質点に対するこの球殻の質量による重力のポテンシャルは, 球殻上で質量が一様に分布していることから, 球殻の質量が中心に集中しているとした場合の重力のポテンシャルで与えられる. このことは文中の式 (3.44) の導出と同様にして示すことができる. 球の中心と質量 m の質点の距離を r とし, このポテンシャルを $U_{\text{shell}}(r; a, da)$ と記し, 式 (3.44) の表式を利用すると, $U_{\text{shell}}(r; a, da) = -GM_{\text{shell}}(a, da)m/r$ で表される.

求める球状の物体によるポテンシャル $U(r)$ は, 質点の位置がどの球殻についてもその外側にあることから, 単にすべての球殻についてポテンシャルの和によって以下のように求められる.

$$U(r) = (U_{\text{shell}}(r; a, da) \text{ の総和}) = - \int_0^R \frac{G \times (4\pi a^2 \rho(a) da) m}{r}$$

この a についての積分を実行して, $M = \int_0^R \rho(a) \times 4\pi a^2 da$ より, $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ であることが示された.

【解説】

本文の 3.5 節では, 式 (3.42) が成り立つ条件として質量が一様に分布していることを用いたが, 実は, $r \geq R$ の表式は質量分布が球対称でありさえすれば成り立つ. 本問には, このことに注意を向ける意味がある. ただし, 式 (3.42) において, $r < R$ の表式は質量分布が一様な場合にだけ成り立つのだ, ということも注意しておく.

また, 保存力が与えられるとそのポテンシャルが定義され, その表式を求めることができるが, 力の起源が複数の場合それらの和をとることは, 一般にはベクトルである力そのものの和としては困難である. そのような場合でもポテンシャルはスカラー量であるために和を容易に求められる. この問題ではそのことが実感できるであろう.

3.5-2

【解答例】

重力加速度は, 重力による質点の運動の加速度であり, 力が質点の質量と加速度の積であることから重力の大きさから求めることができる. 地上における重力の大きさ F は, 地球の質量を M , 質点の質量を m , 重力定数を G , 地球の中心から地表までの距離を R とすると, $F = GMm/R^2$ である. よって重力加速度は $g = GM/R^2$ となる. 与えられた数値を代入して計算すると, $g = 9.820 \text{ m/s}^2$.

3.5-3

【解答例】

トンネル中を運動する質量 m の質点に作用する地球の重力は式 (3.43) に与えられる. これにより運動方程式を立て, それを解いて運動を求める.

地球の中心を原点とし, トンネルに沿って中心から入り口に向かって x 軸をとる. 地球の半径を R とする. 質点の位置を x とすると, 質点と地球の中心の距離は $r = |x|$ である. 質点に作用する x 方向の力 F は, 式 (3.43) の $r < R$ の場合を適用して,

$$F = -\frac{GMm}{R^3}x$$

と表される。ここで力の向きは質点の位置から原点に向かうことから、 F の符号は x の符号と逆になることに注意する。これより、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{R^3}x, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2x$$

ただし、 ω を $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ で定義した。この方程式に従う運動は単振動であり、入り口から出口までを振幅の小さい単振子のように往復運動する。その周期は $T = 2\pi/\omega$ である。

計算のため数値をとりやすい重力加速度 g を $g = GM/R^2$ を用いて周期の式の中に代入すると $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ が得られる。 $R = 6.37 \times 10^6$ m, $g = 9.8$ m/s²を代入して、求める所要時間は周期の半分であることから、約42分。

3.5-4

【解答例】

(1) 等速円運動をする人工衛星の質量を m 、円運動の半径を r 、速さを v_0 とすると、この加速度は v_0^2/r である。これの地球の中心からの距離が r であることから、本節で示されたことにより重力の大きさは GMm/r^2 である。よって、運動方程式は

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_0^2}{r}$$

となる。また、 $r = R + h$ が与えられているので、これより

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

が得られる。

(2) 円運動の速さが v_0 で半径が r のとき周期は一周に要する時間として求まり、 $T = 2\pi r/v_0$ である。 $r = R + h$ と前の小問の式から、

$$T = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

である。問題3.5-2で与えられた R, M, G の数値とここで与えられた h を用いて92 minと求まる。

(3) 静止衛星の高度を H 、地球の自転周期を T 、地球の半径を R とすると、前の小問の式の高度 h に H を用いて、 $R + H = (T\sqrt{GM}/2\pi)^{2/3}$ である。したがって

$$H = (GM)^{1/3} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} - R$$

となる。与えられた T と問題3.5-2の R, M, G の値を用いて $H = 3.579 \times 10^4$ kmと求まる。

第4章 抵抗と摩擦

4.1-1

【解答例】

ニュートンの運動方程式を用いて、特に力が速度に比例して速度が鈍ったり、加速が抑えられる場合の運動の特徴を予想することを学んだ。具体的に、粘性抵抗の働くときに空中に投げ出された質点の位置座標を、水平方向 x 、鉛直方向 y に分けて時間の関数として式(4.12)を求め、軌跡を表す方程式、式(4.13)を求めた。これらを用いる。

式(4.12)に与えられる y について $dy/dt = 0$ を満たす時刻 t に y の値が最大になる。この条件を方程式として t について解くと、この時刻は

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_0}{g} \sin \theta \right)$$

与えられる。この t を式(4.12)に代入すると y の最大値 y_{\max} が次のように得られる。

$$y_{\max} = \frac{v_0}{\alpha} \sin \theta - \frac{g}{\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_0}{g} \sin \theta \right).$$

【解説】

最高到達点は、質点の y 座標の最大値である。教科書の説明の中に、 y 座標の表式が与えられているので、時間 t の関数としての最大値を求めればよい。軌道の方程式 (4.13) も与えられているので、軌道の x, y 平面の曲線の極大値として求めてもよい。

【問題のねらい】

この問題ではニュートンの運動方程式を解いた結果の表式を利用することに慣れることである。運動方程式の解の指数関数を含む関数に触れることにより、一般に粘性抵抗のある運動への理解を深める。

4.1-2

【解答例】

式 (4.13) の右辺は $\alpha = 0$ つまり $\gamma = 0$ のときには定義されていない式である。題意は、数学的にそれを α の関数として $\alpha \rightarrow 0$ の極限を求めることである。

表式は直接にロピタルの公式を使える形ではないので、 α についてのテイラー級数展開を用いた方法で極限を求める。 $\varepsilon = 0$ のまわりにおけるテイラー展開の公式から、

$$\ln(1 - \varepsilon) = -\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \dots$$

である。これを用いて、式 (4.13) の右辺は $v_t = g/\alpha$ を代入して、

$$\left(\tan \theta + \frac{g}{\alpha v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\alpha^2} \left[-\alpha \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 - \frac{\alpha^3}{3} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^3 + \dots \right]$$

となり、整理すると

$$x \tan \theta - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 - \frac{\alpha g}{3} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^3 + (\alpha \text{ の } 2 \text{ 次以上の項})$$

である。この第 3 項以降は $\alpha \rightarrow 0$ の極限で 0 になる。ここで第 2 項では三角関数の公式を使って $2 \cos^2 \theta = 2 \cos \theta \sin \theta / \tan \theta = \sin 2\theta / \tan \theta$ のように変形しておく。これらにより、式 (4.13) の極限は次のようになる：

$$y = \tan \theta \left(1 - \frac{g}{v_0^2 \sin 2\theta} x \right) x.$$

【解説】

抵抗が働かないとき、つまり $\alpha = 0$ のとき、原点から投げ上げられた投射運動の軌跡は式 (2.30) で $x_0 = 0, y_0 = 0$ と置いたものになる。しかし、一般の場合の式 (4.13) では $\alpha = 0$ と置くことができない。

このように物理学においては「抵抗が働かないとする」といった単純化された条件のもとで求められた関係式が「抵抗が働くとき」といった一般の場合の関係式と見かけ上大きく違うことが起こる。それにもかかわらず実際にグラフを描いてみると、両者の軌道はほとんど違わなかったりする。自然は $\alpha = 0$ で連続だということである。グラフを描かずに確かめるためには極限を求めることが役に立つ。 α が小さいとき、複雑ではあるが厳密な式 (4.13) を使うよりも近似的に $\alpha = 0$ とした式 (2.30) を使うほうが便利である。

しかし自然には、Y 字形に分岐した水路に向かっていく流れでは上流での位置取りがその後の運動に大きな違いを与えるように、場合分けをする変数について不連続になる現象もあることに注意しておく。

【問題のねらい】

数学的には極限を求める計算を実行できることである。ここではしかしむしろ、解説に述べているようなことを実感することであり、できるならコンピュータを用いて図 4.1 よりももっと小さな α の場合のグラフを描かせてみるとよい。

4.1-3

【解答例】

粘性抵抗の働く落下運動の方程式とその解き方を学んだ。題意は方程式の係数が与えられて終端速度を数値的に評価することである。

密度 ρ 、半径 a の球形の物体の質量は $m = (4\pi/3)\rho a^3$ で与えられるので、この物体が粘性率 η の流体中を落下するときの終端速度は式 (4.11) に式 (4.14) の γ を用いて

$$v_t = \frac{mg}{\gamma} = \frac{2\rho g a^2}{9\eta}$$

である。 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ として、問題に与えられた ρ 、 a 、 η の値を上のに式に代入して計算すると、

- (a) 雨粒の終端速度として 1.20 cm/s,
- (b) 油滴の終端速度として 0.69 mm/s を得る。

【解説】

指示に従って与えられた数値を用いて係数 γ と物体の質量を求め、終端速度として求めた結果の式を用いてその数値を計算すればよい。ここでは、質量の表式を終端速度の表式に代入して得られる一つの式にすべての数値を代入した。

ニュートンの運動方程式を解くという観点ではどんな大きさの力が働くかが必要なことである。これを速度に比例する力の場合について学んだが、実際に目にする状況との関連については個々に調べなくては把握できない。ここでは式 (4.14) が与えられていて、抵抗が物体の大きさに比例していることがキーポイントである。ここに注目した答え方をすることが必要になる。

【問題のねらい】

ここでは抵抗がなぜ速度に比例するのかは問わない。これをすでに知られている事実として抵抗が物体の半径に比例していることに注意した解き方ができることがねらいである。得られた結果によって、小さな物体で実際の落下速度にいかに関係が重要な役割を果たしているかを認識することができる。

4.2-1

【解答例】

場合分けされたいずれにおいても、上昇運動は重力と摩擦力のために終了する。これをまず運動方程式で導けることとして示す。その後、粗い斜面上にそっと置かれた物体の問題になり、摩擦角の定義から、斜面の傾き角によって静止し続けるか滑り落ちるかが分かれる。滑り落ちる場合の加速を運動方程式によって考察する。

斜面と平行で上向きに x 軸をとり、物体の速度を $v = \dot{x}$ とする。作用する力は重力と垂直抗力と摩擦力である。重力は、 x 成分が $-mg \sin \alpha$ であり、面の法線方向の成分は面に向かって $mg \cos \alpha$ である。これを打ち消す斜面からの垂直抗力の大きさが $mg \cos \alpha$ であることから動摩擦力は x 軸方向に運動と逆の向きで作用し、この大きさの μ' 倍である。したがって運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - mg\mu' \cos \alpha$$

よって

$$\dot{v} = -g(\sin \alpha + \mu' \cos \alpha)$$

を得る。この式の右辺は負の定数なので、 v は (一定の加速度で) 単調に減少して、やがて $v = 0$ になる。

その直後を考えると、本文で説明したように、(1) 斜面の傾斜角 α が摩擦角より小さいと物体は静止を続け、(2) α が摩擦角より大きいと物体は静止できずに滑り降りる。

後者の場合、動摩擦力の向きが逆転するから、斜面を降り始めてからの速度が従う方程式は

$$\dot{v} = g(-\sin \alpha + \mu' \cos \alpha)$$

となる． α が摩擦角より大きいと $\mu < \tan \alpha$ であり，一般に $\mu' < \mu$ なので $\mu' < \tan \alpha$ となり，上の式の右辺は負の定数になる．したがって，物体は等加速度運動により斜面を下降し続ける．下降時の加速度の大きさ ($g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)$) は上昇時のそれ ($g(\sin \alpha + \mu' \cos \alpha)$) よりも小さい．したがって，速度を時間の関数として示すと図 7 のようになる．

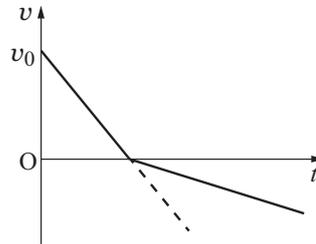


図 7: 問題 4.2-1 の状況 (2) における，物体の速度 v と時間 t の関係．

4.2-2

【解答例】

物体が $x = 0$ の点を通過する時刻を $t = 0$ とし，そのときの速度を初期条件として，運動方程式を解く． $t \geq 0$ における運動方程式は，作用する力は動摩擦力であることから

$$m\dot{v} = -mg\mu'$$

である．いま， $t = 0$ のとき $v = v_0$ だから，この運動方程式の解は

$$v = v_0 - g\mu't$$

となる．物体が静止する時刻を t_0 とすると，この式で左辺を 0 とおいて，

$$t_0 = \frac{v_0}{g\mu'}$$

が得られる．

また， $t = 0$ から $t = t_0$ までに物体が移動する距離は，

$$\ell = \int_0^{t_0} v(t) dt = \int_0^{t_0} (v_0 - g\mu't) dt = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g\mu' t_0^2.$$

となる．これに上の t_0 を代入して，

$$\ell = \frac{v_0^2}{2g\mu'}.$$

以上より，静止するまでの時間は $\frac{v_0}{g\mu'}$ ，静止するまでに動く距離は $\frac{v_0^2}{2g\mu'}$ である．

【解説】

働く力がわかると運動方程式が解けば運動がわかる．この問題では，時刻 0 から静止する時刻までの間に限って動摩擦力が働いている．運動方程式には頭に記されていないが，解答例に記した運動方程式が有効な時間は，上記の定義を用いると $0 \leq t \leq t_0$ であることに注意する．

速度から時間積分により位置を求めることは，本節の基本事項である．

【問題のねらい】

この問題文では位置によって働く力が異なる設定になっている．運動方程式は時間を変数とした微分方程式であるので，一般に位置に依存する力の場合工夫が必要である．本問では止まるまでは同じ大きさの力であるのでそれを意識することがないが，後で複雑な設定の問題を解くなどの際には，簡単に解けたこの問題のことを想起することがありうる．

4.2-3

【解答例】

まず問題の前半に答える．問題 (4.2-2) で質点に働く力と，運動量の初期値および最終値がわかっている．力積・運動量の定理を利用すると，運動方程式を立てることなく答を得ることができる．

突入時点での運動量は $p_0 = mv_0$ ，静止した瞬間に運動量は $p = 0$ となる．これらが式 (2.21) の左辺を与える．質点に作用する摩擦力は $F = -\mu' mg$ で一定なので，静止するまでの所要時間を t_0 とすると，この間に質点に作用した力積は $Ft_0 = -\mu' mgt_0$ ．これが式 (2.21) の右辺である．したがって，

$$0 - mv_0 = -\mu' mgt_0 \Rightarrow t_0 = \frac{v_0}{g\mu'}$$

次に，問題の後半では，質点に働く力と，運動エネルギーの初期値及び最終値が分かっていることから，仕事・エネルギーの定理を利用すると，運動方程式を立てることなく答を得ることができる．

突入時点での運動エネルギーは $mv_0^2/2$ ，これが摩擦によってすべて失われるから運動エネルギーの増加分は $-mv_0^2/2$ である．これが式 (3.6) の左辺を与える．質点に作用する摩擦力は $F = -\mu' mg$ で一定なので，静止するまでに移動する距離を l とすると，摩擦力が質点にした仕事は $F l = -\mu' mgl$ ．これが式 (3.6) の右辺である．したがって，

$$-mv_0^2/2 = -\mu' mgl \Rightarrow l = \frac{v_0^2}{2g\mu'}$$

【問題のねらい】

力積と運動量の変化を，また仕事と運動エネルギーの変化を具体的な問題に触れて，より身近に認識する．力が時間に依存する，位置に依存する，などもっと複雑な問題に対応するための準備となる．関係式 (2.21) が実は運動法則の積分形式であり，既習のニュートンの運動方程式は微分形式であることを改めて認識すること．

4.2-4

【解答例】

ブレーキをかけた瞬間の速度が与えられていて，その後の働く力が与えられているので，その速度を初期条件として運動方程式を解けばよい．方程式とその解き方は，問題 4.2-2 と同じである．問題 4.2-3 のように求めてもよい．結果の $v_0^2/2g\mu'$ に， $v_0 = 40 \text{ km/h} = (40000/3600) \text{ m/s}$ と $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ と $\mu' = 0.80$ を代入して計算すると， 7.9 m を得る．

【解説】

問題 4.2-2, 3 と良く似た設定であるから，結果の式を使うことを考える．

【問題のねらい】

日常の経験で慣れている停止距離が 10 m 程度であることにはどの程度の動摩擦係数に対応するのか，一度数値をあたってみて経験することである．また，数値計算の際には単位の取り違いや不注意によって誤りが生じ，得られた数値が経験的な数値に比べて異常に大きかったり小さかったりすることがある．order of magnitude の間違いのことである．そのようなとき，それに気づくことが大事である．

4.2-5

【解答例】

ばねの復元力の大きさを $F = mg|2\mu' - \mu|$ ，最大摩擦力を $F_m = mg\mu$ とする．まず，(i) $2\mu' - \mu > 0$ の場合， $F = mg(2\mu' - \mu)$ だから $F - F_m = 2mg(\mu' - \mu)$ である．一般に $\mu' < \mu$ だから， $F < F_m$ が成り立つ．つぎに，(ii) $2\mu' - \mu < 0$ の場合， $F = mg(\mu - 2\mu')$ だから $F - F_m = -2mg\mu' < 0$ である．したがって， $2\mu' - \mu$ の符号にかかわらず $F < F_m$ が成り立つ（ばねの復元力は最大摩擦力より小さい）．

4.3-1

【解答例】

バネが縮み始めてから物体が静止するまでの力学的エネルギーの増分が，摩擦が物体にする仕事に等しいので（式 (4.37)），ばねが最大で l だけ縮むとすると

$$\frac{1}{2}k\ell^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu' mg\ell \quad (16)$$

が得られる。これを ℓ について解くと、

$$\ell = \frac{mg\mu'}{k} \left[\sqrt{1 + \frac{k}{m} \left(\frac{v_0}{g\mu'} \right)^2} - 1 \right]. \quad (17)$$

と求まる。

物体がバネに接触する瞬間の速さ v_0 が大きいほどバネの縮みは大きくなるのが直感的に予想され、上の結果 (17) は確かに v_0 の増加関数になっている。この式で与えられる ℓ を v_0 の関数としてグラフに描くと図 8 のようになる。 v_0 が小さい場合には、式 (17) は $\ell \approx v_0^2/2g\mu'$ と近似できるので、 ℓ は v_0^2 に比例して増大することがわかる。 v_0 が大きいときには $\ell \approx \sqrt{m/k}v_0 - mg\mu'/k$ と近似できるので、 v_0 の増加とともに ℓ は直線的に増えることがわかる。この直線の傾きは、摩擦がない場合 ($\mu' = 0$) の結果 (図の破線の直線) と同じである。

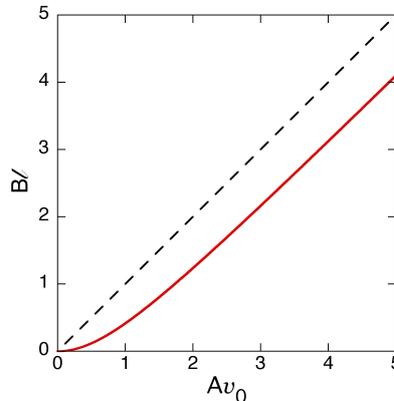


図 8: 式 (17) で表される、バネの最大縮み ℓ と物体がバネに接触する瞬間の速さ v_0 との関係 (実線)。ただし、 $A = \sqrt{k/m}/g\mu'$ 、 $B = k/mg\mu'$ とおいた。破線は摩擦がない場合 ($\mu' = 0$) の結果を表す、

【解説】

問題でもし非常に弱いバネが使われた場合はバネが存在しないときとほとんど同じ答になる。 $k = 0$ のときはバネが存在しないことになり、問題は問題 4.2-3 と同じことをきいていることになる。仕事・エネルギーの定理による関係式は式 (16) で $k = 0$ とすればよい。答として $\ell = v_0^2/2g\mu'$ が得られる。しかしここで得られた結果の式 (17) に $k = 0$ を代入することはできない。そういうときは $k \rightarrow 0$ の極限をとることでバネの無い場合と比較することができる。問題に含まれる条件を外した状況で得られた式と、条件下で式を得た後で条件を緩和して比較する場合、極限をとって比較しなければならないことは物理学ではよくあることである。

同様に、摩擦が非常に小さい場合は $\mu' = 0$ とみなせるはずである。だからといって結果の式 (17) に $\mu' = 0$ を代入して答えることができない。もし摩擦が全く働かないのであれば初期状態で持っている運動エネルギーがすべてバネの位置エネルギーになることが条件となり、式 (16) で $\mu' = 0$ とした方程式を解けば答として $\ell = v_0\sqrt{m/k}$ が得られる。こういうときも結果の式 (17) で $\mu' \rightarrow 0$ の極限をとればよい。極限をとることで摩擦の無い場合とごく小さい場合を比較することができる。

これらのことは、問題 4.1-2 の解説で既に述べた。再度言葉を変えて述べると、物理学においては「○○が働かないとする」単純化された条件のもとで求められた関係式が「○○が働く」一般の場合と見かけ上の結果の式が大きく違うことが起こる。しかしバネの力や摩擦力に関しては自然は連続であり、それは力のパラメータを 0 にする極限を求めることで確かめられる。

第 5 章 角運動量

5.1-1

【解答例】

質点は等速直線運動をするので、質点に作用する力（あるいは力の合力）は 0 である。したがって、質点に作用する（原点に関する）トルクは 0 であり、質点の角運動量は保存する。よって、角運動量の値は時間によらず一定であると予想される。

次に、角運動量を計算しよう。 xy 平面内を運動する質点の角運動量は位置 (x, y) と運動量 (mv_x, mv_y) が分かると $L = m(xv_y - yv_x)$ から求められる。いま、 $x = a, v_y = v, v_x = 0$ であるから、

$$L = mav$$

と求まる。角運動量保存則から予想されるように、確かに角運動量の値は時間によらず一定である。

角運動量をベクトル \mathbf{L} として答えるとすれば、上で求めた L は \mathbf{L} の z 成分であり、他の成分は 0 なので、次のように答える。

$$\mathbf{L} = (0, 0, mav).$$

【解説】

直線運動の場合でもある点を基準にして回転運動をしていると考えることができることを、教科書 5.1.1 項 (p. 71) で述べたことと同様に、直線運動をする物体について角運動量を考えることができることに注意しよう。

また、物体に外力が作用せずに、等速直線運動をする場合、任意の点に関する角運動量は保存し、角運動量の値は基準点の選び方に依存する（基準点が物体の軌跡上にあるときには、角運動量は 0 である）。これとは対照的に、物体に中心力が作用する場合には、力の中心に関する角運動量は保存するが、その他の点に関する角運動量は保存しない。

5.1-2

【解答例】

問題に図が載っていない場合には、問題文を読みながら自分で図を描くと、問題で問うていること理解し、問題を解く上での考えの道筋を立てるのに役立つ。この問題の $0 < t < t_c$ の状況を描くと図 9 のようになる。

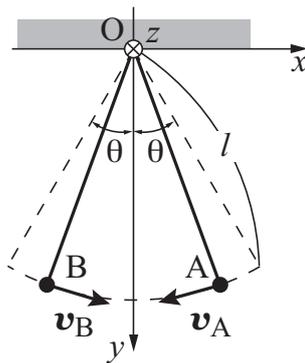


図 9: 問題 5.1-2 の $0 < t < t_c$ における振り子 A と B の位置と、おもりの速度の向き（図の矢印 \mathbf{v}_A と \mathbf{v}_B ）を示す。

(1) おもり A と B の x 座標をそれぞれ x_A, x_B , y 座標をそれぞれ y_A, y_B , 角運動量の z 成分をそれぞれ L_A, L_B とすると、教科書の式 (5.13) より次式を得る。

$$L_A = m(x_A \dot{y}_A - y_A \dot{x}_A), \quad L_B = m(x_B \dot{y}_B - y_B \dot{x}_B).$$

いま、振り子の振幅は小さいと仮定しているので、A と B のおもりの y 座標は l (一定) と近似し
てよい (教科書 2.5 節参照)。したがって、上の式は次のように近似できる。

$$L_A = -ml\dot{x}_A, \quad L_B = ml\dot{x}_B. \quad (18)$$

時刻 t が $0 < t < t_c$ の範囲にあるとき、図 9 からわかるように、 $\dot{x}_A < 0$ 、 $\dot{x}_B > 0$ が成り立つ。よって、式 (18) より $L_A > 0$ 、 $L_B < 0$ であることがわかる。したがって、A と B それぞれの角運動量の向きは e_z 、 $-e_z$ である。

(2) 振り子の振幅が小さいとき、そのおもりは単振動をする。いまの場合、単振動の角振動数 ω は

$$\omega = \sqrt{g/\ell}$$

で与えられる。また、 $t = 0$ において、

$$x_A = \ell\theta, \quad x_B = -\ell\theta, \quad \dot{x}_A = 0, \quad \dot{x}_B = 0$$

であるから、 $0 < t < t_c$ のとき、A と B のおもりの座標は

$$x_A(t) = \ell\theta \cos \omega t, \quad x_B(t) = -\ell\theta \cos \omega t \quad (19)$$

となる。ここでは θ は振り子の角度の初期値（定数）であり時間変化する量ではないことを注意しておく。式 (19) を時間で微分して、次式を得る。

$$\dot{x}_A(t) = -\ell\theta\omega \sin \omega t, \quad \dot{x}_B(t) = \ell\theta\omega \sin \omega t. \quad (20)$$

この結果を式 (18) に代入すると、

$$L_A(t) = m\ell^2\theta\omega \sin \omega t, \quad L_B(t) = -m\ell^2\theta\omega \sin \omega t$$

となる。これらは角運動量の z 成分なので（角運動量の他の成分は 0）、ベクトルとしての角運動量は、次のようになる。

$$\mathbf{L}_A(t) = m\ell^2\theta\omega \sin \omega t \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{L}_B(t) = -m\ell^2\theta\omega \sin \omega t \mathbf{e}_z.$$

(3) $t < t_c$ における振り子の運動がわかったので、 $t_c < t < 3t_c$ における運動を調べよう。

$t = t_c$ において 2 つのおもりが衝突するとき、 $x_A = x_B = 0$ となるので、式 (19) より

$$\omega t_c = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t_c = \pi/2\omega \quad (21)$$

であることがわかる。したがって、衝突直前の A と B の速度は式 (20) より、

$$\dot{x}_A = -\ell\theta\omega, \quad \dot{x}_B = \ell\theta\omega$$

であることもわかる。衝突は弾性的であり、2 つのおもりの質量が等しいので、衝突直後は 2 つのおもりの速度が入れかわる（高校で学んだと思うが、本教科書では第 6 章で扱う）。よって、衝突直後 ($t = t_c + 0$) のおもり A と B の位置と速度は

$$x_A(t_c) = 0, \quad x_B(t_c) = 0, \quad \dot{x}_A(t_c) = \ell\theta\omega, \quad \dot{x}_B(t_c) = -\ell\theta\omega$$

で与えられる。衝突後には、2 つのおもりはこの条件を満たす単振動（角振動数 ω ）をするので、

$$x_A(t) = \ell\theta \sin \omega(t - t_c) = \ell\theta \sin(\omega t - \pi/2) = -\ell\theta \cos \omega t, \quad x_B(t) = -\ell\theta \sin \omega(t - t_c) = \ell\theta \cos \omega t$$

を得る。ただし、ここでの式変形において式 (21) の関係を用いた。これらの結果から、 $t = t_c$ の次におもりの衝突が起きるのは $t = 3t_c$ であることがわかる。これらの $x_A(t)$ と $x_B(t)$ を時間で微分すると

$$\dot{x}_A(t) = \ell\theta\omega \sin \omega t, \quad \dot{x}_B(t) = -\ell\theta\omega \sin \omega t$$

となる。これらの式を式 (18) に代入すると

$$L_A(t) = -m\ell^2\theta\omega \sin \omega t, \quad L_B(t) = m\ell^2\theta\omega \sin \omega t$$

となるので、 $t_c < t < 3t_c$ における 2 つの振り子の角運動量は、次のようになる。

$$\mathbf{L}_A(t) = -m\ell^2\theta\omega \sin \omega t \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{L}_B(t) = m\ell^2\theta\omega \sin \omega t \mathbf{e}_z.$$

この結果と小問 (2) の結果から、 $0 < t < 3t_c$ において

$$\mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B = 0$$

が成立することが示された。

【解説】

ここでは、角運動量を計算するときに式 (5.13) を用いたが、次の 5.2 節で学ぶベクトル積を使うと、角運動量は式 (5.30) のように表される。この式から式 (5.13) を導くことができるし、位置ベクトルと速度ベクトルの向きから角運動量ベクトルの向きを容易に求めることができる。角運動量やトルクを使いこなすためにはベクトル積の計算に慣れることが重要である。

なお、このあとの問題 5.1-3 と問題 5.1-4 についても、同様のコメントが適用できる。この節で学んだ、平面運動における角運動量やトルクを用いる計算は、次の節で学ぶ、ベクトル積を用い角運動量やトルクの表現覚えておけば、式 (5.12)~(5.14) や式 (5.22)~(5.24) はそれらから導くことはできる。同じ量を表すのに様々な表現があることを知っていて（具体的なことはいちいち覚える必要はなく）、必要に応じて使いやすい表現を導くことができればよい。

5.1-3

【解答例】

(1) 教科書の式 (5.24) を使ってトルクを計算する。

いま、張力によるトルクは、力の方向が位置ベクトルの方向と同じであるから 0 である。したがって、重力によるトルクのみを計算すればよい。おもりの位置ベクトル（大きさは ℓ ）から測った重力の偏角は θ であり、重力の大きさは mg なので、式 (5.24) より、おもりに作用するトルクの z 成分 N は

$$N = \ell mg \sin \theta = \ell mg \sin(-\varphi) = -\ell mg \sin \varphi$$

である。

(2) 式 (5.21) はトルク N と角運動量 L の関係を与える方程式であり、いま、トルクの表式が φ で表されているので、角運動量 L を $\varphi, \dot{\varphi}$ で表せば、 φ に対する運動方程式が求まるはずである。

式 (5.11) により $L = m\ell^2\dot{\varphi}$ を得るから、上の問 (1) の結果の N を用いて式 (5.21) から

$$\frac{d}{dt} m\ell^2\dot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

が得られる。したがって

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi,$$

よって求める式 (2.51) が得られた。

【解説】

小問 (1) では式 (5.24) を使ってトルクを計算したが、式 (5.23) を使うと次のように計算できる。式 (5.23) ではおもりに作用する力とおもりの位置ベクトルのそれぞれの成分 (F_x, F_y) が点 (x, y) を用いてトルクを定義している。いまの場合、重力と図から分かる位置ベクトルはそれぞれ

$$F_x = mg, F_y = 0, \quad x = \ell \cos \varphi, y = \ell \sin \varphi$$

となる。したがっておもりに作用する力のトルクは

$$N = m(xF_y - yF_x) = -mgl \sin \varphi$$

である。

5.1-4

【解答例】

xy 平面内を運動する質点の角運動量は位置 (x, y) と運動量 (mv_x, mv_y) が分かると $L = m(xv_y - yv_x)$ から求められる。時刻 $t = 0$ に位置 $(0, 0)$ から速度 $(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ で投げ出された石の位置と速度はそれぞれ、

$$x = v_0 t \cos \theta, y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_x = v_0 \cos \theta, v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

と表される。これらを L の表式に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} xv_y &= v_0^2 t \sin \theta \cos \theta - v_0 g t^2 \cos \theta, \\ yv_x &= v_0^2 t \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} v_0 g t^2 \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad L = -\frac{1}{2} m v_0 g t^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

よって、石の角運動量 L は

$$\mathbf{L} = \left(0, 0, -\frac{1}{2} m v_0 g t^2 \cos \theta \right)$$

のように求まる。

一方、トルクの z 成分は位置 (x, y) と力 (F_x, F_y) によって $N = xF_y - yF_x$ から求められる。ここで $F_x = 0$, $F_y = -mg$ であるから上の (x, y) とこの \mathbf{F} を N の式に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} xF_y &= -m v_0 g t \cos \theta, \\ yF_x &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad N = -m v_0 g t \cos \theta.$$

よって、石に作用するトルク \mathbf{N} は

$$\mathbf{N} = (0, 0, -m v_0 g t \cos \theta)$$

のように求まる。上の \mathbf{L} を時間 t で微分すると上の \mathbf{N} に一致することが分かるので、 $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ が成立することがたしかめられた。

【解説】

平面内の運動をする質点の角運動量は、その運動が直線状の運動であっても放物線上の運動であっても、一般に 0 ではない。力が作用して加速が起きる場合には角運動量は時間とともに変化する。この問題と前 2 つの問題では、分かっている運動から定義にしたがって角運動量とトルクを求めることとそれらの関係を確認することが課題である。

【問題のねらい】

与えられた表式を代入して方程式が成り立つことを確かめることは、それ自体に大きな目的のあることではない。トルクと角運動量が満たす運動方程式はニュートンの法則を使って導いたものであるから、個々の運動で検証する必要はない。課題の目的はむしろ、分かっている運動を例にとって運動方程式に慣れることにより、今後の、作用する力や拘束条件を知って運動を求める応用問題に対応するときに備えることである。

5.1-5

【解答例】

テーブルの穴の位置を原点として 2 次元極座標 (r, φ) をとる。質点は $t \leq 0$ では半径 r_0 で角速度 ω_0 の等速円運動をしているから、その位置は次のように表せる：

$$t \leq 0 \text{ で } (r, \varphi) = (r_0, \omega_0 t).$$

質点はひもを通じて原点 O に向かう力を受ける。等速円運動をしているときの向心力も、ひもの長さが短くなっていくときの余分な力もすべて、力は原点に向かっている。この力による O に関するトルクは、力の作用点が O を通るので、0 である。よって角運動量 L は保存され、すべての時間帯で一定である。

極座標 (r, φ) で表すと角運動量の表式は

$$L = m r^2 \dot{\varphi} \tag{22}$$

であることを学んだ (式 (5.11))。 $t \leq 0$ での値 $r = r_0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$ を代入すると、

$$t \leq 0 \text{ で } L = m r_0^2 \omega_0 \tag{23}$$

である。角運動量が一定であるので式 (22) の値は $t = 0$ における値、式 (23)、に固定されており、これにより $\dot{\varphi}$ は求まり、 $\dot{\varphi} = r_0^2 \omega_0 / r^2$ である。以下 $\dot{\varphi}$ を ω と記すことにすると、 ω は r が時間変化するとき、それに従って変化して

$$0 \leq t \leq T \text{ で } \omega = r_0^2 \omega_0 / r^2 \quad (24)$$

である。これにより、ひもが短くなるにつれて回転が速まる様子が表されている。 $t \geq T$ では r は一定で $r = r_0/2$ であるから、 ω も一定であり、求める結果は：

$$t \geq T \text{ で } \omega = 4\omega_0$$

【解説】

問題では頭に答えを求められていないが、ひもの長さが変化する時間帯 $0 \leq t \leq T$ の $r = r_0(1 - t/2T)$ を式 (24) に用いると、このときの角速度が時間の関数として求まり、結果は次のとおりである：

$$0 \leq t \leq T \text{ で } \omega = \frac{\omega_0}{(1 - t/2T)^2}.$$

$t \geq 0$ における ω の時間変化の様子をグラフに表すと図 10 のようになる。

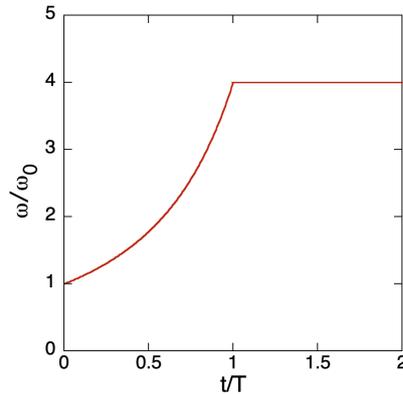


図 10: 問題 5.1-5 における質点の角速度 ω の時間 t 依存性.

5.2-1

【解答例】

3次元空間を運動する質点の角運動量は、式 (5.30) に定義されているように、質点の位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と運動量 $\mathbf{p} = (mv_x, mv_y, mv_z)$ を用いた式、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(yv_z - zv_y, zv_x - xv_z, xv_y - yv_x)$ から求めることができる。

与えられた座標の時間変化は、 a, ω, c を定数として、

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = c$$

であり、これらの時間微分から

$$v_x = -a\omega \sin \omega t, \quad v_y = a\omega \cos \omega t, \quad v_z = 0$$

が求まるので、これらを \mathbf{L} の式に代入する。計算は、

$$yv_z - zv_y = 0 - ac\omega \cos \omega t, \quad zv_x - xv_z = -ac\omega \sin \omega t - 0, \quad xv_y - yv_x = a^2\omega \cos^2 \omega t - (-a^2\omega \sin^2 \omega t)$$

を整理して、原点 O に関する角運動量を次のように得る：

$$\mathbf{L} = (-mac\omega \cos \omega t, -mac\omega \sin \omega t, ma^2\omega).$$

この z 成分は一定値を取り、 x 成分と y 成分は時間とともに振動する。

【解説】

角運動量は基準となる点が違うと違った値をもつ。問題では原点に関する角運動量であったが、もし仮に質点の円運動の中心である点 $(0, 0, c)$ に関する角運動量を求めるならば、上の計算で z の代わりに $z - c$ が使われ、答は

$$\mathbf{L} = (0, 0, a^2\omega)$$

であり、これは時間的に変動しない。

題意のように単純な等速円運動を行っている質点の角運動量は時間変化しない定数であると考えがちだが、原点に関する角運動量が時間的に変動しているということは、質点に作用する力の原点に関するトルクが0ではないことを意味する。等速円運動を起こしている力（向心力）は、原点ではない点 $(0, 0, c)$ に向かう力であるから、原点に関するトルクは0でなくて当然である。

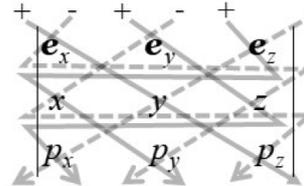
角運動量を直角座標の成分を用いて計算するときには、ベクトル積の成分表記を記憶必要がある。教科書 79 ページでも触れた行列式表示が役に立つと感じる学生が多いようである。この問題の角運動量をこの方法で計算すると、以下のようになる。

角運動量ベクトルの定義式

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

行列式の計算法



$$= \mathbf{e}_x(y p_z - z p_y) + \mathbf{e}_y(z p_x - x p_z) + \mathbf{e}_z(x p_y - y p_x)$$

$z = c, p_z = 0$ であるから

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & c \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x(-c p_y) + \mathbf{e}_y(c p_x) + \mathbf{e}_z(x p_y - y p_x)$$

あとは、最後の式に x, y, p_x, p_y の式を代入すればよい。

【問題のねらい】

角運動量の定義を用いて与えられた運動について角運動量を計算できればいいということではなく、角運動量には基準とする点が重要であることに気づくことが期待されている。

5.2-2

【解答例】

この質点に作用する力は、重力とひもの張力である。質量が m であるから、鉛直上向きを z 軸としてその基本ベクトルを \mathbf{e}_z と記すと、重力は $-m g \mathbf{e}_z$ である。ひもを固定している点を原点として質点の位置ベクトルを \mathbf{r} と記すと、張力の大きさを T として、張力は $-T \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$ である。

球面振り子の原点 O に関する角運動量 \mathbf{L} の時間変化は作用する力の原点に関するトルク \mathbf{N} で与えられ、

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r} \times (-m g \mathbf{e}_z) + \mathbf{r} \times \left(-T \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right),$$

である。トルクの第1項が重力によるもの、第2項が張力によるものである。ベクトル積の定義により、第1項はベクトル積は \mathbf{r} と \mathbf{e}_z の両方に垂直である。とくに、 \mathbf{e}_z に垂直であることからこのベクトル積の z 成分は0であることがわかる。第2項は同じ方向 (\mathbf{r}) の2つのベクトルのベクトル積だから0である。よって、トルクの z 成分が0であることが示されて、 L_z は時間変化せず一定であることが示された。

【解説】

球面振り子の運動は、球面上をあらゆる向きに動き回る複雑なものになっていると想像される。規則性を見出すことは難しいかもしれないが、要求されている角運動量の z 成分の保存することだけに限れば簡単である。おもりに作用する力の向きの考察からトルクの向きを考察すればよい。

3次元の問題を解くときには、ベクトルの向きに注意して式を整理することが大切である。

5.3-1

【解答例】

2つの任意のベクトル \mathbf{X} と \mathbf{Y} についての内積 $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ と外積 $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ の成分表示に従って、任意のベクトル \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} について $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ の表式、またそれを用いた $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ の表式を求めると、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x). \quad (25)$$

また同様に、

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = B_x(C_y A_z - C_z A_y) + B_y(C_z A_x - C_x A_z) + B_z(C_x A_y - C_y A_x), \quad (26)$$

である。式 (25) で B_x を含む項を取り出すと $A_y(-B_x C_z) + A_z(B_x C_y)$ である。これは式 (26) の右辺の初めの項 $B_x(C_y A_z - C_z A_y)$ に一致する。同様に式 (25) で B_y を含む項、また B_z を含む項について調べると、それぞれ式 (26) の右辺の第2の項 $B_y(C_z A_x - C_x A_z)$ 及び第3の項 $B_z(C_x A_y - C_y A_x)$ にそれぞれ一致するから、全体として式 (25) の右辺と式 (26) の右辺が一致することが確かめられた。したがって左辺どうしも等しい、つまり

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

が確かめられた。同様に次についても確かめられる：

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

5.4-1

【解答例】

式 (5.64) は惑星の公転周期 T 、軌道の長半径 a 、太陽の質量 M の間に

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

が成り立つことを表している。ここで G は重力定数である。

題意は、地球について $T = 365.256$ 日、 $a = 1.496 \times 10^{11}$ m、既に式 (3.40) で与えられ、式 (5.44) の下でも用いた $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ を用いて M の数値を求めることである。ここで、1日 = $24 \times 60 \times 60$ s の換算を用いる。上の式 (5.64) から導いた式

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

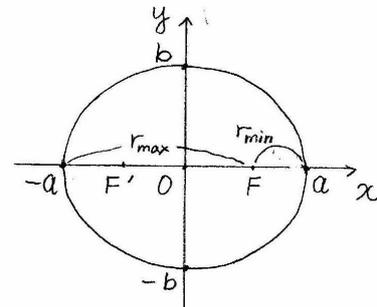
にそれらの数値を代入して、有効桁数4桁の計算をする。結果は $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg となる。

5.4-2

【解答例】

xy 平面で中心を原点に置き長軸を x 方向に置いた楕円を使って、楕円についての基本的な性質を整理しておく。長軸の長さを $2a$ 、短軸の長さを $2b$ とする。ここで $a > b$ としている。この楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



である。2つの焦点 F, F' の座標は $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ である。それぞれの焦点から楕円周上の任意の一点までの距離の和は一定値 $2a$ である。

(1)

太陽が惑星の楕円軌道の焦点 F の位置にあるとする。焦点から軌道までの最近点と最遠点は長軸の両端である。したがって、 $r_{\max} + r_{\min}$ はちょうど長軸の長さ $2a$ に等しい。よって、

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$$

である。次に、点 $(a, 0)$ は周の上で焦点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ からの最近点であるから、 $r_{\min} = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ 、点 $(-a, 0)$ は周の上で焦点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ からの最遠点であるから、 $r_{\max} = \sqrt{a^2 - b^2} - (-a)$ 、この式の辺々を掛け合わせて、 $r_{\max}r_{\min} = a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2$ となる。よって求める結果は

$$b = \sqrt{r_{\max}r_{\min}}$$

である。

(2)

ケプラーの第2法則は面積速度が一定であることをいうが、上の図の場合に式で表すと次のようになる。焦点 F を改めて原点にとり、原点から惑星までの距離を r 、惑星の位置の偏角を φ 、とすると、ケプラーの法則は、 $r^2\dot{\varphi}$ が一定であることを保証する。この値を教科書の本文の式 (5.43) に従って面積速度 h で表すと、

$$r^2\dot{\varphi} = 2h \quad (\text{一定})$$

である。 $r = r_{\min}$ のときに速度が最大で v_{\max} であることが与えられている。そのとき速度 v は動径 r に垂直であるので、速さを v とすると $\dot{\varphi} = v/r$ が成り立ち、次が成り立つことが分かる：

$$r_{\min}^2 \frac{v_{\max}}{r_{\min}} = 2h, \quad \Rightarrow \quad r_{\min}v_{\max} = 2h.$$

$r = r_{\max}$ のときに速度が最小で v_{\min} であることが与えられている。そのときも速度 v は動径 r に垂直であって $\dot{\varphi} = v/r$ であるので、上と同様に次が成り立つことが分かる：

$$r_{\max}^2 \frac{v_{\min}}{r_{\max}} = 2h, \quad \Rightarrow \quad r_{\max}v_{\min} = 2h.$$

公転周期 T は楕円の面積 πab を面積速度で割ると得られ (教科書の式 (5.63) 参照) 、

$$T = \frac{\pi ab}{h}$$

である。この分母の h を上で求めた2通りの式を使って消去し、整理するとそれぞれから

$$v_{\max} = \frac{2\pi ab}{Tr_{\min}}, \quad v_{\min} = \frac{2\pi ab}{Tr_{\max}}$$

が得られる。この a, b に問 (1) で求めた表式を代入してそれぞれから

$$v_{\max} = \frac{\pi(r_{\max} + r_{\min})}{T} \sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}}, \quad v_{\min} = \frac{\pi(r_{\max} + r_{\min})}{T} \sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}}$$

を得る。

5.4-3

【解答例】

地球の軌道円の半径を a_E 、火星の軌道円の半径を a_M と記す。この火星ロケットの運動は、地球からの離脱と火星への着陸の部分を除けば、あたかも惑星として太陽を焦点とする楕円軌道をたどる運動である。軌道の楕円は近日点で地球の軌道と接し、遠日点で火星の軌道と接して、軌道の長半径を a_R と記すと、 $2a_R = a_E + a_M$ が成り立つ。よって、与えられている地球と火星の軌道半径の関係から地球軌道半径とロケットの軌道長半径の関係として次を得る：

$$a_M = 1.52a_E \quad \Rightarrow \quad a_R = 1.26a_E.$$

(1)

ロケットが楕円軌道を一周するとした場合の所要時間を T_R とおき、地球の公転周期の $T_E = 365$ 日を使うと、ケプラーの第3法則により、

$$\frac{T_R^2}{a_R^3} = \frac{T_E^2}{a_E^3}$$

が成り立つ。これより、

$$T_R = T_E \sqrt{\frac{a_R^3}{a_E^3}}$$

であり、上で求めた長径の比 1.26 と地球の公転周期の数値から、この値は 516 日と求まる。求める時間は一周の半分であり、地球から火星までの所要時間として 258 日を得る。問題に与えられた数値 $a_M/a_E = 1.52$ は 1 で始まるので、有効桁数は 2 桁と見なされる。したがって、有効数字を考慮して解答すると、地球から火星までの所要時間は 2.6×10^2 日となる。

(2)

楕円軌道について、問題 5.4-2 で扱った太陽から近日点までの距離と遠日点までの距離を今のロケットの軌道のものとし、近日点における速さを今のロケットの地球軌道における速さとし、

$$r_{\min} = a_E, \quad r_{\max} = a_M, \quad v_{\max} = v_R$$

の置き換えをすると、問題 5.4-2 (2) の結果から

$$v_R = \frac{\pi(a_E + a_M)}{T_R} \sqrt{\frac{a_M}{a_E}}$$

が成り立つ。また、地球の速さは円周と公転周期から

$$v_E = \frac{2\pi a_E}{T_E}$$

と表せる。これらの比をとる。その際にケプラーの第 3 法則による T_E/T_R の書き換えと、さらに軌道半径の関係を使った書き換えをする。次のように結果が得られる：

$$\frac{v_R}{v_E} = \frac{T_E}{T_R} \frac{a_E + a_M}{2a_E} \sqrt{\frac{a_M}{a_E}} \Rightarrow \frac{v_R}{v_E} = \sqrt{\frac{a_E^3}{a_R^3} \frac{a_E + a_M}{2a_E} \sqrt{\frac{a_M}{a_E}}} \Rightarrow \frac{v_R}{v_E} = \sqrt{\frac{2a_M}{a_E + a_M}}$$

与えられている数値を代入して、速度の比として $v_R/v_E = 1.10$ が得られる。これより相対速度の大きさは $|v_R - v_E| = 0.10v_E$ である。

(3)

質量 m のロケットが、質量 M の太陽と結んだ直線上を太陽から遠ざかる向きに航行するするとし、太陽からの距離が r のとき速さが v であるとすると、力学的エネルギーの保存を表す関係式

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{一定}$$

が成り立つ。ロケットが地球の位置 $r = a_E$ から出発して火星の軌道に相当する位置 $r = a_M$ に到達したときに速さがちょうど 0 になるような出発時の速さを v_R で表すと、

$$\frac{1}{2}v_R^2 - \frac{GM}{a_E} = 0 - \frac{GM}{a_M} \Rightarrow v_R = \sqrt{2 \frac{GM(a_M - a_E)}{a_E a_M}}$$

となる。ところで地球の公転の速さは、円運動の向心力が太陽からの引力で与えられることから求めることができ、

$$m \frac{v_E^2}{a_E} = \frac{GMm}{a_E^2} \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{GM}{a_E}}$$

が成り立つ。これを上の結果に用いると

$$\frac{v_R}{v_E} = \sqrt{\frac{2(a_M - a_E)}{a_M}}$$

が得られる。数値を代入して、必要なロケットの速さの最小値は $v_R/v_E = 0.827$ となる。有効数字を考慮すると、解答は $v_R/v_E = 0.83$ である。

地球は軌道上を速さ v_E で動いているから、地球に乗ったロケットが問題の図 (b) の地球の位置にあたかも静止していた状態から図の火星の位置に向かう軌道をたどるためには、火星の軌道に向かう速度に加えて、地球の公転速度を打ち消すための地球に対する相対速度が必要である。前者の大きさは v_R 、後者の大きさは v_E であり、向きはたがいに垂直だから、両者を合わせた相対速度の大きさ v は次によって求められる：

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_E^2} = 1.30 v_E.$$

これは小問 (2) における相対速度の約 13 倍である。

(4)

本書の問題 3.4-2 では、地表から投げ上げた物体が地球の重力に逆らって上空に到達するために必要な時間 T を求めた。その結果は式 (3.38) で与えられる。ここでは、太陽の引力に逆らって、図 5.16(b) の直線軌道に沿ってロケットが地球の軌道から火星の軌道に到達するために必要な時間を求める。両者は、設定は異なるが、数学的には同じ問題である。式 (3.38) における、地球の半径 R 、投げ上げた物体の最高到達の高さ h 、地表における重力加速度 g のそれぞれは、火星ロケットの問題では次のように読み替えられる。

$$R \rightarrow a_E, \quad h \rightarrow a_M - a_E, \quad g \rightarrow \frac{GM}{a_E^2}.$$

なお、最後の GM/a_E^2 は地球軌道上における太陽（質量 M ）の重力による加速度の大きさである。また、この加速度の大きさは地球の公転運動の加速度の大きさ v_E^2/a_E に等しく（小問 (3)）、公転の速さ v_E は公転周期 T_E を使って $v_E = 2\pi a_E/T_E$ と表すことができる（小問 (2)）ので、上の対応関係は

$$R \rightarrow a_E, \quad h \rightarrow a_M - a_E, \quad g \rightarrow a_E \left(\frac{2\pi}{T_E} \right)^2$$

と書き換えられる。式 (3.38) において、これらの読み替えをすると、ロケットが地球から火星まで到達するのに必要な時間 T として次の結果を得る。

$$T = \frac{T_E}{2\pi} \sqrt{\frac{a_M}{2a_E}} \left(\sqrt{\frac{a_M}{a_E} - 1} + \frac{a_M}{a_E} \arctan \sqrt{\frac{a_M}{a_E} - 1} \right).$$

この式に $T_E = 365$ 日、 $a_M/a_E = 1.52$ を代入して計算すると、 $T = 84.6$ 日になるので、有効数字 2 桁で答えると、85 日となる。

【参考】

問題 3.4-2 の式 (3.38) に頼らずに答えるとすれば、以下のようなになる。

ロケットの経路と速さは前問 (3) で考えた通りのものである。そこでわかったように、火星の軌道にやっと到達できるような速さで出発したときに、太陽からの距離が r であるときのロケットの速さ v が満たす方程式と、それによって求められた速さ v を距離 r で表した式は、

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{a_M} \Rightarrow v = \sqrt{2\frac{GM(a_M - r)}{ra_M}}$$

である。この式で、 \sqrt{GM} を小問 (3) で使った v_E と a_E との関係式によって消去し、その v_E を小問 (2) で使った a_E と T_E で表す式を用いて消去すると、次の表式が得られる：

$$v = \frac{2\pi a_E}{T_E} \sqrt{2\left(\frac{a_M}{r} - 1\right)} \sqrt{\frac{a_E}{a_M}}.$$

一般に単調な 1 次元運動で速度 v が座標 r の関数であるとき $r = *$ から r までの経過時間は

$$t = \int_*^r \frac{dr}{v(r)}$$

である。ロケットが $r = a_E$ を出て $r = a_M$ に達するために要する時間（日数）を $t = T$ と置くと、

$$T = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_M}{a_E^3}} \int_{a_E}^{a_M} \sqrt{\frac{r}{a_M - r}} dr T_E$$

である。 r についての積分を公式：

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}$$

を用いて評価をして、全体を整理すると次を得る：

$$T = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_M^3}{a_E^3}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{a_E}{a_M}} + \sqrt{\frac{a_E}{a_M} \left(1 - \frac{a_E}{a_M}\right)} \right) T_E.$$

数値を代入して T の値が得られ、地球の軌道から火星の軌道まで太陽と反対の向きに直線的に運動してちょうど火星の軌道で止まる運動に要する時間は、85 日、と求まった。

【解説】

最近では、惑星や小惑星の探査をする観測機器が太陽系内を飛行するようになっている。宇宙空間の

旅には、その軌道を決めるときに太陽からの引力が大きな制約になるし、惑星の引力を利用したスウィングバイもある。そういうことのない地上での日常の平面運動に慣れて、直線的に移動することが最短と思っている人々にとっては意外な事情がある。力学を勉強して、エネルギー・運動量・角運動量の保存則を知っている読者の皆さんだから、ロケットエンジンの負担を考えた時に有利な軌道がどのようなものかを、典型的ないくつかの軌道でしかも簡単に計算ができる場合について試して考えてみることは、有意義であろう。

本問題では正確な数値を求めることを課題にしたが、それは計算力を高める目的のためである。一方で、軌道によって大きな違いがあるときにその違いの程度を大まかに感じることも必要であろう。速度について、また所要日数について、軌道による違いを概算で比較してみてもどうだろうか。

正確な計算のために積分公式の利用は有効である。本問題では上のような公式を利用したが、公式集が近くにならないときは、 $\sqrt{x/(1-x)}$ の不定積分のように平方根に x と $1-x$ が混在する関数の積分では置換積分を試すとよい。例えば $x = \sin^2 \theta$ とおく。被積分関数は $\tan \theta$ に等しく、また $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ であるから、求める積分は $\int 2 \sin^2 \theta d\theta$ に帰着する。なお、問題 3.4-2 では別の置換積分をしたが、それはここで行ったことと同等である。そのときの変数 x を $x = r - R$ で置き換えると本問題の r を変数とする積分に対応する。

5.4-4

【解答例】

点 Q を点 P と地球の正反対にあって地表から高さ 0 の点とする。点 P における衛星の速さ v_1 と、点 Q における速さ v_2 を用いて力学的エネルギーが一定であることを表すと、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R}$$

である。次に、点 P および点 Q において衛星の速度は地球の中心からの位置ベクトルに垂直であるから、角運動量が一定であることを表すと、

$$m(R+h)v_1 = mRv_2$$

である。これらの式から v_2 を消去すると、

$$v_1 = \sqrt{\frac{R}{2R+h} \frac{2GM}{R+h}}$$

を得る。数値を代入して、 $v_1 = 7.55 \text{ km/s}$ と求まる。

5.4-5

【解答例】

宇宙エレベーターの宇宙駅は一つの静止衛星である。地表からの高さを H とする。エレベーターは地上駅と宇宙駅の途中にある。題意から、エレベーターの鉛直速度が 0 であるとして、そこからそつと放出された物体が地球をまわりながら落下して描く楕円軌道の地球に最も近い位置がちょうど地表である条件を求めればよい。軌道の楕円の長軸の両端が、放出された点と最近接する点であり、いずれの点においても物体の速度は地球からの動径ベクトルに垂直であることに注意する。

エレベーターの地表からの高さを h とし、条件を満たすときの値を h_0 とすると、もし $h > h_0$ であるならば物体は地表にぶつかることなく衛星として地球を周回する。以下に、いくつかの条件を式で表し、与えられた h_0 の数値がほかの量の既知の数値と無撞着であることを示せばよい。地球の半径を R 、質量を M 、静止衛星の高度を H 、周回する速さを v_0 、地球の自転周期を T 、放出された物体のはじめの速さと地球に最も近いときの速さをそれぞれ v_1, v_2 とする。

静止衛星であるための条件

円運動の半径は $R + H$ であるから円運動の加速度と重力を用いて運動方程式から導かれる式、

$$\frac{v_0^2}{R+H} = \frac{GM}{(R+H)^2} \therefore v_0^2 = \frac{GM}{R+H} \quad \text{ただし} \quad v_0 = \frac{2\pi(R+H)}{T} \quad (27)$$

が成り立つ。

エレベータの位置の条件

地上駅、エレベーター、宇宙駅はこの順に直線上に並んだまま周回するから、次が成り立つ：

$$\frac{v_0}{R+H} = \frac{v_1}{R+h_0}. \quad (28)$$

物体の運動の力学的エネルギー保存

重力のポテンシャルを無限遠点を基準にとると、放出された瞬間と、地球に最も近い点での値の間に成り立つエネルギー保存の等式を用いると、次が成り立つ：

$$v_1^2 - 2\frac{GM}{R+h_0} = v_2^2 - 2\frac{GM}{R}. \quad (29)$$

物体の運動の角運動量保存

動径方向と速度が垂直であることから、放出された瞬間と、地球に最も近い点での値の間に成り立つ角運動量保存の等式を用いると、次が成り立つ：

$$v_1(R+h_0) = v_2R. \quad (30)$$

これらから変数を消去して簡単な方程式に整理する。まず GM を式 (27) により v_0 で表して式 (29) から消去すると、

$$v_1^2 - 2v_0^2\frac{R+H}{R+h_0} = v_2^2 - 2v_0^2\frac{R+H}{R} \quad (31)$$

となる。これに式 (30) を用いて v_2 を消去して整理すると

$$v_1^2\frac{2R+h_0}{R} = 2v_0^2\frac{R+H}{R+h_0} \quad (32)$$

となる。ここで速さ v_0, v_1 には式 (28) の関係があるから、速さを消去して距離だけの関係を残し、すこし整理して最終的な方程式が次のように求まる：

$$\frac{(R+h_0)^3}{(R+H)^3} = \frac{2R}{(2R+h_0)}. \quad (33)$$

地上駅が地球の中心から $R = 6.37 \times 10^3$ km、宇宙駅の高さ（静止衛星の高さ）が $H = 3.58 \times 10^4$ km であることを用いて、 $h_0 = 2.34 \times 10^4$ km がこの方程式の解であることを確かめる。これらの数値を代入すると左辺 = 0.352、右辺 = 0.353 となり、計算誤差の範囲で一致し、この h_0 は解である。

【注記】

略解で示した方程式は $R = (R+h_0) \left(\frac{(R+h_0)}{(R+H)} \right)^3 / \left(2 - \left(\frac{(R+h_0)}{(R+H)} \right)^3 \right)$ である。この式を $\left(\frac{(R+h_0)}{(R+H)} \right)^3$ について整理すると式 (33) と同じであることが確かめられる。

第 6 章 質点系の力学

6.1-1

【解答例】

地球の中心を原点に、月に向かう方向を x 軸にとる。地球と月のそれぞれの中心の座標を x_E, x_M と記すと、 $x_E = 0$ であり、 $x_M = 3.844 \times 10^5$ km と与えられている。地球の質量を m_E と記し、月の質量を m_M と記すと $m_M = 0.0123m_E$ と与えられている。

地球から重心までの距離を ℓ とする。重心の位置の定義により

$$\ell = \frac{m_E x_E + m_M x_M}{m_E + m_M} = \frac{m_M/m_E}{1 + m_M/m_E} x_M$$

である。数値を代入して計算すると

$$\ell = \frac{0.0123}{1 + 0.0123} \times 3.844 \times 10^5 \text{ km} = 4.671 \times 10^3 \text{ km}.$$

この計算に含まれる数値で有効桁数が一番小さいのは 0.0123（最初の桁の数値が 1 だから有効数字 2 桁）なので、有効数字 2 桁で答えると、

$$\ell = 4.7 \times 10^3 \text{ km}.$$

これは地球の半径の約 0.73 倍である.

6.2-1

【解答の方針】

上の円板を押し込んだ手を離れた後に, 上の円板が上昇してばねの自然長からの伸び Δl が十分に大きくなって, バネによる力の大きさ $k\Delta l$ が下の板を持ち上げるほど ($k\Delta l > mg$) になるための条件を求めればよい. そして, 上の円板を押し込んだ距離 a と Δl の関係はエネルギー保存則から求めることができるので, この Δl についての条件は a に対する条件として表すことができる.

【解答例】

図 (a) に示すようにバネの自然長を l_0 とする. 図 (b) に示すように, 質量 m の円板を上にとめ, バネの長さが l_1 になったところでつり合って静止したとする. 上の円板を押ししてさらに a だけバネを縮めたところを図 (c) に示す. 手を放してバネが伸び始めてしばらく経過したときの上の円板の位置座標を図 (d) のように, つり合いの位置を原点として, x で記す.

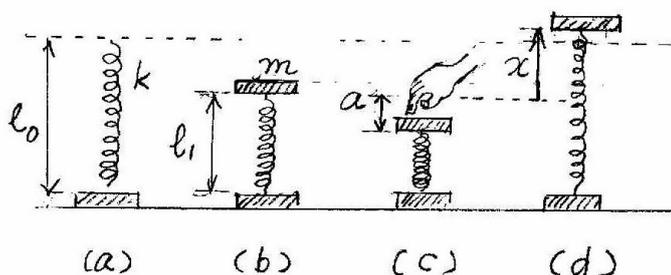


図 (b) のとき, ばねの力と上の円板に作用する重力のつり合いの条件は, $mg = k(l_0 - l_1)$ であり,

$$l_1 = l_0 - \frac{mg}{k} \Rightarrow \text{つり合いの位置 (b) でバネの伸び} = -\frac{mg}{k}, \quad x = 0.$$

図 (c) のとき, 長さ a だけ下がっているので

$$\text{押さえられた位置 (c) でバネの伸び} = -a - \frac{mg}{k}, \quad x = -a.$$

図 (d) のようにバネの長さが自然長よりも長く伸びたとき, 下の円板に作用する力は下向きに重力 mg と上向きのばねの力 $k(x + l_1 - l_0)$ と床から受ける垂直抗力 R である. バネの力は上の l_1 を与える式から, $k(x - mg/k)$ である. R は下の円板が床に押し付けられている限り動き出さないことから, $R = mg - k(x - mg/k)$ を満たす. R は負にならないから, x が増加してこの右辺が 0 になった瞬間に下の円板は床を離れて持ち上げられる. 右辺が負になる条件は $x > 2mg/k$ である. 下の円板が床から離れる瞬間は $x = 2mg/k$ であり, x の定義から

$$\text{図 (d) で下の円板が床を離れるときのバネの伸び} = \frac{mg}{k}, \quad x = \frac{2mg}{k}.$$

ここで, 重力の下での互いに力を及ぼしあう上下の円板からなる質点系についてのエネルギー保存則を用いる. ただし, 下の円板が静止している間に限ることにして, 下の円板の重力ポテンシャルエネルギーは省略する. 左辺に図 (c) の位置に静止しているときのポテンシャルエネルギー, 右辺に図 (d) で $x = 2mg/k$ となった瞬間のポテンシャルエネルギーと速度を v とした運動エネルギーの和, を等置するとエネルギー保存を表す方程式として次のように得る:

$$\frac{1}{2}k \left(a + \frac{mg}{k} \right)^2 - mga = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 + mg \times \frac{2mg}{k}.$$

整理すると次を得る:

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2(mg)^2}{k}.$$

下円板が床を離れるときには上の円板の速度上向きで正 ($v > 0$) でなければならない. したがって, $a > 2mg/k$ ならば跳びあがることできる.

【解説】

a が十分に大きくないとつまり押し込み方が弱いと, バネの反発力が十分ではなく, 最初にバネに

よって跳ね上げられる上の円板の勢いが足りず、ばねが自然長に戻った後に上の円板にかかる重力とばねが上の円板を引き戻そうとする力の和に逆らうことができず、十分な高さまで到達できない。その結果下の円板を引き上げることができない、といえる。

しかし、運動方程式を使ってこうした円板の運動を求めて、問題を解こうとすることは、時間と手間がかかる。ここでは、エネルギーの問題として保存則を利用することが便利である。

重力のポテンシャルを式で表すときに高さの原点をどこにとってもよい。解答例では、計算が少なくて済むようにとったが、例えば下の円板の位置を原点にとっても最後の答は同じになる。

【問題のねらい】

質点が2個以上含まれる体系の運動を記述し、予測することについてこの章で学ぶが、一般に運動方程式は込み入ったものになる。そのようなとき、特にエネルギー保存則の位置づけを理解し、方法に慣れることは今後の学びに役に立つであろう。

6.3-1

【解答例】

弾丸と物体の運動は水平面上で起こり、衝突後に物体は弾丸の運動した軌道の直線に沿って進むと考えられる。したがって、2つの質点が1次元的な運動をするときの問題として答えればよい。図の右向きを x 軸にとる。 m, M, v は与えられているとおりとし、合体したのちの速度を V とする。2つの質点には x 軸方向の外力が作用しないので運動量の x 成分 P は保存する。

運動量は衝突前の速度（それぞれ v と 0 ）あるいは衝突後の速度（ともに V ）で表され、

$$\text{衝突前 } P = mv$$

$$\text{衝突後 } P = (M + m)V$$

である。よって $mv = (M + m)V$ が成り立つ。これより求める複合体の速度として次が得られる：

$$V = \frac{m}{M + m}v.$$

6.3-2

【解答例】

問題の図 6.11 に描かれた台車を質量の大きな質点として右図のバネの左側の物体で表し、スプリングによって打ち出される質点を右図のようにバネの右側の物体で表す。バネの自然の長さを l_0 で表す。図 (a) は自然の状態を示す。図 (b) はバネを何らかの方法で a だけ押し縮め、押す力を取り去った瞬間を示す。図 (c) は、その後バネが伸びてちょうど自然の長さになった瞬間を示す。それ以後バネが押す力は消失するから、軽い物体はばねと離れてそのまま飛び去る。

この2つの質点は、図 (b) の状態から図 (c) の状態に至る間、互いに力を及ぼしあう質点系をなしている。外力の作用しない孤立系とみなせるから、系の力学的エネルギー E と運動量 P は保存される。 P は図の右向きを正とする。

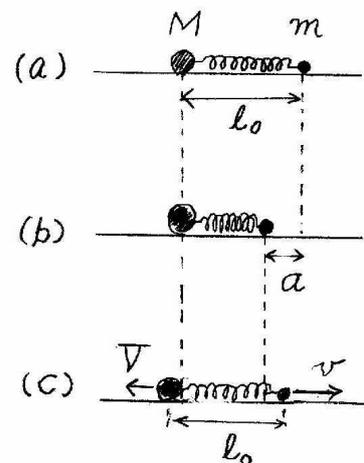


図 (b) の時バネの伸びは $-a$ で質点はいずれも静止していて $E = ka^2/2$, $P = 0$,

図 (c) のときバネの長さは自然長、質点の速さは V, v で $E = MV^2/2 + mv^2/2$, $P = -MV + mv$, 保存則を式で表すと。

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$0 = -MV + mv$$

となる．これから v を消去して式を整理すると，次の結果が得られる：

$$V = a \sqrt{\frac{mk}{M(m+M)}}.$$

【解説】

外力の作用しない2質点の体系である．したがって重心の速度は変化しない．初め止まっていた重心はバネが伸び切った後も止まったままである．ばねが切り離された後の速さは，ばねのエネルギーをそれぞれの運動エネルギーとして分け合ったものになる．分け合う比率は重心が留まる条件， $MV = mv$ で定まる．

【問題のねらい】

このような基本的な問題を解くとき，その筋道を自力でたどることによって，物理学で学ぶべき考え方を身につけることができる．

6.3-3(1)

【解答例】

右図の上のように，台車のバネを取り付けた位置を原点とする座標系をとり，初め自然の長さから a だけ縮めたバネの右上端に乗せた物体の位置を (x_0, y_0) とする．

時刻 $t = 0$ にバネの押さえを外したのち，時刻 $t = t_1$ にバネの長さが自然の長さに戻るまではこの物体はバネに押し戻され続ける．時間 $0 < t < t_1$ の物体の位置を (x, y) ，台車の位置（バネの左端の位置）を $(X, 0)$ と記す．台車の速さ V および物体の速さ v はそれらの位置と次の関係にある：

$$V = -\dot{X}, \quad v = (\dot{x}, \dot{y}).$$

台車と物体の2つの質点からなる体系の力学エネルギー E は保存する．時刻 $t = 0$ において，台車と物体は静止し，ばねの伸びは $-a$ であり，物体の重力によるポテンシャルエネルギーを0にとれば，

$$E = \frac{1}{2}ka^2.$$

時刻 $t = t_1$ においてバネの伸びは0であり，物体の重力によるポテンシャルエネルギーは $mg(y - y_0)$ であるから，このときは

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 + mga \sin \alpha$$

と書ける．ただし，ここで $y - y_0 = a \sin \alpha$ は，ばねの自然長を l_0 とするとき $y_0 = (l_0 - a) \sin \alpha$ と $y = l_0 \sin \alpha$ であることから導かれる．

この体系の運動量保存則は，水平方向成分についてだけ成り立つ．それは，鉛直方向には重力と床からの垂直抗力が作用しているからである．この保存則により，時刻 $t = 0$ には重心が静止していることから時刻 $t = t_1$ でも重心の速度の x 成分が0であり，次が成り立つ：

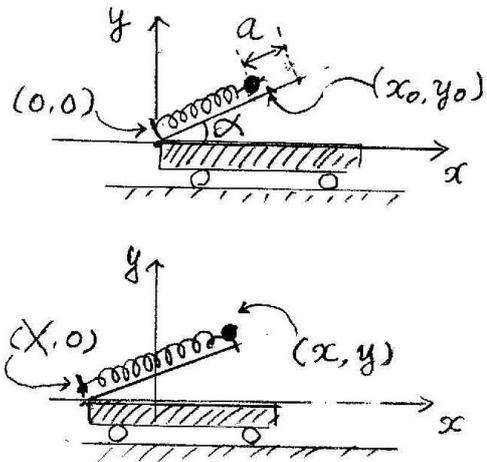
$$MV = mv_x.$$

さらに，物体の運動は常に台車の上の斜面上に限られるので，拘束条件が付く． $0 \leq t \leq t_1$ において，ばねの長さによらず $y/(x - X) = \tan \alpha$ (一定) である．よって次の関係が成り立つ：

$$v_y = (v_x + V) \tan \alpha.$$

これらの式から v_x, v_y を消去して得られる V の方程式を解けばよい．まず，エネルギー保存則によって得られる式

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 + mga \sin \alpha = \frac{1}{2}ka^2$$



において、運動量保存則（床に平行な成分）と拘束条件を用いて v_x, v_y を消去すると、

$$m \left(\frac{M}{m} V \right)^2 + \frac{(M+m)^2}{m} V^2 \tan^2 \alpha + MV^2 = ka^2 - 2mga \sin \alpha$$

が得られ、この左辺を変形して

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{V^2}{m} (M^2 + (M+m)^2 \tan^2 \alpha + mM) = \frac{V^2}{m} (M + (M+m) \tan^2 \alpha)(M+m) \\ &= \frac{V^2}{m \cos^2 \alpha} (M + m \sin^2 \alpha)(M+m) \end{aligned}$$

となるので、最終的に求まる V の表式は次のとおりである：

$$V = \cos \alpha \sqrt{\frac{m(ka^2 - 2mga \sin \alpha)}{(M + m \sin^2 \alpha)(M+m)}}$$

また、消去するときに用いた関係式により求める v の表式は次のとおりである：

$$v_x = \frac{M}{m} V, \quad v_y = \frac{M+m}{m} \tan \alpha V.$$

【解説】

前問 6.3-2 の単純な焼き直しで解答を作ることができない理由は、速度が 2 次元のベクトルであることによる。鉛直方向には床からの垂直抗力と重力を受けるため、体系は孤立系ではない。したがって孤立系についての運動量保存則は使えない。その代わりに、床に平行な向きの外力が作用しないことと、運動が斜面に沿っておこるといふ拘束条件を用る。

方法的な違いはあるにしても、前問と同じ考え方をすればよいことは理解できよう。

なお、本問で発射台が水平に置かれた場合は前問と同じことになるから、本問の結果で $\alpha = 0$ とおいたものは前問の結果に一致するべきである。読者自身で確かめられよう。

【問題のねらい】

エネルギー保存則と運動量保存則が基本であることを知ったうえで、問題に即して拘束条件が必要になる、あるいは便利に使えることが理解できるであろう。時々そのタイプの問題を解いて、拘束条件を利用する力を磨いていくとよい。

6.3-3(2)

【解答例】

例題 2.3-1 の結果は

$$l = v_0^2 \sin 2\theta / g$$

であった。初めの速度を (v_x, v_y) と置くと、 $v_x = v_0 \cos \theta, v_y = v_0 \sin \theta$ であることから、

$$l = 2v_x v_y / g$$

と表すことができる。この右辺に問題 6.3-3(1) で得られた v_x, v_y, V の表式を代入すると、飛距離 l の表式は次で与えられる：

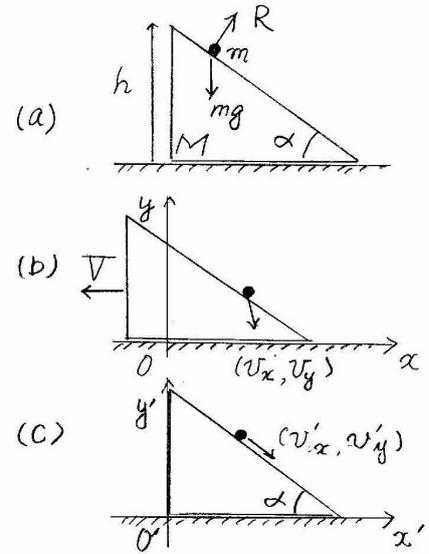
$$l = \frac{M \sin 2\alpha (ka^2 - 2mga \sin \alpha)}{m(M + m \sin^2 \alpha)g}.$$

6.3-4

【解答例】

質点は図 (a) に示すように、下向きで大きさ mg の重力、斜面からの右上向きの垂直抗力を受ける。垂直抗力の大きさを R とおく。また、三角柱はその反作用と床からの垂直抗力と重力の和によって左向きに力を受ける。このように質点と三角柱は互いに力を及ぼしあって一つの体系をなす。この体系に作用する外力のうち質点に作用する重力だけが仕事をするから、物体の重力ポテンシャルを含めたこの体系の力学的エネルギーは保存する。また、水平方向には外力が作用しないので体系の運動量の水平成分は保存する。

図 (b) に示すように x 軸と y 軸をとる。質点の速度を (v_x, v_y) 、三角柱の左向きの速さを V とおく。



体系の運動量の x 成分は $P_x = mv_x - MV$ である。初期時刻 $t = 0$ で静止していたので、このとき $P_x = 0$ である。 P_x は保存するから、つねに $mv_x - MV = 0$ 、よってつねに次が成立する：

$$mv_x = MV \quad (34)$$

図 (c) に示すように三角柱に固定した座標系の上での質点の速度を (v'_x, v'_y) と記すと、速度は斜面に沿っているので $v'_y/v'_x = -\tan \alpha$ である。斜面は静止系で見て左向きに移動するので図 (b) に示したように v_x は v'_x よりも小さく、 $v_x = v'_x - V$ である。また、 $v_y = v'_y$ である。よって、つねに次が成り立つ：

$$\frac{v_y}{v_x + V} = -\tan \alpha. \quad (35)$$

三角柱と質点の系の力学的エネルギー E は保存する。 E は質点の高さと質点の速度と三角柱の速さで与えられ、時刻 $t = 0$ で $E = mgh$ であり、斜面の下端に到達した時に、その時の v_x, v_y, V を用いて $E = MV^2/2 + mv_x^2/2 + mv_y^2/2$ である。したがって、次が成り立つ：

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = mgh \quad (36)$$

これらの方程式 (34), (35), (36) を連立させて V, v_x, v_y を求めることができる。まず式 (35) より、

$$v_y = -\left(\frac{v_x}{V} + 1\right)V \tan \alpha,$$

また式 (34) より

$$v_x = \frac{M}{m}V \Rightarrow v_y = -\left(\frac{M}{m} + 1\right)V \tan \alpha \quad (37)$$

である。これらを式 (36) に代入して書き換えた V についての方程式

$$MV^2 + \frac{M^2}{m}V^2 + m\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2 V^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2mgh$$

の左辺を変形すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{(M+m)(M \cos^2 \alpha + (M+m) \sin^2 \alpha)}{m \cos^2 \alpha} V^2 \\ &= \frac{(M+m)(M + m \sin^2 \alpha)}{m \cos^2 \alpha} V^2 \end{aligned}$$

となり、 V について解くと結果が得られる：

$$V = \sqrt{2gh} \frac{m \cos \alpha}{\sqrt{(M+m)(M + m \sin^2 \alpha)}}.$$

【解説】

問題文には要求されていないが，質点の斜面最下点に到達した瞬間の速度を求めるには得られた V の表式を式 (37) に用いる．結果は：

$$v_x = \sqrt{2gh} \frac{M \cos \alpha}{\sqrt{(M+m)(M+m \sin^2 \alpha)}}, \quad v_y = -\sqrt{2gh} \sin \alpha \sqrt{\frac{M+m}{M+m \sin^2 \alpha}}.$$

もしも斜面の台である三角柱が非常に質量の大きなものであったなら，質点の運動によってほとんど影響を受けることがないであろう．したがって，以上の結果で $M \rightarrow \infty$ の極限では， $V \rightarrow 0$ ， (v_x, v_y) は固定された高さ h の斜面を滑り落ちるときの表式 $\sqrt{2gh}(\cos \alpha, -\sin \alpha)$ に近づくことが確かめられよう．

6.4-1

【解答例】

2つの質点の x 軸上の1次元的な運動として考える． v_1, v_2, m_1, m_2, k は問題文に与えられた通りとする．質点系では重心の運動と相対運動に分けて考えると便利である．

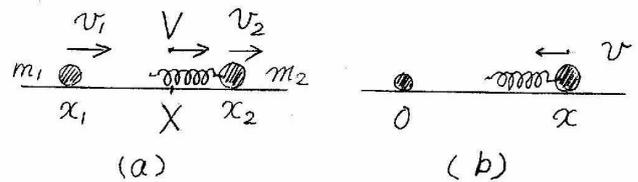


図 (a) のように質点それぞれの位置座標を x_1, x_2 ，重心の座標を X と記し，重心の速度を V とする． v_1, v_2, V は右向きに運動するときに正である． $v_1 > v_2$ であり，静止した座標系では図 (a) のように質点 1 が左から質点 2 に追いつき，衝突する．相対座標 $x = x_2 - x_1$ は，図 (b) のように質点 1 が止まって見える座標系で見た質点 2 の位置座標である．相対速度 $v = v_2 - v_1$ はいまの場合 $v < 0$ である．

2つの質点の体系には，床が滑らかであることから，運動の方向に外力が作用しない．したがって体系の運動量 P と力学的エネルギー E は保存する． E は運動エネルギーと相互作用のエネルギーからなる．以下でバネの自然長を ℓ_0 とし，体系の質量を M ，換算質量を m と記すと

$$M = m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

である．

衝突前と，衝突してバネが縮んでいるとき，それぞれ力学的エネルギーの表式は時間とともに変化する V, v および x を用いて次のように書ける：

$$\begin{aligned} \ell_0 < x \quad \text{のとき} \quad E &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2, \\ 0 < x < \ell_0 \quad \text{のとき} \quad E &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2. \end{aligned}$$

また，体系の運動量は $P = M V$ と表される．運動量は保存するので重心の速度 V は一定である．

衝突前の E の値と，衝突してバネが最も縮んだときの値を等しいとおいて，後者の位置座標 x を求める．前者で $v = v_2 - v_1$ を，後者では $v = 0$ を代入する（バネが最も縮むときには相対座標が最小になり，相対速度は 0 である）．両者において V は，重心の速度が常に一定であることから共通である．このようにして，また m を m_1, m_2 で表して，次の方程式を得る：

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2$$

バネの縮みの最大値はこの式から求まる $|x - \ell_0|$ で与えられるから， $v_1 > v_2$ に注意して

$$(v_1 - v_2) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

である．

【解説】

2つの質点からなる体系における力学的エネルギー保存則を用いる問題である．この式は一般に重

心の速度と系の質量，そして相対座標と相対速度に換算質量で表される．力学的エネルギーは，一般に重心の位置による場合もあるが，この問題では重心の位置には依存しない．最も記憶しづらい量が換算質量であろう．丸暗記でなく覚えるには逆数の和の逆数と覚えるとよい．パターンで覚える人は，2つの質量の積と和の比とみればよいかもしれない．

もし換算質量を用いた運動エネルギーの式を使わずに，各質点の速度を用いた運動エネルギーの式でこの問題を解こうとするならば，(1) 衝突してバネが最も深く縮んだときに両質点の速度が等しくなること，(2) 系の運動量が保存すること，を用いてその速度を求める計算が余分に必要になる．

【問題のねらい】

物理学 A の学習では，保存則そのものを知っているだけではなく，状況に応じた記号や量を用いて説明し利用する力を身につけることが到達目標である．重心座標，相対座標，換算質量は簡単に覚えられて重要な量であろう．

6.4-2

【解答例】

万有引力で相互作用をする二つの天体の一方が，他方のまわりを楕円軌道を描いて運動するときの周期を T ，楕円の長半径を a ，それぞれの天体の質量を m_1, m_2 とすると，式 (6.45) の関係

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2}$$

が成り立つ．ここで， G は万有引力定数であり，数値は既に式 (3.40) で与えられ，式 (5.44) の下でも用いたように $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ である．この式を書き換えて

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

として，問題に与えられた $a = 19,640 \text{ km}$ と $T = 6.3872 \text{ day} = 5.5185 \times 10^5 \text{ s}$ を代入して計算すると冥王星とカロンの質量の和は $1.4715 \times 10^{22} \text{ kg}$ と得られる．

【解説】

結果の質量の和は地球の質量に比べるとはるかに軽く，p.54 の問題 3.5-2 に与えられた地球の質量 $5.9725 \times 10^{24} \text{ kg}$ を用いると，

$$(\text{冥王星とカロンの質量の和}) = 0.002464 \times (\text{地球の質量})$$

である．

問題文の中ではカロンが冥王星の周りを半径 $a = 19,640 \text{ km}$ の円運動をすると書いてあるが，実際にはカロンは冥王星とカロンの体系の重心の位置を中心とした円運動をしていて，その半径はカロンと冥王星の間の距離よりも少し小さいと考えられる．その場合冥王星は体系の重心を中心とする小さな半径の円運動をする．これらの円運動の半径がそれぞれ分かるとそれぞれの質量が分かる．

6.5-1

【解答例】

式 (6.67) を書き換えると式 (6.68) になることを示す．

重心を基準にした位置座標の定義 $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ と $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ より，

$$\mathbf{p}_i = m_i(\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{R}})$$

を得る．この関係を式 (6.67) の右辺に代入すると

$$L_0 = \sum_i \mathbf{q}_i \times \left[m_i(\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{R}}) \right] = \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i + \sum_i m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{R}} \quad (38)$$

この式の最右辺の第 1 項は式 (6.68) の右辺に等しいので，第 2 項が 0 になることを示せばよい．この項において $\dot{\mathbf{R}}$ は i に依らず共通だから和の外に出すことができ，

$$\sum_i m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{R}} = \left(\sum_i m_i \mathbf{q}_i \right) \times \dot{\mathbf{R}}$$

となる。次に、右辺のカッコの中を、 \mathbf{q}_i の定義を代入して書き換えて、

$$\sum_i m_i \mathbf{q}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{R}$$

を得る。この式の最右辺第2項は、重心位置 \mathbf{R} の定義より、 $\sum_i m_i \mathbf{r}_i$ に等しいことがわかり、第2項は第1項と打ち消して、

$$\sum_i m_i \mathbf{q}_i = 0$$

になることがわかる。こうして、式(38)の最右辺第2項が0になることが示され、式(6.67)の右辺と式(6.68)の右辺が等しいことが証明された。

【別解】

重心を基準にした位置座標の定義 $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ と運動量の定義 $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ を式(6.67)の右辺に代入して変形すると

$$\text{式(6.67)の右辺} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{R} \times (M \dot{\mathbf{R}})$$

が得られる。ただし、この途中で $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{R}$ を用いて $\sum_i \mathbf{R} \times m_i d\mathbf{r}_i/dt = \mathbf{R} \times d(\sum_i m_i \mathbf{r}_i)/dt = \mathbf{R} \times M d\mathbf{R}/dt$ の変形をした。

同じように、 \mathbf{q}_i の定義を式(6.68)の右辺に代入して変形すると

$$\begin{aligned} \text{式(6.68)の右辺} &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}}) \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \dot{\mathbf{R}} \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{R} \times \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times (M \dot{\mathbf{R}}) \end{aligned}$$

ここで $\sum_i m_i = M$ を用いた。この式の最後の行で第2項と第3項はともに $-\mathbf{R} \times (M \dot{\mathbf{R}})$ に等しく、さらにそのうち一つは第4項と打ち消す。その結果は、すでに上で求めた式(6.67)の右辺を計算したものと一致する。したがって、式(6.67)と式(6.68)が同じ内容であることが示された。

【解説】

質点系の重心を基準にした角運動量 \mathbf{L}_0 の2通りの定義式、

$$\text{式(6.67)} \quad \mathbf{L}_0 = \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i$$

$$\text{式(6.68)} \quad \mathbf{L}_0 = \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i$$

が同等であることを示す問題である。前者の定義では座標軸を基準にした質点の運動量 \mathbf{p}_i を用いているのに対して、後者では重心を基準にした質点の速度 $\dot{\mathbf{q}}_i$ を用いている。状況に応じて、計算に都合のいい方の定義を使うとよい。

6.5-2

【解答例】

まず、式(6.69)を導く。原点に関する角運動量とトルクの定義から、重心に関する角運動量とトルクの表式を導けばよい。質点系の i 番目の質点の位置を \mathbf{r}_i 、質量を m_i 、質点の運動量を \mathbf{p}_i とし、重心の位置を \mathbf{R} 、系の質量を M 、系の運動量を \mathbf{P} とする。系の角運動量 \mathbf{L} の定義と、重心を基準にした質点の位置 \mathbf{q}_i の定義は、それぞれ

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{q}_i$$

である。後者を \mathbf{L} の定義式の右辺に代入すると、次が得られる：

$$\text{右辺} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{q}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i.$$

第1項は \mathbf{P} の定義式 $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ から $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$, 第2項は \mathbf{L}_0 の定義式 (6.67) により \mathbf{L}_0 , よって

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_0.$$

となる. これが式 (6.69) の最初の式である.

原点に関する系に作用するトルクの定義式

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

の右辺に上記の \mathbf{r}_i を代入して整理すると,

$$\text{右辺} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{q}_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{F}_i$$

である. この式を \mathbf{F} の定義 $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ と, \mathbf{N}_0 の定義式 (6.67) を用いて変形すると, 関係式

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{N}_0$$

が得られる. これが式 (6.69) の第2の式である.

次に, 式 (6.70) を導く. 原点に関する角運動量の運動方程式が式 (6.64) に与えられており,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

である. 左辺に上で求めた \mathbf{L} を, 右辺に \mathbf{N} を代入すると,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times \mathbf{P}) + \frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{N}_0$$

である. 左辺の第1項は

$$\text{第1項} = \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{P} + \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} = 0 + \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

となる. ここで, \mathbf{P} の定義 $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ と, 同じベクトルの外積が0になることを用いた. これにより左辺の第1項は右辺の第1項と同じであり, 打ち消すことが分かった. よって次が得られた:

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{N}_0.$$

これが重心を基準にした角運動量の運動方程式 (6.70) である.

【解説】

この解答例における式 (6.69) 第1式の導出では \mathbf{L}_0 の定義式 (6.67) を用いた. 代わりに式 (6.68) による解答例概略を示す. まず定義から

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{p}_i = m_i(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{q}}_i)$$

である. 後の2式を第1式の右辺に用いると, 次が得られる:

$$\text{右辺} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{q}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}} + \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i.$$

第1項では $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ である. また, 問題 6.5-1 の解答例で示したように, \mathbf{q}_i の定義より $\sum_i m_i \mathbf{q}_i = 0$ であるから, 第2項 $= (\sum_i m_i \mathbf{q}_i) \times \dot{\mathbf{R}} = 0$ である. さらに, 第3項は式 (6.68) より \mathbf{L}_0 である. したがって, $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ の右辺は, 式 (6.69) の第1式に等しい.

6.5-3

【解答例】

本文中に「直接にも導ける」と書かれているから, \mathbf{q}_i の定義を使って計算するだけで示せるはずである. まず,

$$\text{式 (6.72) の右辺} = \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \mathbf{q}_i \right) \times \mathbf{g}$$

ここで \mathbf{g} が定ベクトルなので (ベクトル積の分配則を用いて) 和の外にくくり出した. 問題 6.5-1 の解答例でも示したように, \mathbf{q}_i の定義 $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ と重心座標の定義 $\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / \sum_i m_i$ を使うと, 上の式のカッコの中は次のように書き換えられる.

$$\sum_i m_i \mathbf{q}_i = \sum_i^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) m_i = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i - \sum_i^N m_i \mathbf{R} = 0$$

である。よって、式 (6.72) の右辺が 0 になることが示された。

【解説】

「質点の質量に比例して場所には依存しない力は、重心を基準にしたトルクを発生しない」ことの証明である。ほかの点を基準にするとトルクは、0 ではない。だから、証明には「重心を基準にした座標」でトルクを求めることが重要になる。

証明から、「各質点に作用する重力が各々の質点の質量に比例すること、その質量を用いて重心が定義されている」ことが本質的であることが読み取れるであろう。

6.5-4

【解答例】

質点 1 に撃力を加えた後 ($t > 0$) は、この系には外力が作用しないので、系の運動量と角運動量が保存することを利用して解く。

まず、運動量保存則を使って重心の速度を求める。質点 1 と質点 2 のそれぞれの速度の y 成分を v_1, v_2 とすると、(各質点の質量は m なので) この系の運動量の y 成分 P は、 $P = mv_1 + mv_2$ と表される。いま、 $t = 0$ の直後では、 $v_1 = v_0, v_2 = 0$ なので、

$$P = mv_0 \quad (39)$$

また、重心の速度の y 成分を V とすると、(系の質量は $m + m = 2m$ なので) P は次のように表すこともできる。

$$P = 2mV \quad (40)$$

式 (39) と式 (40) より、次の結果を得る。

$$V = \frac{1}{2}v_0.$$

次に、角運動量保存則を使って回転角速度 ω を求める。系には外力が作用しないので、重心に関するトルクは 0 である。よって、重心に関する角運動量 \mathbf{L}_0 は保存する。 $t = 0$ の直後の \mathbf{L}_0 を v_0 を用いて表し、その後の任意の時刻における \mathbf{L}_0 を ω を用いて表し、両者が等しいことから ω を求めることができる。

$t = 0$ の直後の \mathbf{L}_0 は式 (6.67) の定義

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{v}_i$$

を使うと計算しやすい。ここで、 \mathbf{q}_i は重心 G から見た質点 i の位置ベクトル、 \mathbf{v}_i は座標軸から見た質点 i の質量である。図 11 に示すように、 $t = 0$ の直後では、 $\mathbf{v}_2 = 0$ である。また、 \mathbf{v}_1 の大きさは v_0 で、大きさ l のベクトル \mathbf{q}_1 に垂直なので、ベクトル積 $\mathbf{q}_1 \times \mathbf{v}_1$ は大きさが lv_0 で z 軸の方向を向く。右ネジの規則を使うと、このベクトル積は z 軸の正の向きを向くことがわかるので、

$$\mathbf{L}_0 = m\mathbf{q}_1 \times \mathbf{v}_1 = mlv_0\mathbf{e}_z \quad (41)$$

を得る。ここで、 \mathbf{e}_z は z 軸の正方向を向く単位ベクトルである。

$t > 0$ における \mathbf{L}_0 は式 (6.68) の定義

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i$$

を使うのが便利だ。図 11 に示すように、重心から見ると、質点 1 も質点 2 も半径 l で角速度 ω の円運動をする。したがって、各質点の速度 $\dot{\mathbf{q}}_1$ と $\dot{\mathbf{q}}_2$ はそれぞれ \mathbf{q}_1 と \mathbf{q}_2 に垂直であり、それらの大きさは $|\dot{\mathbf{q}}_1| = |\dot{\mathbf{q}}_2| = l\omega$ である。したがって、ベクトル積の向きまで考慮すると、 $\mathbf{q}_1 \times \dot{\mathbf{q}}_1$ と $\mathbf{q}_2 \times \dot{\mathbf{q}}_2$ はどちらも、大きさが $|\mathbf{q}_i| |\dot{\mathbf{q}}_i| = l^2\omega$ で z 軸の正方向を向くことがわかる。したがって、上の \mathbf{L}_0 の

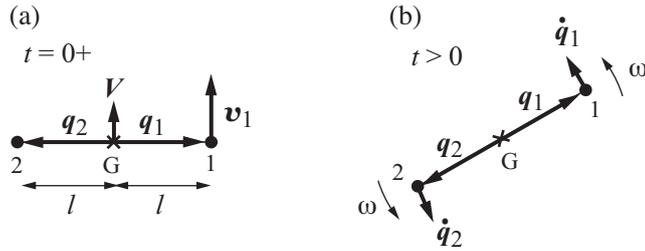


図 11: (a) 質点 1 に撃力を加えた直後と (b) その後の 2 質点系の運動. (a) では座標系から見た質点と重心の動きを表し, (b) では重心から見た質点の動きを表す. $|v_1| = v_0$, $|\dot{q}_1| = |\dot{q}_2| = l\omega$ である.

式は次のようになる.

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i=1}^2 m_i l^2 \omega \mathbf{e}_z = 2ml^2 \omega \mathbf{e}_z \quad (42)$$

式 (41) と式 (42) より

$$mlv_0 \mathbf{e}_z = 2ml^2 \omega \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{2l}$$

を得る.

【解説】

角運動量の計算には, 質点の位置ベクトルと速度ベクトルを座標成分で表して計算することもできるが, この問題では, 角運動量の計算に必要な外積に含まれる 2 つのベクトルが直交することに注目して, 教科書の図 5.9 に示す幾何学的な (座標軸の選び方に依存しない) ベクトル積の定義を使って計算をした. この方が, 成分表示を使う場合よりも計算の負担が小さい.

重心に関する角運動量は, 第 7 章で学ぶ慣性モーメントを使って計算することもできる. 長さ $2l$ の軽い棒の両端のそれぞれに質量 m の質点を固定してできる剛体 (いま考えている系) を考えると, その重心を通り棒に垂直な軸 (z 軸に平行であるとする) のまわりの慣性モーメント I_0 は $I_0 = 2ml^2$ となる. その軸のまわりを角速度 ω でこの物体が回転するとき, この軸に関する角運動量は $\mathbf{L}_0 = I_0 \omega \mathbf{e}_z = 2ml^2 \omega \mathbf{e}_z$ と計算できる.

【問題のねらい】

第 6.5 節では質点系の角運動量について学んだ. 重心の運動と重心のまわりのそれぞれの質点の運動を分けて扱う方法を学んだ. 本問題のように重心のまわりの回転運動を取り上げて考えると, 重心を基準にした角運動量が便利であることが実感できよう.

第 7 章 剛体の運動

7.1-1

【解答例】

この問題は例題 7.1-1 の類題であるが, 例題の解では計算の過程が詳しく説明されていない. ここでは, 問題の解答例として 3 通りの計算法を紹介する. これらの方法に共通することをまず説明する.

この円錐形の物体の底面の半径を R , 高さを H , 密度を ρ とする. 底面積は $S = \pi R^2$ だから, 円錐体の体積は $V = SH/3 = \pi R^2 H/3$ である. したがって, この物体の質量 M は次式で与えられる.

$$M = \rho V = \frac{1}{3} \pi \rho R^2 H. \quad (43)$$

また, 教科書の図 7.3(b) のように, 円錐の頂点を原点として, 円錐の軸を z 軸とする座標軸を設定する. 円錐は軸対称なので, この物体の重心はその軸上にある. 重心の座標を $(0, 0, c)$ として c を求める.

方法 1 : 多重積分を使わない方法

物体を微小領域に分けた場合の重心の定義 (7.2) によると, c は

$$c = \frac{1}{M} \sum_i z_i m_i \quad (44)$$

によって計算できる. ただし, z_i は i 番目の微小領域の z 座標, m_i はこの微小領域の質量である.

式 (44) の和を計算するために, 円錐の底面に平行な平面で物体を切り分けて, 厚さ dz の薄い円板に分割する. 図 12 の影を付けた部分がこのような円板の一つである. j 番目の円板の z 座標を z_j とし, この円板に含まれる多数の微小領域の番号 i の集合を I_j とする. そして, 式 (44) の i についての和を, 薄い円板に含まれる領域ごとに実行する. その操作は次のように表すことができる.

$$\sum_i z_i m_i = \sum_j \left(\sum_{i \in I_j} z_i m_i \right).$$

ここで, カッコの中では j 番目の円板中の和を表し, カッコの外の和の記号は, 前者の和をすべての円板について行うことを意味する. $i \in I_j$ ならば $z_i = z_j$ である (円柱 j に含まれる微小領域の z 座標はすべて z_j に等しい) から, 上式の括弧内の和は

$$\sum_{i \in I_j} z_i m_i = z_j \sum_{i \in I_j} m_i$$

と書き換えることができる (共通因子 z_j をくくり出した). この式の右辺の和は円板 j に含まれる領域の質量の和だから, 円板の質量に等しい. この円板の半径は $R_j = Rz_j/H$, 厚さは dz なので, その質量は

$$\sum_{i \in I_j} m_i = \rho \pi R_j^2 dz = \pi \rho \left(\frac{Rz_j}{H} \right)^2 dz$$

である. よって, 式 (44) は次のように書き換えられる.

$$c = \frac{1}{M} \sum_j z_j \cdot \pi \rho \left(\frac{Rz_j}{H} \right)^2 dz \quad (45)$$

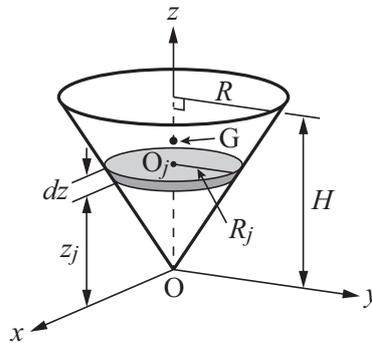


図 12: 円錐系の物体の重心位置を求めるために, 物体を厚さ dz の薄い円板に細分する.

$dz \rightarrow 0$ の極限で, 式 (45) の和は積分になるので,

$$c = \frac{1}{M} \frac{\pi \rho R^2}{H^2} \int_0^H z^3 \rho dz = \frac{1}{M} \frac{\pi \rho R^2 H^2}{4}. \quad (46)$$

この M に式 (43) を代入して, $c = 3H/4$ を得る. よって, 頂点から底面に向かって $3H/4$ にある円錐の軸上の点が重心である.

この計算法に慣れると, 物体を薄い円板に切り分けた段階で, z 座標の値が z_j である円板の半径は Rz_j/H , 厚さは dz であるということから, 直ちに式 (44) を式 (45) のように表すことができるようになる.

方法 2 : 多重積分を使う方法

もしも, 重心を与える積分形の公式 (7.4) を使って計算するならば, 以下のようになる.

$$c = \frac{1}{M} \rho \int_{\text{円錐}} z dx dy dz = \rho \int_0^H z dz \int_{-zR/H}^{zR/H} dx \int_{-\sqrt{(zR/H)^2 - x^2}}^{\sqrt{(zR/H)^2 - x^2}} dy$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_0^H z dz \int_{-zR/H}^{zR/H} 2\sqrt{\left(\frac{z}{H}R\right)^2 - x^2} dx$$

ここで、 x に関する積分を実行するために、 $a = zR/H$ 、 $x = a \sin \theta$ と置いて置換積分を行うと

$$\int_{-zR/H}^{zR/H} 2\sqrt{\left(\frac{z}{H}R\right)^2 - x^2} dx = 2 \int_0^a 2\sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \theta d\theta = \pi a^2.$$

したがって、

$$c = \frac{\rho}{M} \int_0^H z \pi \left(\frac{z}{H}R\right)^2 dz = \frac{\rho}{M} \frac{\pi R^2}{4} H^2 = \frac{3}{4} H$$

となる。ここで、式(43)で与えられる M の表式を用いた。

方法3：円柱座標を使う多重積分の方法

円柱座標(円筒座標)を知っているならば、多重積分の計算が少し楽になる。円柱座標 (r, φ, z) と直交座標 (x, y, z) において、 z は共通で、 r, φ と x, y との関係は平面極座標の場合と同様で、

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

である。そして、教科書の式(7.4)は次のようになる。

$$c = \frac{1}{M} \rho \int_{\text{円錐}} z dx dy dz = \frac{1}{M} \rho \int_{\text{円錐}} z r dr d\varphi dz = \frac{\rho}{M} \int_0^H z dz \int_0^{Rz/H} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

ここで、積分変数を (x, y, z) から (r, φ, z) に変換したときに、変換のヤコビアン r を忘れないように注意しよう。最初に φ での積分を、次に r での積分を、最後に z の積分を実行すると、

$$c = \frac{\rho}{M} \int_0^H z dz \int_0^{Rz/H} 2\pi r dr = \frac{\rho}{M} \int_0^H \pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^2 z dz = \frac{\rho}{M} \frac{\pi R^2}{4} H^2 = \frac{3}{4} H$$

【解説】

ここで紹介した3つの計算法では、最終的には z での積分の表式(46)にたどり着く。最初の方法では、薄い円板の体積(質量)を計算するときに、二番目や三番目の2次元積分(x, y での積分と φ, r での積分)に相当することを行っている。7.2節で学ぶ慣性モーメントを計算するときにも、ここで紹介したような計算法を駆使する。自分の好みに合った計算法をマスターしておくといよい。すべての計算法を身につけて、状況に応じて使い分けられることができればなおよい。

重心を通り円錐の底面に平行な面でこの物体を切断したとき、上下の部分の質量が等しくなるわけではないことに注意しよう。両者の質量が等しくなるためには、円錐の頂点からの距離が $H/2^{1/3}$ の平面で切断する必要がある。重心はこの切断面よりも頂点寄りにある ($1/2^{1/3} \approx 0.7937 > 3/4$ なので)。

7.1-2

【解答例】

(1) 円板の重心は円の中心である点C。

(2) 円板に作用する力：

1) 軸が固定されているから、軸受けからの抗力がCにおいて作用する。大きさは未定、向きは鉛直上向き。

2) 各点に作用する重力。まとめて重心Cに作用しているとしてよい。大きさは Mg 、向きは鉛直下向きである。

3) ひもの張力。円板との接点に作用する。向きは鉛直下向き、大きさは未定である。これを T とおく。(おもりには大きさ mg の重力が鉛直下向きに作用し、大きさ T の張力が鉛直上向きに作用し、最初に静止していたおもりが下方に落下するので、 $mg > T$ という関係が成り立つ。 T の値は、おもりと滑車に対する運動方程式を解くことによって得られる。滑車の回転を記述する運動方程式は7.3

節で学ぶ。(例題 7.3-1 参照.)

(3) 重力と抗力の作用線はいずれも C および O を通る。よって C, O のいずれに関してもこれらの力のトルクは 0 である。ひもの張力 C, O のいずれに関しても「腕の長さ」が R で力は基準点に関して時計回りに作用するので、そのトルクは $-RT$ である。ベクトルとしてのトルクを答えるならば、大きさが RT , 向きは紙面に垂直で手前から奥に向かう。

7.1-3

【解答例】

(1) 円板に作用する力:

1) 各点に作用する重力。まとめて重心 C に作用するとしてよい。大きさは Mg , 向きは鉛直下向きである。

2) ひもの張力。円板との接点に作用する。向きは鉛直上向き, 大きさは未定である。これを T とおく。(張力の大きさ T は, 回転しながら落下する円板の運動方程式を解いて得られる。このような運動を記述する運動方程式は 7.4 節で学ぶ.)

(2) 重力の作用線は C と O を通る。よって C, O のいずれに関してもトルクは 0 である。ひもの張力 C, O のいずれに関しても「腕の長さ」が R で力は基準点に関して時計回りに作用するので、そのトルクは $-RT$ である。ベクトルとしてのトルクを答えるならば、大きさが RT , 向きは紙面に垂直で手前から奥に向かう。

7.2-1

【解答例】

(1) 円板 C の質量は無視できるから, 体系の慣性モーメント I は円板 D と円板 E の C を通る回転軸に関する慣性モーメント I_D, I_E の和である。それぞれの回転軸は回転台の C を通る回転軸と同じ方向に向いているので平行軸の定理が使える。円板 D の重心まわりの慣性モーメントは I_0 であり, D の質量が M , C から D の重心までの距離が R であることから, 定理により

$$I_D = I_0 + MR^2$$

である。 I_E も同じ表式で表される。よって, 求める慣性モーメントは次の式で表される。

$$I = 2I_0 + 2MR^2.$$

したがって, 回転台が角速度 ω で回転するとき, この体系の角運動量は

$$L = I\omega = 2(I_0 + MR^2)\omega$$

である。

(2) 回転台が回転しても円板 D と E は台に対して逆向きに回転して, 静止した観測者から見ると回転をせず, それぞれの重心が C を中心とする円運動をする。回転をしない剛体の持つ角運動量はその重心の運動による角運動量だけである。これは本文の式 (7.26) で $L_0 = 0$ の場合である。半径 R で角速度 ω の円運動をする質量 M の質点がつ円の中心周りの角運動量は, $MR^2\omega$ であり, 体系には 2 個の質点があるから体系の角運動量 L は

$$L = 2MR^2\omega$$

である。

7.3-1

【解答例】

平行軸の定理 (p.126 式 (7.37)) から, この問題の状況 (図 7.15) の場合には $I_z^0 = MR^2/2$ を用いて

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2$$

である。p.132の図7.12の物理振り子のGは今の円板の中心にあたり、その長さhは今の l にあたる。同じように、振れ角を φ とすると、 φ のみたす運動方程式は、トルクが $-Mgl \sin \varphi$ なので、

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mgl \sin \varphi \Rightarrow I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mgl \varphi \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{Mgl}{I_z} \varphi$$

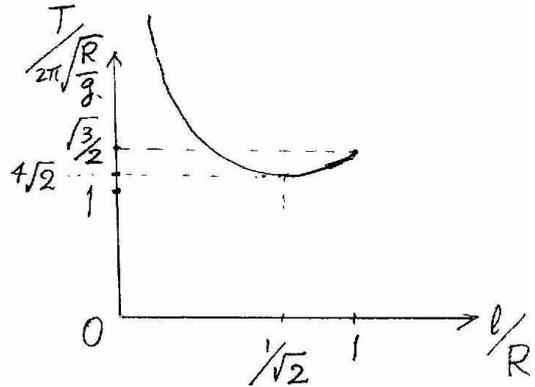
である。振れ角が小さいから $\sin \varphi$ を φ で置き換えた。これは単振り子の運動方程式であるから、第2.5節の式(2.45)を解いたときと同様に、周期として

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mgl}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + 2\ell^2}{2gl}}$$

を得る。ここで上の I_z の表式を代入した。これを R に対する l の比の関数として考察するため次の表式にする：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{R}{2\ell} + \frac{\ell}{R} \right)}.$$

これを右のグラフに示す。横軸は R を単位とした l 、縦軸は $2\pi\sqrt{R/g}$ を単位とした T である。周期 T は回転軸と重心の距離が0の極限で無限に長くなり、 l とともに減少して $l = R/\sqrt{2}$ で最小値 $2\pi\sqrt{\sqrt{2}R/g}$ をとり、増加に転じて $l = R$ のとき、 $T = 2\pi\sqrt{3R/2g}$ となる。



【解説】

結果は、円板の中心に円板すべての質量が集中してとした単振り子の周期 $2\pi\sqrt{\ell/g}$ を基準にすると、常にそれよりも長い周期をもつことを示している。円板の中心を回転軸にすると、円板は振り子にならず、つり合っただけで静止してしまう。よって $l \rightarrow 0$ で $T \rightarrow \infty$ である。

解答例の中で $l = R$ の場合の T を答えているが、これは円板の縁に細工をして軸を取り付けることができることを想定している。

7.3-2

【解答例】

例題 7.3-3 の場合と同様に、人が半径 OQ に沿って歩くときには、円板は回転しない。また、人と円板で構成される系には、点 O に関するトルクは作用しないので、この点に関する角運動量は保存する。そして、人が点 Q から円周に沿って歩き始めるときには、人も円板も静止しているので、この系の角運動量は 0 である。したがって、人が Q から円周に沿って歩き始めて、一周して Q に戻るまでの円板の動きを調べればよい。

図 7.16(b) に示すように、半径 OQ から測った（円板に対する）人の回転角 φ （反時計回りを正とする）と床に対する円板の回転角 θ （時計回りを正とする）を定義すると、人の角運動量は $mR^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta})$ 、円板の角運動量は（慣性モーメントが $MR^2/2$ だから） $-MR^2\dot{\theta}$ となるから、角運動量保存則より次の関係を得る。

$$mR^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) - \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} = 0.$$

ここで、 $\dot{\theta}/\dot{\varphi} = d\theta/d\varphi$ という関係に留意して、この式を整理すると、

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{2m}{M + 2m}$$

となる。人が一周すると φ は 0 から 2π まで増えるので、この式を $\varphi = 0$ から $\varphi = 2\pi$ まで積分すると、その間の円板の回転角 $\Delta\theta$ が以下のように得られる。

$$\Delta\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2m}{M + 2m} d\varphi = \frac{4\pi m}{M + 2m}.$$

人の質量が円板の質量よりもずっと小さい場合には $\Delta\theta \approx 4\pi m/M$ となる。逆に、人の質量がずっと大きい場合には $\Delta\theta \approx 2\pi$ となり、床に対して人はほとんど動かず、円板が時計回りに一回転する。

7.3-3

【解答例】

図 13(a) のように質量 m の質点 (人) が半径 R の円 C_1 を反時計回りに歩き始める。この円は、半径 $2R$ の円板 C_2 の上に描かれていて、円板の中心を通り円板の円周に接している。この円は円板が移動するとそれにつれて移動することに注意する。円板は中心を軸として回転できるようになっているので、人がコースを歩くために円板を蹴ることにより発生するトルクにより回転をはじめ、円板の質量は M である。

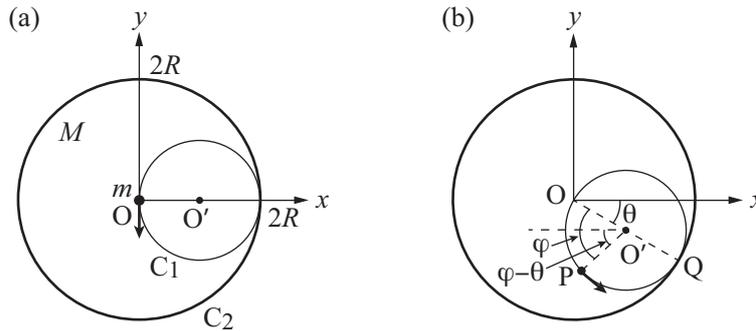


図 13: (a) 質量 M 円板 (円周 C_2) の中心 O のから質量 m の人が、円板上の O' を中心とする円の周 C_1 に沿って反時計回りに歩き始める。(b) C_1 上を点 P まで歩いた時点の状況。

軸となる点を原点にとり、はじめに歩き出す方向が y 軸負の方向になるように y 軸をとり、歩くコースの円の中心を O' 、円板の周との接点を Q 、質点 (人) の位置を P と記す (図 13(b) に示す) と、時刻 $t = 0$ では P, O', Q は x 軸上にある。

出発直後は人が円板を蹴る力の作用線が O を通るから、原点に関するトルクは 0 であるが、次第にコースが進行左に曲がるため、蹴る方向 (コース円の接線方向) が傾き、蹴る力の向きは原点に向かってやや左寄りになり、そのため蹴る力の原点に関するトルクは負である。これにより円板は負の方向に回転する。

図 13(b) に記すように

φ : 人が円 C_1 を回った角度
 $\Rightarrow \overrightarrow{O'O}$ を基準にした $\overrightarrow{O'P}$ の偏角

θ : 円板の回転した角度
 $\Rightarrow \overrightarrow{OQ}$ の x 軸基準の偏角の符号を変えたもの

とする。本問の設定では人がコースの C_1 を一周する間を通じて $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\theta \geq 0$ であると想定されるが、実際に計算によって示される。

質量 m の質点と質量 M の円板は互いに力を作用しあうが、外力は円板の中心を原点に固定するための拘束力以外には作用しない。拘束力は原点で作用するから、原点に関するトルクは 0 であり、したがって人と円板からなる系の角運動量は保存するが、初めに静止していたから、系の角運動量は常に 0 である。このことを使うと、方程式が得られ、それにより運動の特徴が分かる。

全角運動量は人の位置 P の運動による角運動量と、円板の回転による角運動量の和である。まず前者を求める。そのために P の位置座標を表す式を求める。図 (b) において、 $\overline{OO'} = R$ であるので、

$$\overrightarrow{OO'} = (R \cos \theta, -R \sin \theta),$$

図 (b) において、 O' を通る x 軸に平行な直線が $\overrightarrow{O'P}$ となす角は $\varphi - \theta$ であるから、

$$\overrightarrow{O'P} = (-R \cos (\varphi - \theta), -R \sin (\varphi - \theta))$$

である。よって人の位置を表すベクトル $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ と速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ は次のように求まる：

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= R(\cos\theta - \cos(\varphi - \theta), -\sin\theta - \sin(\varphi - \theta)), \\ \mathbf{v} &= R(-\dot{\theta}\sin\theta + (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\sin(\varphi - \theta), -\dot{\theta}\cos\theta - (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\cos(\varphi - \theta)).\end{aligned}$$

求める角運動量の z 成分は $L_P = m(xv_y - yv_x)$ で定義されているから、上の表式を代入して計算の結果、次が得られる：

$$L_P = mR^2(\dot{\varphi} - 2\dot{\theta})(1 - \cos\varphi).$$

また、円板の角運動量の z 成分を L_C と記すと、負の回転であることと、 $\dot{\theta} > 0$ としていることから、次が得られる：

$$L_C = -I\dot{\theta}, \quad \text{ただし} \quad I = 2MR^2.$$

系の角運動量は常に 0 であることから、

$$L_P + L_C = 0, \quad \Rightarrow \quad mR^2(\dot{\varphi} - 2\dot{\theta})(1 - \cos\varphi) - 2MR^2\dot{\theta} = 0$$

が成り立つ。これを $\dot{\theta}$ について解くと次の方程式が得られる：

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{m\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi)}{M + m(1 - \cos\varphi)}.$$

この方程式を時間 t で積分する。題意より φ は時刻 $t = 0$ の $\varphi = 0$ から増加し時刻 $t = t_0$ の $\varphi = 2\pi$ に達する。この間の θ の増分を $\Delta\theta$ と記すと、積分の計算は

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \frac{m(1 - \cos\varphi)}{M + m(1 - \cos\varphi)} \frac{d\varphi}{dt} dt \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{m(1 - \cos\varphi)}{M + m(1 - \cos\varphi)} d\varphi$$

積分公式 $\int_0^{2\pi} [1/(a - \cos\varphi)] d\varphi = 2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$ を用いて右辺の定積分は計算できる：

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{M}{M + m(1 - \cos\varphi)} \right) d\varphi = \pi - \frac{M}{2m} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(M/m + 1) - \cos\varphi} d\varphi \\ &= \pi - \frac{M}{m} \frac{\pi}{\sqrt{(M/m)^2 + 2M/m}} = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2M/M}} \right).\end{aligned}$$

よって円板の回転角 $\Delta\theta$ は次のように求まる：

$$\Delta\theta = \pi \left(1 - \sqrt{\frac{M}{M + 2m}} \right).$$

【解説】

積分公式に頼らずに上記の積分を実行するには、たとえば、 $z = \tan(\varphi/2)$ と置換するとよい ($d\varphi/dz = 2/(1 + z^2)$, $1 - \cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2) = 2z^2/(1 + z^2)$)。

7.4-1

【解答例】

例題 7.4-2 で斜面を転がり落ちる円柱の加速度を求めた。それにならって、転がり落ちる物体の加速度をその物体の慣性モーメント I を用いて表す式を求めておく。例題で円柱について用いた時と同じように、物体の質量を M 、円柱・円筒あるいは球体の半径を R によって表す。重心が傾き α の斜面に沿って降りる速さを図 7.22(a) のように V 、転がりの角速度を ω で表す。

物体に作用する力は、図 7.22(b) のように摩擦力と重力それに斜面から受ける垂直抗力である。摩擦力の大きさを F 、垂直抗力の大きさを F_n で表す。重力の斜面方向の成分は $Mg \sin\alpha$ であるから、斜面に沿っての速度についての運動方程式は

$$M\dot{V} = Mg \sin\alpha - F \tag{47}$$

である。斜面に垂直な力 F_n と $Mg \cos\alpha$ はつりあう。物体は滑らずに斜面を転がるから、

$$\omega = \frac{V}{R} \tag{48}$$

が成り立つ。回転軸に関するトルクは、図 7.22(b) に示すように作用線が軸を通らない摩擦力によるものだけであり、その大きさは FR であるので、回転の運動方程式は次である：

$$I\dot{\omega} = FR. \quad (49)$$

式 (48) を式 (49) に代入し、それを解いて得られる F を式 (47) に代入して整理すると、次のように斜面に沿っての運動の加速度が求まる：

$$\dot{V} = \frac{MgR^2}{I + MR^2} \sin \alpha. \quad (50)$$

これによると、 M 、 R が同じである物体について比較すると慣性モーメント I が小さいほうが加速度が大きく、決まった距離を進むに必要な時間は短いことが分かるので、所要時間の短い順序は慣性モーメントの小さい順序に一致する。

一様な密度を持つ円柱 A、中空円筒 B、球 C について同じ質量同じ半径を持つ場合に比較すると、式 (7.46)、(7.45)、(7.44) により、 $I_C < I_A < I_B$ である。よって求める順序は、 $t_C < t_A < t_B$ となる。

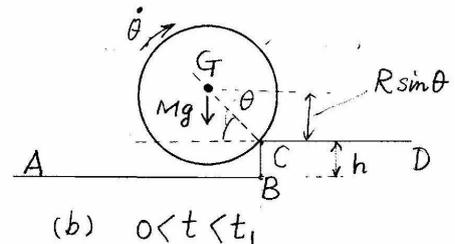
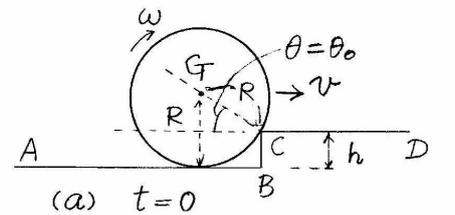
【解説】

斜面を転がり落ちる物体について、その加速度は転がらずに滑る場合と比較して必ず小さくなる。これは式を立てなくても分かることである。その際に、力に対して加速度は慣性質量の小さなもので大きいことに対応して、トルクに対して回転の加速度は慣性モーメントの小さなもので大きいことは式を立てなくても分かることである。したがって、時間の短さの順番を答えるためには、慣性モーメントの小さい順番を言えばよい。慣性モーメントは、質量の分布が回転軸から遠いほど大きいので、式 (7.46)、(7.45)、(7.44) を知らなくても、中空円筒が一番大きく、球が一番小さいことは直感的にわかる。解答例では、順番だけでなく、数量的な評価までできることを示した。

7.4-2

【解答例】

図 (a) には時刻 $t = 0$ の衝突時の円柱の断面を示し、円板状の断面の重心を G で記す。図中の ω と v は衝突直前の値を指す。円柱が転がってきて段差のカド C にぶつかる時、台からの力を受けて円柱は瞬間的に運動の向きを変える。この短時間の過程で、作用する力は台と円柱が互いに押し合う力である。この力の作用線は点 C を通るから、 C のまわりの力のモーメントは 0 であり、円柱の点 C に関する角運動量は保存される。このことを用いて図の角度 θ について、直後の角速度が分かる。



衝突直前までは転がる速さは一定値 v であり、転がりの角速度 ω とは

$$\omega = v/R$$

の関係にある。図の θ は点 C から重心 G への方向が水平方向となす角を表す変数であり、衝突の瞬間の値を $\theta = \theta_0$ と記すと、図より

$$\sin \theta_0 = \frac{R - h}{R} \quad (51)$$

である。なお、 θ の符号はこの図のような場合に正にとる。

円柱の軸に関する慣性モーメントを I_0 で表すと、式 (7.46) から $I_0 = MR^2/2$ である。今の回転軸を表す C に関する慣性モーメントを I で表すと、平行軸の定理から次のようにして I が求まる：

$$I = I_0 + MR^2, \Rightarrow I = \frac{3}{2}MR^2. \quad (52)$$

衝突の直前の角運動量を L_C^- と記す。これは重心のまわりの角運動量 L_0 と重心の運動による点 C のまわりの角運動量 L_G との和であり、

$$L_0 = I_0\omega, \quad L_G = Mv(R-h)$$

より, ω の表式を用いて,

$$L_C^- = \frac{1}{2}MR^2\frac{v}{R} + Mv(R-h) = \frac{1}{2}M(3R-2h)v \quad (53)$$

である. また, 衝突直後の $\dot{\theta}$ を $\dot{\theta}_0$ と記し, 衝突直後の円柱の点 C のまわりの角運動量を L_C^+ と記すと, 式 (52) の慣性モーメントを用いて

$$L_C^+ = I\dot{\theta}_0$$

である. 衝突に際して角運動量保存則を適用すると, これは式 (53) に等しい. よって次が得られる:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{3R-2h}{3R^2}v. \quad (54)$$

その後, 円柱は段差のカドの点 C で台と接触して滑らずに重心が持ち上がる運動をするが, これは剛体の固定軸のまわりの回転運動である. ただし固定軸は図 (b) に示された断面図に C と記された, 断面に垂直な直線である. 運動は, 可能であれば, 重心 G がカドの点 C の鉛直上方に達するまで続く. その時刻を $t = t_1$ と記す. その後は円柱は台の上を D に向かって転がる. 可能性は, 円柱の持つ運動エネルギーが円柱の重心を段差の高さ h だけ持ち上げるに十分であるかどうかにかかっている.

剛体の回転の運動エネルギーは $I\dot{\theta}^2/2$ であり, 剛体の位置エネルギーは重心の台 CD からの高さ $R\sin\theta$ で与えられるので, エネルギー保存則は

$$0 < t < t_1 \quad \text{において} \quad \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + RMg\sin\theta = E \quad (\text{一定})$$

である. 衝突直後 $t = 0$ では式 (51), (52), (54) により, $t = t_1$ では $\theta = \pi/2$ であるから, それぞれ

$$E = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}MR^2\frac{(3R-2h)^2}{9R^4}v^2 + Mg(R-h), \quad E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + MgR,$$

である. この2つを等しいとにおいて, 整理すると次を得る:

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{M}{12R^2}(3R-2h)^2v^2 - Mgh.$$

運動が可能であるためには左辺が正であるから右辺が正でなければならない. 条件式を v について解くと, $t \geq t_1$ で円柱が右方向に転がって行ける条件は次のように求まる:

$$v > \frac{2R\sqrt{3gh}}{3R-2h}.$$

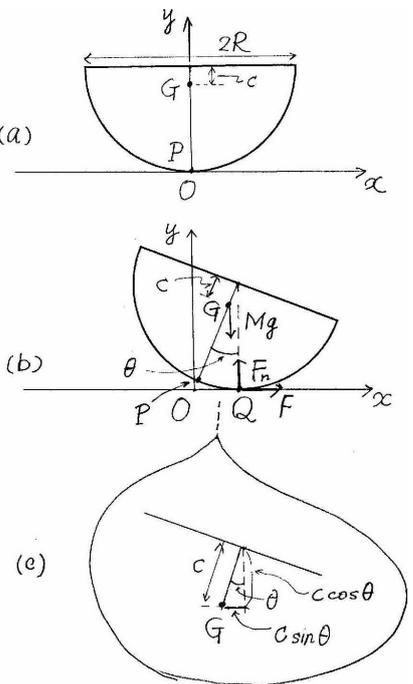
7.4-3

【解答例】

図 (a) につり合いの状態を示す. このとき半球が接している床上の点を原点とし, 図に示すように x, y 軸をとる. つり合っていると (a) きに原点にある半球上の点を P で表す. 半球の重心を G と記す.

初め少し傾けた後に手を離すと半球は床の上を転がるように回転し, 揺れる. ある瞬間の半球の位置と向きを図 (b) に示す. このとき半球面が床に接する点を Q で表す. P は半球と共に動き, Q は床面を移動する. P と G を結ぶ直線が鉛直方向となす角を θ とする. θ の符号は重心の x 座標の符号と同じになるようにとる.

半球に作用する力は重力, 床からの垂直抗力, 床との摩擦力である. 重力は重心の位置を作用点として大きさ Mg で下向きである. 垂直抗力は点 Q で作用し, 大きさを F_n とする. 摩擦力は, 半球が滑らずに転がるために必要である. 摩擦力の大きさを F とし, 符号は右向きを正とする.



重心の位置は例題 7.1-1 で求めたように、半球の中心から半球の対称軸に沿って

$$c = \frac{3}{8}R$$

離れたところである。よって

$$\overline{GP} = \frac{5}{8}R$$

である。半球の重心を通り xy 面に垂直な軸に関する慣性モーメントを I_0 と記す。式 (7.47) により次のように与えられる：

$$I_0 = \frac{83}{320}MR^2.$$

重心の位置座標 (X, Y) は図 (c) によって分かるように、 $X = \overline{OQ} - c\sin\theta = R\theta - c\sin\theta$ 、 $Y = R - c\cos\theta$ であるが、揺れの振幅が小さいから $\sin\theta \approx \theta$ 、 $\cos\theta \approx 1$ とすると、次で表される：

$$X = \frac{5}{8}R\theta, \quad Y = \frac{5}{8}R.$$

重心の運動方程式は、 x 方向には摩擦力、 y 方向には重力と垂直抗力が作用するから：

$$M\ddot{X} = F, \quad M\ddot{Y} = F_n - Mg \Rightarrow \frac{5}{8}MR\ddot{\theta} = F, \quad F_n = Mg. \quad (55)$$

重心のまわりの回転運動の方程式を導く。垂直抗力によるトルク N_{F_n} と摩擦力によるトルク N_F は微小振動の近似の下でそれぞれ次のように表せる：

$$N_{F_n} = \frac{3}{8}RF_n\theta, \quad N_F = \frac{5}{8}RF.$$

今の θ の定義では半球の回転は反時計回りに $-\theta$ であるので、回転角加速度は $-\ddot{\theta}$ であることに注意すると、半球の角運動量の運動方程式は次のようになる：

$$-I_0\ddot{\theta} = \frac{3}{8}RF_n\theta + \frac{5}{8}RF. \quad (56)$$

式 (55) と式 (56) から F_n と F を消去、上に記した I_0 の表式を用いて、

$$-\frac{83}{320}MR^2\ddot{\theta} = \frac{3}{8}RMg\theta + \left(\frac{5}{8}R\right)^2 M\ddot{\theta}, \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{15g}{26R}\theta.$$

が得られた。これは単振動の方程式であり、振動の周期 T はこの右辺を $-\omega^2\theta$ と置いて得られる ω から $T = 2\pi/\omega$ により求められる：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}.$$

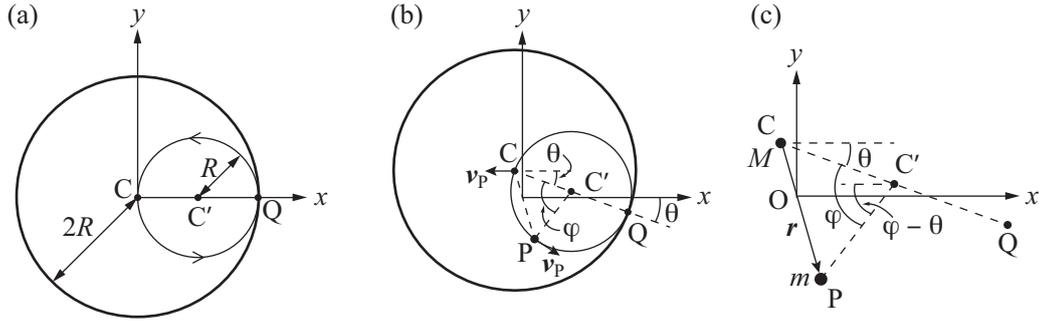
【補足】

教科書の略解 (p. 287) で用いた記号とこの【解答例】で用いた記号には違いがあることに注意。両者の文章を読めば、一方のどの記号が他方のどの記号に対応するかわかるはず。たとえば、略解の I は解答例の I_0 に対応する。ただし、略解で用いた回転角 φ と【解答例】で用いた回転角 θ の対応はわかりにくい。いくつか式を見比べると、これらの角度は $\varphi = -\theta$ という関係にあることがわかる。

7.4-4

【解答例】

図 (a), (b) に問題文の図 7.27 に対応して初期配置と人が円 C' 上を角度 φ だけ回った配置とを図示する。問題文に与えられた記号の他、 Q は台の円 C と歩くコース円 C' の接点、図 (b) に示すように v_P を人 P の歩く速度、 v_C を円板 C の移動速度とする。ここでそれぞれの円の中心も C, C' で表している。 φ と θ の符号は図 (b) の配置のとき $\varphi > 0$ 、 $\theta > 0$ とし、初期値は $\varphi_0 = 0$ 、 $\theta_0 = 0$ である。



円板と人からなる系に外力が作用しないから、初めに止まっていた重心は静止したままであり、初めに回っていなかった系の角運動量は0のままである。ここで系の重心は円板の重心 C と質点 P を結ぶ線分上にある。初期時刻に P, C は一致し、系の重心にある。

初めに P が動く方向は y 軸の負の向きであるから、初めの C の動きは y 軸の正の向きである。 P の動きは次第に進行左方向に曲がり図 (c) に示すように x 軸正の向きへの動きが含まれるようになり、したがって C の動きには x 軸負の向きへの動きが含まれるようになる。 P が進むときに円板を蹴る力は作用線が P から C に向かって左側を通るから、円板の回転は時計回りになる。

P の動きを C をもとにした相対位置ベクトルで記述することにし、これを \mathbf{r} で表す。 P の位置ベクトルを \mathbf{r}_P , C の位置ベクトルを \mathbf{r}_C とすると

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C = \mathbf{r}. \quad (57)$$

である。図 (c) に示すように系の重心は原点に静止しているから次の関係が成り立つ：

$$\frac{m\mathbf{r}_P + M\mathbf{r}_C}{m + M} = \mathbf{0}.$$

これらより、次が導ける：

$$\mathbf{r}_P = \frac{M}{M + m}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_C = -\frac{m}{M + m}\mathbf{r}. \quad (58)$$

ここで \mathbf{r} を既に定義した P の回転角 φ と円板の回転角 θ で表しておく：図 (c) に示すように $\overrightarrow{CC'} = R(\cos\theta, -\sin\theta)$, $\overrightarrow{C'P} = R(-\cos(\varphi - \theta), -\sin(\varphi - \theta))$ であることを用いて、

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'P} = R(\cos\theta - \cos(\varphi - \theta), -\sin\theta - \sin(\varphi - \theta)) \quad (59)$$

が得られる。

これより、系の角運動量を φ と θ とそれらの時間微分を用いて表し、角運動量保存則により得られる関係式から、 φ と θ との変化分の関係を求める。以下では角運動量は z 軸の向きのベクトルとして求められる。まず、円板の原点周りの角運動量のうち、重心の運動によるものは $\mathbf{L}_C = M\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C$ である。質点 P の原点周りの角運動量は、 $\mathbf{L}_P = m\mathbf{r}_P \times \mathbf{v}_P$ である。ここで $\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C$, $\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P$ である。式 (58) を代入して計算すると、

$$\mathbf{L}_C + \mathbf{L}_P = \frac{Mm}{M + m}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

が得られる。ここで、式 (59) を時間で微分して

$$\dot{\mathbf{r}} = R\left(-\dot{\theta}\sin\theta + (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\sin(\varphi - \theta), -\dot{\theta}\cos\theta - (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\cos(\varphi - \theta)\right)$$

である。次に、円板の原点周りの角運動量は円板の重心まわりの回転による角運動量 $-I\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ を \mathbf{L}_C に加えて得られる。ただし \mathbf{e}_z を z 方向の基本ベクトルとする。ここで、 I は円板の重心を通り円板に垂直な回転軸に関する慣性モーメントを表し、図 (b) から円板の回転は $\theta > 0$ の時に時計まわりであることを注意する。円板の半径 $2R$ と質量 M によって、 $I = 2MR^2$ である。(式 (7.42) による。)

このようにして、系の角運動量 \mathbf{L} の z 成分 L の表式は

$$L = -I\dot{\theta} + \frac{Mm}{M + m}R^2(\dot{\varphi} - 2\dot{\theta})(1 - \cos\varphi)$$

と求まった。これが初期値に等しいことから次の方程式が得られる：

$$L = 0 \Rightarrow -I\dot{\theta} + \frac{Mm}{M+m}R^2(\dot{\varphi} - 2\dot{\theta})(1 - \cos\varphi) = 0$$

これを $\dot{\theta}$ について解き、 $I = 2MR^2$ を代入して整理すると、

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{m\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi)}{M + m + m(1 - \cos\varphi)} \quad (60)$$

が得られる。

問題 7.3-3 で行ったように、式 (60) を時間 t で積分することにより、 φ が 0 から 2π まで変化したときの θ の変化分 $\Delta\theta$ を求めることができる。問題 7.3-3 の解答例中の対応する式と見比べると、問題 7.3-3 の式において M を $M+m$ でおきかえると、式 (60) と同じになることがわかる。したがって、問題 7.3-3 の結果において、 $M \rightarrow M+m$ の置き換えをすると、本問の答が得られる。すなわち、人が円 C' を反時計回りに一周するとき、円板 C は時計回りに

$$\Delta\theta = \pi \left(1 - \sqrt{\frac{M+m}{M+3m}} \right)$$

だけ回転することがわかる。

【解説】

円板の向きは、最後に元の向きからある角度だけ回って終わるが、円板の中心は、原点に戻る。これは重心の位置が動かないからである。

7.5-1

【解答例】

歳差運動についての本文の説明によると、コマの質量を M とし、コマの軸を支える点と重心の距離を l 、コマの慣性モーメントを I 、回転角速度を ω とするとき、コマが歳差運動をして先端が円運動をする角速度 $d\varphi/dt$ は式 (7.77) のように求められた。それを記すと

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgl}{I\omega}$$

である。この関係式を用いると、与えられた数値から未知の数値が求められる。歳差運動の周期が 3 秒であるから、 φ は 3 秒間で 2π 変わり、

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{3} \text{ s}^{-1},$$

また、

$$M = 62 \text{ g}, \quad l = 35 \text{ mm}, \quad I = 2.8 \times 10^4 \text{ g mm}^2, \quad g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$$

である。毎秒の回転数を n とすると $\omega = 2\pi n$ である。上の式を整理して数値を代入し、

$$n = \frac{Mgl}{2\pi I d\varphi/dt} = \frac{35 \text{ mm} \times 62 \text{ g} \times 9.8 \times 10^3 \text{ mm s}^{-2}}{2\pi \times 2.8 \times 10^4 \text{ g mm}^2 \times (2\pi/3) \text{ s}^{-1}} = 58 \text{ s}^{-1},$$

を得る。よって、歳差運動の周期が 3 秒であることからコマの回転数が毎秒 58 回転であることが分かった。

7.6-1

【解答例】

本文の 7.6 節の冒頭で述べられているつり合いの条件式 (7.79) を用いて図 7.32 の棒の場合に式 (7.80), (7.81) が得られている。式 (7.81) では点 O に関するトルクを用いた。ここでは点 A に関するトルクを使って同じ結果を導く。図に示されているすべての力について以下に整理する：

作用点	力の大きさ	点 A から作用線までの距離	トルクの正負
点 A	F_1, R_1	0	,
重心	Mg	$\frac{1}{2}l \sin\theta$	−,
点 B	F_2	$l \cos\theta$	−,
点 B	R_2	$l \sin\theta$	+

よって、トルクの和がゼロになる条件は次の式である：

$$\frac{1}{2}Mgl \sin \theta + F_2 \ell \cos \theta = R_2 \ell \sin \theta \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{1}{2}Mg + F_2 \cot \theta.$$

力の水平方向の成分のつり合いの条件式は式 (7.80) のように

$$F_2 = R_1$$

であるから、ここで導いた条件式は式 (7.81) と一致する。

【解説】

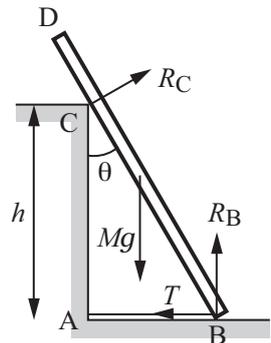
テキストに述べられているように、基準点を変えてもトルクのつり合い条件式が同等であることは力のつり合いに基づく。本問題ではそのことを実際の例で示したものである。

7.6-2

【解答例】

図に示すように、段差の隅を A とし、立てかけた棒の下端を B とする。AB 間をひもで結ぶ。段差の肩を C とし、棒の他の端を D とする。棒が段差の鉛直面 AC となす角を θ とする。ひもの張力を T とする。段差の高さを h 、棒の長さを ℓ とし、質量を M とする。棒は一様であるとするから中点が重心である。

どの場所も滑らかであることから、床・段差から受ける力は面に垂直に作用する。



よって、C における抗力は棒に垂直、B における抗力は AB 面に垂直である。

つり合っているから、棒に作用する力の和は 0 である。水平方向、鉛直方向それぞれの成分を記す：

$$R_C \cos \theta - T = 0, \quad R_C \sin \theta - Mg + R_B = 0. \quad (61)$$

また、点 B に関するトルクの和が 0 である：

$$-R_C \frac{h}{\cos \theta} + Mg \frac{\ell}{2} \sin \theta = 0. \quad (62)$$

式 (62) を R_C について解くと $R_C = (Mg\ell/2h) \sin \theta \cos \theta$ 、これを式 (61) の第 1 の式に代入して整理すると

$$T = \frac{Mg\ell}{2h} \sin \theta \cos^2 \theta. \quad (63)$$

が得られる。これが求めるひもの張力である。

なお、式 (61) から $R_B = Mg - T \sin \theta / \cos \theta$ 、よって式 (63) より

$$R_B = Mg \left(1 - \frac{\ell \sin^2 \theta \cos \theta}{2h} \right)$$

が得られる。これが棒に作用する床面からの垂直抗力である。

【解説】

与えられた段差、棒に対してひもの長さを変えると傾き角 θ が変わり、ひもの張力が変わる。ごく短いひもに対して張力が小さいことは想像できる。ひもを長くしたときに、どの長さ（どの角度）で張力が最大になるかを考えてみる。

式 (63) について θ を変えた時の最大値問題を解く。 $s = \sin \theta$ と置くと $s(1 - s^2)$ の最大値問題となるから、 $\sin \theta = 1/\sqrt{3}$ で最大値 $2/3\sqrt{3}$ をとることが分かる。このとき、AB の長さは $h/\sqrt{2}$ 、BC の長さは $\sqrt{3/2}h$ である。

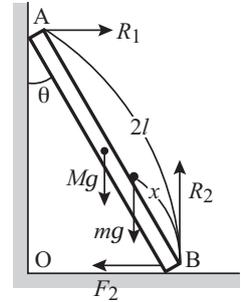
ただし、そのとき D が C に届いているために棒がそのときの \overline{BC} よりも長くないといけない。長さについて、 $\sqrt{3/2}h < \ell < 2h$ が条件になる。もしも $\ell < \sqrt{3/2}h$ であれば、張力はひもの長さとともに単調に増加し、D が C にちょうど乗るほどに棒が傾いても張力は増え続けて、途中で極大になることはない。

(棒があまり長いと小さな θ の時に重心がCより上になる可能性があり, すると棒が回転して横になってしまうから, $\theta = 0$ でも横に倒れることがないように $l < 2h$ を想定していると考える. また棒の先の点Dが常に段差の肩Cよりも上になくなくてはならないことから $l > h$ であるものと考える.)

7.6-3

【解答例】

はしごが滑らないための条件は, 重力によってはしごに作用する大きさ Mg の力, 人に作用する大きさ mg の力, 壁から受ける大きさ R_1 の垂直抗力, 床から受ける大きさ R_2 の垂直抗力と大きさ F_2 の摩擦力, の和が0であり, かつ, トルクの和が0になることである. 原点と位置A,Bを図のようにとり, 人のBからの距離を x で表す. はしごの長さを $2l$ で表し, 中点が重心であるとする. はしごの傾き角を θ で表す.



$$R_1 - F_2 = 0, \quad (M + m)g - R_2 = 0 \quad (64)$$

が成り立つ. 点Bに関するトルクが0であるから, 次が成り立つ:

$$-2lR_1 \cos \theta + (Mgl + mgx) \sin \theta = 0 \quad (65)$$

点Bで床に乗った物体が滑り出さないための条件は $F_2 < \mu R_2$ である. 以下では, このようにつり合いがなりたつ限界の x を次の条件によって求める:

$$F_2 = \mu R_2. \quad (66)$$

この関係と式(64)から F_2 と R_2 を消去すると $R_1 = (M + m)g\mu$, それを式(65)に代入すると

$$-2(M + m)gl\mu \cos \theta + (Ml + mx)g \sin \theta = 0$$

を得る. この式の両辺を mgl で割って整理すると次を得る:

$$\frac{x}{l} = 2\mu \left(1 + \frac{M}{m}\right) \cot \theta - \frac{M}{m} \quad (67)$$

この x の値まではしごの足が滑り出して倒れることはない.

ところで題意から $0 \leq x \leq 2l$ であるので, 右辺が負であるか2を超えているかの場合にはこの式が成り立つことがない.

まず, 式(67)の右辺が正であることは次のように確かめられる:

$$\text{右辺} = \frac{1}{\tan \theta} \left(\frac{M}{m} (2\mu - \tan \theta) + 2\mu \right)$$

において括弧の中の第1項は問題に与えられている θ の条件 $\tan \theta < 2\mu$ により正であり, 第2項では $\mu > 0$ である.

次に, 式(67)の右辺が2を超えない条件を求めると:

$$\frac{1}{\tan \theta} \left(\frac{M}{m} (2\mu - \tan \theta) + 2\mu \right) - 2 \leq 0, \quad \Rightarrow \quad (2\mu - \tan \theta) \left(\frac{M}{m} - 2 \frac{\tan \theta - \mu}{2\mu - \tan \theta} \right) \leq 0.$$

ここで, 最後の式の括弧内の $(\tan \theta - \mu)/(2\mu - \tan \theta)$ は, 与えられた傾き角 θ の条件 $\mu < \tan \theta < 2\mu$ により正である.

以上をまとめる.

1. 人の体重がはしごの質量に比べて十分小さく, 次の条件が満たされるとき:

$$\frac{M}{2m} > \frac{\tan \theta - \mu}{2\mu - \tan \theta},$$

人がはしごの上端に達するまで, はしごが滑ることはない.

2. そうでない場合には, はしごの途中まで登ったところで滑り出す. その限界位置を下端からの距離 x で表すと

$$x = l \left(2\mu \left(1 + \frac{M}{m}\right) \cot \theta - \frac{M}{m} \right)$$

である.

第 8 章 振動

8.1-1

【解答例】

(1) 4 倍 (2) 2 倍 (3) 2 倍 (4) 変わらず

【解説】

それぞれ、式 (8.9)、式 (8.6) の 1 階微分と 2 階微分、式 (8.4) の下の説明にある ω_0 の式において、 a を 2 倍にした時どうなるかをみればよい。

【問題のねらい】

単振動では、振幅と角振動数が最重要な量である。それぞれは別のものであり、独立であることをしっかり認識できればよい。振幅と速度と加速度は比例関係にあり、運動エネルギーは速度の 2 乗で決まることを知っていればよい。

8.1-2

【解答例】

ピストンの位置を往復運動の中心を原点として x で表す。題意より、 x は単振動の式で、例えば

$$x = a \cos \omega t$$

で表せる。ここで a は振幅で $a = 0.05 \text{ m}$ と与えられている。 t は時間である。 ω は角振動数であり、題意から $\omega/2\pi = 3600 \text{ min}^{-1}$ と与えられている。

x の式を微分して速度と加速度はそれぞれ、

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t$$

と得られ、また、単位を換算して、

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3600}{60} \text{ s}^{-1} = 60 \text{ s}$$

である。ピストンの速さの最大値と加速度の最大値はそれぞれ、数値を代入して次のように求まる。

$$|\dot{x}|_{\max} = a\omega = 0.05 \text{ m} \times 2\pi \times 60 \text{ s}^{-1} = 18.8 \text{ m/s}$$

$$|\ddot{x}|_{\max} = a\omega^2 = 0.05 \text{ m} \times (2\pi \times 60 \text{ s}^{-1})^2 = 7.1 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

有効数字を考慮すると、速さの最大値は 19 m/s 、加速度の最大値は $7 \times 10^2 \text{ m/s}^2$ である。

【解説】

調和振動の式において、変位・速度・加速度の大きさの最大値がどこに入っているかが分かればよい。

問題文ではピストンの質量が与えられているが、設問に答えるためには質量は不要である。質量が与えられているので、力を見積もることができる。

【問題のねらい】

自動車の中でピストンの運動はロッドによってクランクの回転運動とつながっている。このことから、問題ではピストンの往復運動を単振動になぞらえている。その速度と加速度を見積もって、問題に与えられた質量を用いて、働いている力を見積もって、身近ではあるがあまり知らない部分のことを推測してみる機会とする。

8.1-3

【解答例】

バネが 4 個並べて使われているが、重量を分散して担うので変位は 1 個だけの時の 4 分の 1 になる。したがってばね定数が 4 倍の 1 個のばねと同じ働きをする。ばね定数は $k = 20000 \times 4 \text{ N/m} = 80000 \text{ N/m}$ である。自動車の揺れを決める質量は自動車と人間の質量の和であるから質量は $m = (1200 + 240) \text{ kg} = 1440 \text{ kg}$ である。

(1) 段差を超える瞬間の状況は分からないので超えた後、単振動をする体系が固有振動数で振動する場合になぞらえて自動車の振動数を求める。角振動数 ω_0 を与える公式と、振動数 ν と角振動数の関係を用いて

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{80000 \text{ N/m}}{1440 \text{ kg}}} = 1.19 \text{ s}^{-1}$$

(2) 1回の振動にかかる時間は振動の周期 $T = 1/\nu$ であるから、2回の振動にかかる時間は、

$$\frac{2}{\nu} = 1.68 \text{ s}$$

である。

【解説】

複数のバネが用いられた場合直列と並列ではその結果は異なる。並列の場合にはバネの強さが個数倍になることに注意する。質量については、乗っている人数が多いほうが揺れ方がゆっくりである。これは経験していることであろう。

【問題のねらい】

身の周りに単振動の公式を使って数値を見積もってみることができる例があれば、公式を生きたものと感じることができよう。

8.1-4(1)

【解答例】

静止しているときはおもりに働く重力とバネの力が釣りあうので、バネの自然長を l_0 とおくと、

$$mg = k(l - l_0),$$

が成り立ち、よって求めるバネの長さは

$$l = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

バネの自然長の時の下端の位置から下向きに測ったおもりの位置を x とすると、バネの伸びは x であるから、バネの力は下向きを正として $-kx$ である。したがって、重力も含めておもりの運動方程式は、

$$m\ddot{x} = mg - kx$$

である。右辺は、調和振動子の運動方程式の右辺とは少し異なるが、 $-k(x - mg/k)$ と書き換えると、座標 x の代わりに $u = x - \frac{mg}{k}$ に対する方程式になることに気づく。 $\ddot{u} = \ddot{x}$ であることに注意すると

$$m\ddot{u} = -ku$$

が得られ、これは調和振動子の運動方程式である。したがって、角振動数 ω は次である：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

【解説】

おもりが静止しているので、おもりに働く重力（下向きに mg ）とバネが自然長 l_0 から伸びて長さ l になった時にバネが上向きに引く力（上向きに $k(l - l_0)$ ）が釣りあっている。

振動を始めたおもりは、重力とバネの力が釣り合う点つまり平衡位置を原点として下向きにとった座標 u を使うと、復元力が $-ku$ であるので、その運動は調和振動である。

重力のもとでバネにつるした物体の振動の固有角振動数は、重力が働かない状況でそのバネに結んだ物体の調和振動子と同じであることが分った。

【問題のねらい】

調和振動子は、場所に依らない一定の力が働いても固有角振動数には影響しないこと、がその特徴である。このことを知識として得てもよいが、これを順を踏んで説明することができる力を身につけることは、いっそう重要である。

8.1-4(2)

【解答例】

図 8.5(a) のように配置した2個のバネは、それぞれの力の合力がおもりに働くから、それぞれが単独でおもりに力を及ぼすことに比べて半分の伸びで済む。(全体として)力が同じで(共通に)伸び

が $1/2$ であるから、ばね定数は単独のバネの 2 倍である。つり合いの点の周りでの上下振動は調和振動であり、本問 (1) の結果の式で k とあるところを $2k$ とすればよい。よって求める角振動数 ω は：

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

次に、図 8.5(b) のように配置した 2 個のバネにはそれぞれに 1 個のおもりを支えるときと同じ力が働く。それは、

(i) 下のバネはおもりに働く下向きの重力を支えるため、おもりに同じ力を上向きに及ぼす、

(ii) そのために下のバネは伸びて上のバネにも下向きの力を及ぼす、

(iii) 上のバネは下から引かれる力を支えるため伸びて下のバネに上向きの力を及ぼす、

からである。したがって各々のバネの伸びは 1 つのバネでおもりを支える場合と同じであり、全体としての伸びは単独の場合に比べると 2 倍の伸びである。力は同じで伸びが 2 倍だから、つながったバネ全体でのバネ定数は単独のバネの $1/2$ である。つり合いの点の周りでの上下振動は調和振動であり、本問 (1) の結果の式で k とあるところを $k/2$ とすればよい。よって求める角振動数 ω は、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

【解説】

図 8.5(a) の場合では問題 8.1-3 で行った 4 個のバネについての考察を 2 個のバネについて行い、その結果を本問の (1) の解答に利用すればよい。図 8.5(b) の場合には新しく説明を考える必要がある。

【問題のねらい】

同じ長さ同じ強さのバネを縦につないだり、横に並べたりして、結果としてどのようなバネを使ったことに相当するかを考えるためには、おもりを下げてその伸びを見ることが有効である。このような考察をする習慣が身につくとよい。

8.2-1

【解答例】

一般解の式 (8.31) とその微分を記すと、

$$x(t) = c_1 \exp[-(\lambda - \kappa)t] + c_2 \exp[-(\lambda + \kappa)t]$$

$$\dot{x}(t) = -(\lambda - \kappa)c_1 \exp[-(\lambda - \kappa)t] - (\lambda + \kappa)c_2 \exp[-(\lambda + \kappa)t]$$

となる。 $x(0) = 0$ と $\dot{x}(0) = v_0$ から、それぞれ次が得られる。

$$c_1 + c_2 = 0, \quad -(\lambda - \kappa)c_1 - (\lambda + \kappa)c_2 = v_0$$

これらを c_1, c_2 について解くと

$$c_1 = \frac{v_0}{2\kappa}, \quad c_2 = -\frac{v_0}{2\kappa},$$

であり、よって

$$x(t) = \frac{v_0}{2\kappa} e^{-\lambda t} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t})$$

である。このことから次に注意する：

$$x(t) \geq 0 \quad (\text{等号は } t = 0 \text{ のとき}).$$

この式は、 t とともに指数関数的に単調に減少する $e^{-\lambda t}$ と、 $t = 0$ で 0 であって $t > 0$ で単調に増大する $e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}$ の積であるが、 $\lambda > \kappa$ であることからその積は t が無限に増加するとき 0 に収束することがわかる。よって

$x(t)$ は $t = 0$ で 0 から始まり、

増大して極大を経て、

指数関数的に減少する

本文の図 8.6(b) の破線のグラフのふるまいをすることがわかった。

なお、極大となる時刻を t_0 とすると、 $\dot{x}(t_0) = 0$ であるので、上の $\dot{x}(t)$ の式に上で求めた c_1, c_2 を代入して方程式 $\dot{x}(t_0) = 0$ を解いて、

$$t_0 = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\lambda + \kappa}{\lambda - \kappa}$$

が得られる。したがってグラフで極大を与える横軸の値は $\omega_0 t_0 / 2\pi$ であり、ここに $\lambda = 1.5\omega_0$ および、 $\kappa = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ にこれを代入して得られた $\kappa = \omega_0 \sqrt{1.5^2 - 1}$ を用いると、極大値は

$$\frac{\omega_0 t_0}{2\pi} = 0.14$$

のときである。

8.2-2

【解答例】

まず、バネ定数 k を与えられた条件から求める。おもりの質量を m 、バネの伸びを a 、重力加速度を g とすると、つり合っているとき $mg = ka$ が成り立つ。 $m = 0.10 \text{ kg}$ 、 $a = 0.05 \text{ m}$ 、 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ を代入して計算し、次のように求まる：

$$k = \frac{mg}{a} = \frac{0.10 \text{ kg} \times 9.80 \text{ m/s}^2}{0.05 \text{ m}} = 19.6 \text{ kg/s}^2 = 19.6 \text{ N/m.}$$

(1) 1分後に振幅が半分になるので、減衰振動の式の指数関数因数 $e^{-\lambda t}$ が $t = 60 \text{ s}$ に $1/2$ になればよい。方程式

$$e^{-\lambda \times 60 \text{ s}} = \frac{1}{2}$$

を解いて計算すると、

$$\lambda = -\frac{1}{60 \text{ s}} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{60 \text{ s}} \ln 2 = 0.0116 \text{ s}^{-1} \quad (68)$$

を得て、さらに $\lambda = \gamma/2m$ であることから、 γ は次のように求まる：

$$\gamma = 2m\lambda = \frac{2 \times 0.10 \text{ kg}}{60 \text{ s}} \ln 2 = 2.3 \times 10^{-3} \text{ kg/s} = 2.3 \times 10^{-3} \text{ N s/m.}$$

(2) ここまでで学んだように、抵抗力の係数 γ の大きさによって運動は異なり、おもりの変位 $x(t)$ の式は異なる。問題文には振動するとあるから、抵抗が小さい場合の運動であると考えられる。それを確かめるため減衰の係数 λ と減衰がないとした場合の固有角振動数 ω_0 を比較する。題意より、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19.6 \text{ kg/s}^2}{0.10 \text{ kg}}} = 14.0 \text{ s}^{-1}. \quad (69)$$

本問(1)で求めたように $\lambda = 0.0116 \text{ s}^{-1}$ であるから、これは $\lambda < \omega_0$ を満たし、よって運動は減衰振動である。

変位 $x(t)$ が満たすべき微分方程式は、重力が x を増す向きに作用しているので

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = g$$

である。ここで、最初に見たように $ka = mg$ であり、また $k = m\omega_0^2$ であることから、右辺を $g = \omega_0^2 a$ と書くことができる。よって、 y を次のように定義して、その従う運動方程式を求めると次のようになる：

$$y = x - a \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (70)$$

これは、式(8.25)の減衰振動の運動方程式であり、その解は一般に

$$y = e^{-\lambda t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad \text{ただし} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2},$$

と表され、 c_1, c_2 は任意定数である。与えられた初期条件

$$t = 0 \text{ で } y = -a, \quad \dot{y} = 0$$

を用いると、少しの計算で

$$c_1 = -a, \quad c_2 = -\frac{\lambda}{\omega} a$$

が得られる。 $y(t)$ が求まったことで、式(70)から $x(t)$ は次の式で表される：

$$x = a \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) \right]. \quad (71)$$

この式は求める問題の解として正確ではあるが、問題の冒頭に減衰の程度を表す具体的な数値が与えられている。それに基づく具体的な数値を与える式 (68) と式 (69) から、 $\lambda \ll \omega_0$ である。このことを考慮すれば、より現実的な近似解を最終的な答えとするべきである。よって式 (71) において $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \approx \omega_0 = 14\text{s}^{-1}$ 及び $\cos \omega t + (\lambda/\omega) \sin \omega t \approx \cos \omega t$ の近似をする。

したがって、求めるおもりの変位 x の時間変化を表す近似的な表式は以下のとおりである：

$$x = a(1 - e^{-\lambda t} \cos \omega t) \quad \text{ただし } a = 0.05\text{ m}, \lambda = 0.0116\text{s}^{-1}, \omega = 14\text{s}^{-1}.$$

8.2-3

【解答例】

まず動き出して最初に止まるまでについて考察する。次いでその後の運動についての考察をする。

(1) 最初の位置は $x = a$ である。

$a \leq \mu mg/k$ ならば、このとき $kx \leq \mu mg$ 、ばねの力が摩擦を上回らず静止したままである。

$a > \mu mg/k$ ならば、負の向きに動き出す。逆向きに動摩擦を受け次の運動方程式が成り立つ：

$$m\ddot{x} = -kx + \mu' mg.$$

この式の右辺を $-ky$ とする y を定義すると、 y についての単振動の運動方程式が得られる：

$$m\ddot{y} = -ky, \quad \text{ただし } x = \frac{\mu' mg}{k} + y.$$

x の初期条件が $t = 0$ で $x = a, \dot{x} = 0$ であるから、 y の初期条件は $t = 0$ で $y = a - \mu' mg/k, \dot{y} = 0$ である。これを用いて解を求め、それを x の式に代入すると次を得る：

$$x = \frac{\mu' mg}{k} + \left(a - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cos \omega t, \quad \text{ただし } \omega = \sqrt{k/m}.$$

この解は $\dot{x} < 0$ である間有効である。 $\dot{x} = 0$ から止まる位置が求まり、そのとき $\omega t = \pi$ である。

(2) 初めて止まる位置は $x = -a + 2\mu' mg/k$ である。

もしも、この x が正であるならば、 $kx < \mu mg$ が成り立つことが、以下のようにしてわかるので、摩擦がバネによる力に勝り、物体はこの位置に静止を続ける。 $kx < \mu mg$ 成り立つことを示そう。上の x の式を使って $kx - \mu mg$ を計算すると、

$$kx - \mu mg = 2\mu' mg - \mu mg - ka = 2(\mu' - \mu)mg + \mu mg - ka.$$

ここで、 $\mu' < \mu$ という関係を使うと、上の式より、

$$kx - \mu mg < \mu mg - ka.$$

を得る。さらに、物体が最初に動き出すための条件 $ka > \mu mg$ より、上の式の右辺は負であることがわかる。以上により、 $kx - \mu mg < 0$ 、すなわち $kx < \mu mg$ が示された。

次に、初めて物体が止まる位置の座標 x が負の場合を考察する。この x を $-a_1$ とおく。すなわち、

$$ka_1 = ka - 2\mu' mg \tag{72}$$

である。もしも、 $ka_1 > \mu mg$ ならば物体は再び動き出し、そうでなければ物体は静止を続ける。

(3) 物体が $x = -a_1$ の位置で一旦静止してから再び動き出した後の運動は、最初に $x = a$ の位置から運動を始めた後の運動と同様に解析できる。すなわち、上記 (1) での考察において

$$a \rightarrow -a_1, \quad x \rightarrow -x, \quad a_1 \rightarrow -(2\mu' mg/k - a_1)$$

という変換（読み替え）をすればよい。2度目に止まる位置を $x = a_2$ とすると、この読み替えにより、式 (72) に対応して、

$$ka_2 = ka_1 - 2\mu' mg$$

を得る。そして、 $ka_2 > \mu mg$ であるならば物体は三たび動き出し、さもなければこの位置に停止したままになる。

以上の考察により、 a_n を

$$ka_n = ka_{n-1} - 2\mu' mg \quad (a_0 = a; n = 1, 2, 3, \dots) \quad \Rightarrow \quad ka_n = ka - 2n\mu' mg$$

で定義すると、 $ka_n > \mu mg$ ならば物体は n 回目に静止した後も動き出すことがわかる。したがって、

$$ka - 2n\mu' mg \leq \mu mg \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (73)$$

を満たす最小の n を n_0 (図 14) とすると、物体は n_0 回目に

$$x = (-1)^{n_0} a_{n_0}$$

の位置で止まった後で静止を続けると結論できる。不等式 (73) を満たす最小の n として定義した n_0 は、与えられた与えられた a に対して次の不等式を満たす整数 n_0 である、と表現することもできる。

$$2(n_0 - 1)\mu' mg < ka - \mu mg \leq 2n_0\mu' mg.$$

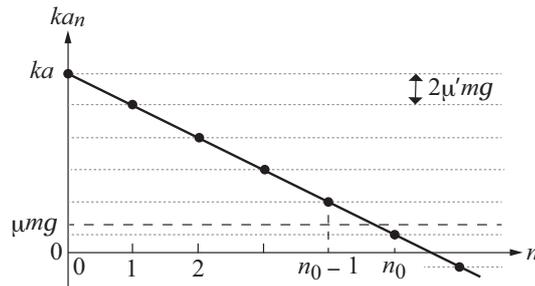


図 14: 不等式 (73) を満たす最小の整数 n として定義される n_0 .

この解答例で定義した a_n は、教科書の略解で導入した a_n とは異なることに注意。教科書略解の a_n は、本解答例の a_n を用いて $a_n - a + \mu m/k$ と表される。

8.2-4

【解答例】

式 (8.33) の任意定数 a と b をそれぞれ A, B と書くと、 $x = (A + Bt)e^{-\lambda t}$ 。与えられた初期条件 ($t = 0$ で $x = a, \dot{x} = v$) を満たすように A と B を決めると、この式は

$$x = [a + (v + \lambda a)t] e^{-\lambda t} \quad (74)$$

となる。いま、 $a > 0, v + \lambda a < 0$ とされているから、 $x(t)$ は初期値 $x(0) > 0$ から速度 $v < 0$ で減少し、一度だけ 0 になる。最小値をとった後、緩やかに増大して $x = 0$ に負側から徐々に近づく。

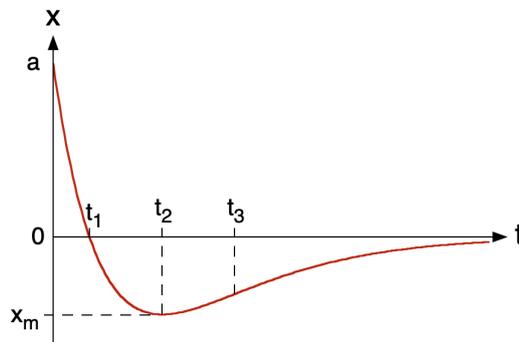


図 15: 式 (74) で表される臨界減衰の運動。

グラフの概形を図 15 に示す。図の中で t_1, t_2, t_3 はそれぞれ x が 0 になる時刻、最小値を与える時刻、グラフの変曲点となる時刻を表し、 $x(t_1) = 0, \dot{x}(t_2) = 0, \ddot{x}(t_3) = 0$ から求められる。実際に計算して求めると以下のように表式が得られる：

$$t_1 = \frac{a}{|v| - \lambda a}, \quad t_2 = \frac{|v|}{\lambda(|v| - \lambda a)}, \quad t_3 = \frac{2|v| - \lambda a}{\lambda(|v| - \lambda a)}.$$

また、最小値は次の式で表される：

$$x_m = -\frac{|v| - \lambda a}{\lambda} e^{-\lambda t_2}.$$

8.3-1

【解答例】

時間が十分に経過したのちの強制振動は本文中に記されたように $x = c \cos(\Omega t + \delta)$ で与えられ、その振幅は

$$c(\Omega) = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\lambda^2}}$$

のように Ω の関数である。図 8.8 には、 λ/ω_0 が小さい場合には $c(\Omega)$ は極大をもつよう描かれている。これは減衰が小さければある外部振動数の時に大きな振動が起こることを意味する。これを確かめて極大値を求めるためには $c'(\Omega)$ を計算してその符号を調べ、0 になる Ω を探せばよい。微分の計算から

$$c'(\Omega) = \frac{f}{m} \frac{2\Omega(\omega_0^2 - 2\lambda^2 - \Omega^2)}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\lambda^2)^{3/2}}$$

である。この分子は、もし問題に与えられたように $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$ であるならば Ω の大小で符号を変える。つまり、

$$\begin{aligned} c'(\Omega) > 0 & : \quad \Omega^2 < \omega_0^2 - 2\lambda^2 \text{ のとき} \\ c'(\Omega) < 0 & : \quad \Omega^2 > \omega_0^2 - 2\lambda^2 \text{ のとき} \end{aligned}$$

である。よって、 $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ で $c(\Omega)$ は極大であり、最大値をとる。最大値は Ω の値を代入して、

$$c_{\max} = \frac{f}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

と求まる。

ところで、もしも問題に与えられた条件が満たされず、 $\omega_0^2 - 2\lambda^2 < 0$ であったならば、上記で常に $c'(\Omega) < 0$ であり、 $c(\Omega)$ は極大をもたず $\Omega = 0$ の時の値から Ω の増加とともに減少して $\Omega \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。

8.3-2

【解答例】

減衰のない強制振動で外力の振動数が固有振動数に等しい場合の運動方程式から、微分方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \omega_0 t$$

が導かれる。問題に与えられた $x(t)$ が特殊解であることは、代入して方程式を満たすことを確認して示すことができる。ここでは、解を求める手続きの一部をみるために、関数は与えられるとして係数 a を未知定数と置いて求めてみる。

$$x = at \sin \omega_0 t$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \sin \omega_0 t + a\omega_0 t \cos \omega_0 t, \\ \ddot{x} &= 2a\omega_0 \cos \omega_0 t - a\omega_0^2 t \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

となるので、これらの x と \ddot{x} を運動方程式に代入して

$$2a\omega_0 \cos \omega_0 t - a\omega_0^2 t \sin \omega_0 t + \omega_0^2 at \sin \omega_0 t = \frac{f}{m} \cos \omega_0 t$$

が得られる。これを満たす a を求めると、

$$a = \frac{f}{2m\omega_0}$$

が得られる。

【解説】

微分方程式の一般的な解法にしたがって解く Lagrange の定数変化法と呼ばれる方法がある（教科

書 p. 167 参照). その方法では, 外力がない方程式の解をもとに, その任意定数を未知関数に置き換える. 外力がなければ微分方程式は同次方程式 (または斉次方程式) と呼ばれて, 一般解は 2 階微分方程式の場合 2 つの任意定数を含む. 今の場合の斉次方程式の一般解は, $\sin \omega_0 t$ と $\cos \omega_0 t$ の 1 次結合である. 外力がある場合には, 以下のように, 任意定数の代わりに t の未知関数を仮定して, 解になるように未知関数を決める. 2 つの未知関数を $u_1(t), u_2(t)$ として,

$$x(t) = u_1(t) \cos \omega_0 t + u_2(t) \sin \omega_0 t \quad (75)$$

とおき, 微分方程式を満たす条件を求める. 先ずこの $x(t)$ を微分方程式に代入すると,

$$\ddot{u}_1 \cos \omega_0 t + \ddot{u}_2 \sin \omega_0 t + 2\omega_0(-\dot{u}_1 \sin \omega_0 t + \dot{u}_2 \cos \omega_0 t) = \frac{f}{m} \cos \omega_0 t \quad (76)$$

を得る. ここで $u_1(t), u_2(t)$ に制限を加えて,

$$\dot{u}_1 \cos \omega_0 t + \dot{u}_2 \sin \omega_0 t = 0 \quad (77)$$

と仮定する. これを微分した式を用いて式 (76) の初めの 2 項を消去すると, 結局

$$-\dot{u}_1 \sin \omega_0 t + \dot{u}_2 \cos \omega_0 t = \frac{f}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (78)$$

となる. 式 (77), (78) は $\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t)$ に対する連立方程式である. これを解いて,

$$\dot{u}_1 = -\frac{f}{2m\omega_0} \sin 2\omega_0 t, \quad \dot{u}_2 = \frac{f}{2m\omega_0} (1 + \cos 2\omega_0 t)$$

を得る. さらに, これらの式を積分すると,

$$u_1 = \frac{f}{4m\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + c_1, \quad u_2 = \frac{f}{4m\omega_0^2} (2\omega_0 t + \sin 2\omega_0 t) + c_2 \quad (c_1 \text{ と } c_2 \text{ は任意定数})$$

となる. 最後に, これらの u_1 と u_2 を式 (75) に代入して, $c_1 + f/4m\omega_0$ を改めて c_1 とおくと, 次の結果が得られる.

$$x(t) = \frac{f}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

もとの微分方程式における外力の項が特に今の式の場合には, 式 (77) とは別の制限, 例えば $u_1(t) = 0$ とおいて $u_2(t)$ のみを求めることもできるが, 式 (77) の仮定をすることは一般の外力に対しても使える方法であり, 長い計算にはなるが試みる価値はある.

【問題のねらい】

本書の本文では減衰のない強制振動で外力の振動数が振動子の固有振動数に一致した場合の運動方程式の一般解を式 (8.45) に与えているが, なぜそうなるかの説明を省いた. これを補うために, 確認することを促したものである. なお, 物理学を学ぶ過程で, 見かけの数式は運動のパラメータについて連続でないが現実には連続的である場合によく遭遇するが, 今の場合には式 (8.44) は $\Omega \rightarrow \omega_0$ で発散していて, 本問で確認した解とはつながらない. これは, 減衰がごく小さいという極限と, Ω が ω_0 にごく近いという極限の順序の問題を含むからである. 本問は単に数学的な手続きの実行を求めているが, 解くに際して物理的な考察と数学的な手続きの関係について考えるいい機会となるであろう.

8.3-3

【解答例】

(1) 式 (8.49) が方程式 (8.39) の解になるように定数 c_1, c_2 を求める計算を行う. 式 (8.49) に与えられる $x(t)$ とその 1 階微分, 2 階微分を記すと,

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t \\ \dot{x} &= -\Omega c_1 \sin \Omega t + \Omega c_2 \cos \Omega t \\ \ddot{x} &= -\Omega^2 c_1 \cos \Omega t - \Omega^2 c_2 \sin \Omega t \end{aligned}$$

である. これを方程式 (8.39)

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \Omega t$$

に代入した結果は

$$(-\Omega^2 c_1 + 2\lambda\Omega c_2 + \omega_0^2 c_1) \cos \Omega t + (-\Omega^2 c_2 - 2\lambda\Omega c_1 + \omega_0^2 c_2) \sin \Omega t = \frac{f}{m} \cos \Omega t$$

となる。この式が任意の時刻 t で成立するためには、両辺で $\cos \Omega t$ と $\sin \Omega t$ の係数がそれぞれで等しくなくてはならない。よって

$$(-\Omega^2 + \omega_0^2) c_1 + 2\lambda\Omega c_2 = \frac{f}{m}, \quad -2\lambda\Omega c_1 + (-\Omega^2 + \omega_0^2) c_2 = 0$$

が得られる。この c_1, c_2 についての連立方程式を解くと、

$$c_1 = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}, \quad c_2 = \frac{f}{m} \frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$$

と求まる。

(2) 小問 (1) の特殊解 $x = c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t$ が $c \cos(\omega t + \delta)$ と書きなおせるためには、

$$c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t = c \cos \delta \cos \Omega t - c \sin \delta \sin \Omega t$$

が成り立たなくてはならない。したがって、

$$c_1 = c \cos \delta, \quad c_2 = -c \sin \delta \quad \text{よって} \quad c_1^2 + c_2^2 = c^2, \quad \frac{c_2}{c_1} = -\tan \delta$$

であるので、小問 (1) の結果を用いて、

$$c^2 = \left(\frac{f}{m}\right)^2 \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2)^2}$$

よって

$$c = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}, \quad \tan \delta = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

が得られた。これは式 (8.41) に一致する。

8.3-4

【解答例】

(1) 物体の座標 (物体とバネの結合点) を x とすると、バネの長さは $x - x_P$ でバネの自然長は l なので、物体の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -k(x - x_P - l)$$

となる。この式に、問題に与えられた $x = l + u$, $x_P = A \cos \Omega t$ を代入して整理すると、次式が得られる。

$$m\ddot{u} + ku = kA \cos \Omega t.$$

これは強制振動の運動方程式 (8.38) において、 $\gamma = 0$, $x = u$ とおいたものに一致する。そして、式 (8.38) の f に対応する量は

$$f = kA$$

である。よって u の微分方程式として

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \frac{f}{m} \cos \Omega t \quad \text{ただし} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = kA \quad (79)$$

を得る。

(2) 方程式 (79) の一般解は、この方程式の特殊解と同次方程式 (右辺がゼロの方程式) の一般解 $a \cos(\omega_0 t + \alpha)$ (a と α は任意定数) との和として表される。いま、式 (79) の右辺が $\cos \Omega t$ の定数倍なので、 c を定数として、 $u = c \cos \Omega t$ が特殊解であると予想できる。実際、この u を方程式 (79) に代入すると

$$(-\Omega^2 + \omega_0^2) c \cos \Omega t = \frac{f}{m} \cos \Omega t$$

となるので $c = f/m(\omega_0^2 - \Omega^2)$ であれば、 $u = c \cos \Omega t$ は方程式 (79) の特殊解である。よって、一般解は次の通り。

$$u = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t \quad (a \text{ と } \alpha \text{ は任意定数}).$$

(3) 与えられた初期条件を用いるため u と \dot{u} の式を書く. 上の小問 (2) で $\Omega = 2\omega_0$ を代入すると第 2 項の係数は $-\frac{f}{3m\omega_0^2}$ であるが, f と ω_0 の定義を用いて書き換える. 計算の結果

$$u(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha) - \frac{A}{3} \cos 2\omega_0 t, \quad \dot{u}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{2A}{3}\omega_0 \sin 2\omega_0 t$$

を得る. 初期条件 $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0$ を使うと,

$$a \cos \alpha - A/3 = 0, \quad -a\omega_0 \sin \alpha = 0$$

よって, $\alpha = 0, a = A/3$ または $\alpha = \pi, a = -A/3$ が得られ, どちらにしても答えは

$$u(t) = \frac{A}{3} \cos \omega_0 t - \frac{A}{3} \cos 2\omega_0 t$$

となる.

グラフを描く際に, 右辺は ω_0 の固有振動に 2 倍の速さの P の振動が同じ振幅で重なっていること, 固有振動の山は P の振動で打ち消され, 固有振動の谷は P の振動が重なって 2 倍になっていること, を考察しておく. グラフは図 16 に示す. ここで $T = 2\pi/\omega_0$ である.

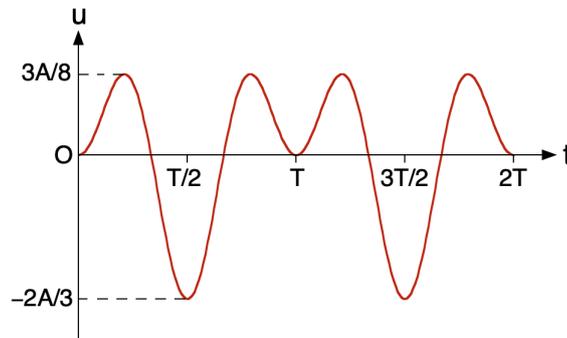


図 16: 固有振動数の 2 倍の振動数で支点を揺らせたときの調和振動子の運動.

【解説】

強制振動とは振動する外力を加えられた調和振動であると学んだが, 外力ではなく拘束条件の振動が与えられた場合にも方程式が同じになることが分かった. 共鳴条件が満たされない場合にもそれなりに振動が誘起されるので, 式が与えられているとその程度を見積もることができる.

今の場合, 外力の振動数 Ω が振動子の固有振動数 ω_0 とは離れているので強い共鳴はおこらず, 与えられた P の振幅 A に対する物体の振幅 u の程度はさほどではないと予想されるが, 数値は計算してみないと分からない. 計算の結果, 最大の変位は固有振動の谷の位置で, その絶対値は $2A/3$ であることが分かった.

【問題のねらい】

運動方程式は, 与えられた条件を用いて書き下せば導くことができることを学び, その結果をすでに知っている微分方程式と関係づけることで問題の解決につながることを学ぶこと. 共鳴について学んだので, 実際に身近に起こりそうな状況を想定して, 共鳴の程度の見積もりについて学ぶこと.

8.3-5

【解答例】

(1) 例題 8.1-2 では, 振り子の振れ角 φ が小さい時の近似として, おもりの水平方向の変位 x に対する運動方程式 (8.20) を導いた. ここでは, 支点 P が時間とともに変化するので, x と φ の関係は, 式 (8.19) ではなく, $x \approx l\varphi + x_P$ となる. 例題 8.1-2 の解答で行った考察を繰り返すと, おもりに働く力の x 方向の成分は, $F_x \approx -mg\varphi = -mg(x - x_P)/l$ である. $x_P = A \cos \Omega t$ を代入して, 振

れの小さい時の近似的な運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}(x - A \cos \Omega t)$$

である。これを x に対する微分方程式として書き直すと

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{gA}{l} \cos \Omega t$$

となるが、 $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ 、 $f = mgA/l$ とおくと、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \Omega t$$

である。これは式 (8.39) の $\lambda = 0$ とした場合と同じであり、おもりの位置座標は強制振動力をうける調和振動子の減衰がない場合の微分方程式にしたがうことが確かめられた。

設問にある ω_0 に対応する量の答は、支点を動かす以前の振り子の振れが小さい場合の角振動数である。一方、 f に相当する量の答は、振り子に作用する重力の大きさの A/l (支点を揺る動きの振幅と振り子長の比) 倍であり、これが強制振動の強制力の役割を果たす。

(2) 小問 (1) のおもりにその速度に比例する抵抗 $-\gamma\dot{x}$ が働くときの運動方程式から、本文 8.2 節の内容にならって $\lambda = \gamma/2m$ とおいて次のように $x(t)$ の微分方程式が求まる；

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \Omega t.$$

問題文には P が固定されているとき、つまり $f = 0$ のときの減衰の程度が与えられているので、それを用いて λ を求めておく。そのため、 $f = 0$ の場合の方程式の一般解を書くと、式 (8.29) にならって a, α を任意定数として

$$x(t) = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

である。5 回振動する間に経過する時間 t を周期 $2\pi/\omega$ の 5 倍とし、その時刻 t で減衰をあらわす因数の値が $1/2$ になることから、次のように求まる：

$$\exp\left(-\lambda \frac{2\pi}{\omega} \times 5\right) = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\lambda}{\omega} = \frac{\ln 2}{10\pi} = 0.0221.$$

この式と ω の定義 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ から ω を消去して、

$$\frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (10\pi/\ln 2)^2}} = 0.0221$$

という関係を得る (ω と ω_0 の差は無視できるほど小さいことがわかる)。

題意にしたがって支点 P を揺り動かした場合には、問題に指示されているように強制振動の振幅について本文中で求めた式を用いることにする。外力の角振動数が Ω のとき、十分に時間が経過したのちのおもりの運動が、式 (8.42) によって表された $x = c \cos(\Omega t + \delta)$ であり、その振幅は近似式 (8.43)

$$c \simeq \frac{f}{2m\omega_0 \sqrt{(\Omega - \omega_0)^2 + \lambda^2}}$$

である。いま、 $\Omega = \omega_0$ だから、

$$c = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}$$

を得る。ここで小問 (1) での f の定義から $f = mgA/l = m\omega_0^2 A$ であることと、上で求めた今の場合の λ と ω_0 の比の値を用いて、

$$c = \frac{A\omega_0}{2\lambda} = \frac{A}{2 \times 0.0221}.$$

よって共鳴によって振れが増大する倍率つまり、おもりの運動の振幅の支点の振幅に対する比は、

$$\frac{c}{A} = \frac{1}{0.0442} = 23$$

と求まった。

【解説】

問題 8.3-4 と同じように支点が強制的に動かされたときに調和振動子の運動が強制振動であること

を運動方程式を立てて確かめる問題である。本問ではさらに抵抗のある減衰振動でもある場合に、共鳴が起こって大きくなった振動の振幅を見積もることも求めている。

【問題のねらい】

振動現象は物理学においてのみならず、科学技術の多くの場面で見られ、重要である。その基本方程式だけではなく、現実には存在する減衰、それに対抗して振動を維持させるための外力、そのいずれも必要な概念であり、その両方を一度に取り入れながら課題に対応することにより、必要な方程式について考えて対応する姿勢と能力を育てる。

本文中では、本問のように強制振動で外部の力の振動数と振動子の固有振動数が一致した場合に、抵抗のない場合には別の解を求めた。これに対して、抵抗のある場合には外部の力の振動数にかかわらず同じ一般解を使い、外力の振動数が固有振動数に一致した場合にも問題なく解が求まっている。このように、理想的に抵抗がないとした場合には共鳴周波数における発散による強制振動の解の不連続が生じるが、現実には存在する抵抗のおかげで連続性が回復しているといえる。したがって、本問ではこのようなことを認識するいい機会を与えているといえる。

8.4-1

【解答例】

(1) つり合いの位置からの質点1の変位を x_1 、横棒の変位を x_0 としている。つり合いの状態では、質点1のバネは自然長よりも mg/k だけ伸びて、質点に作用するバネの力が重力とつり合っている。質点と棒の変位がそれぞれ x_1 、 x_0 のときには、バネはさらに $x_1 - x_0$ だけ伸びる。したがって、バネの伸びは $mg/k + x_1 - x_0$ であり、質点1に作用するバネの力と重力の合力は（下向きを正として） $-k(mg/k + x_1 - x_0) + mg = -k(x_1 - x_0)$ である。同様に質点2についても変位と力が分かるので、質点のそれぞれのしたがう運動方程式は以下通りである。

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_0), \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_0). \quad (80)$$

(2) つり合いの状態では、天井に固定したバネは（2つのおもりに作用する重力とつり合うために）自然長よりも $2mg/\lambda$ だけ伸びている。したがって、横棒の変位が x_0 のとき、このバネの伸びは $2mg/\lambda + x_0$ である。横棒の質量が0であるから横棒に作用する3つのバネの力がつり合っていない。天井のバネが横棒に作用する力は $-\lambda(2mg/\lambda + x_0)$ であり、質点のバネがそれぞれ横棒に作用する力は $k(mg/k + x_1 - x_0)$ 、 $k(mg/k + x_2 - x_0)$ であるから、つり合いの条件式は

$$-\lambda(2mg/\lambda + x_0) + k(mg/k + x_1 - x_0) + k(mg/k + x_2 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda x_0 + k(x_1 - x_0) + k(x_2 - x_0) = 0.$$

これより次の関係式が導ける：

$$x_0 = \frac{k}{2k + \lambda}(x_1 + x_2) \quad (81)$$

(3) 2つの質点の座標を用いて座標 x 、 X を次のようにおく：

$$x = x_1 - x_2, \quad X = x_1 + x_2. \quad (82)$$

これにより、式(80)の2式の差から次が導かれる：

$$m\ddot{x} = -kx \quad (83)$$

また、式(80)の2式の和から

$$m\ddot{X} = -k(X - 2x_0) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{X} = -\frac{k\lambda}{2k + \lambda}X \quad (84)$$

が導かれる。ここで x_0 に式(81)を代入した。

これらの運動方程式から x と X は基準座標であり、基準振動数はそれぞれ次のとおりである：

$$x: \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (X = 0 \text{ のとき } x_1 = -x_2)$$

$$X: \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k\lambda}{m(2k + \lambda)}} \quad (x = 0 \text{ のとき } x_1 = x_2).$$

(4) 図 17 の (i) に x の, また (ii) に X の振動を示す. 左から右に向かって順次 $1/4$ 周期ずつの質点の位置を示し, 矢印で運動の向きを表している. 曲がった矢印はその時に運動の向きが変わることを表す. (i) では横棒は動かさず, 2つの質点が逆位相で振動する. (ii) では2つの質点は高さをそろえて同じ位相で振動し. それに従って横棒も同じ位相で振動する.

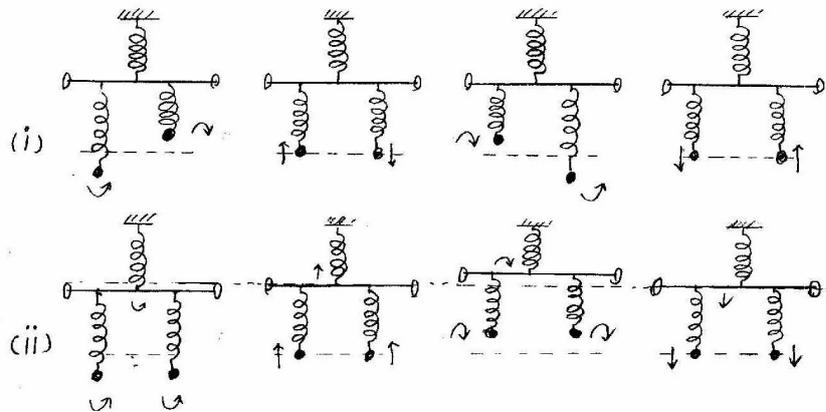


図 17: 2つのおもりが逆位相で振動する基準振動 (i) と同位相で振動する基準振動 (ii).

【解説】

2つの基準振動数の大小関係は $\omega_0 > \omega_1$ である (逆位相のほうが同位相よりも角振動数が大きい). この関係は次のように理解できる. 2つの質点の振動が逆位相の場合には横棒が静止するので, 2つの質点はそれぞれが, バネ定数 k のバネに吊り下げられた質量 m おもりと同じ角振動数 $\sqrt{k/m}$ で振動する. つぎに, 同位相で振動する場合を考える. このときの2つのおもりの運動 (図 17(ii)) は, 図 18(a) に示す質量 $2m$ のおもりと同じ運動をする. この系では, 質量 $2m$ のおもりを並列につないだ2つのバネ (バネ定数 k) で吊し, そのバネをもう1つのバネ (バネ定数 λ) で吊している. 2つのバネを並列につなぐと, バネ定数が2倍の1つのバネと同じ働きをする (問題 8.1-4 参照). したがって, 図 18(a) のおもりは, 図 18(b) のおもりと同じ運動をする. ところで, バネ定数 $2k$ のバネに吊した質量 $2m$ のおもりは, バネ定数 k のバネに吊した質量 m のおもりと同じ角振動数 $\sqrt{k/m}$ で振動する. そして, 図 18(b) のように2つのバネを直列につなぐと, どちらのバネよりも弱い (バネ定数の小さい) 1つのバネと同じ働きをする. バネ定数が小さくなると角振動数は小さくなるので, 図 18(b) のおもりの角振動数は $\sqrt{k/m}$ よりも小さい. 以上の考察により, $\omega_0 > \omega_1$ であることが納得できる.

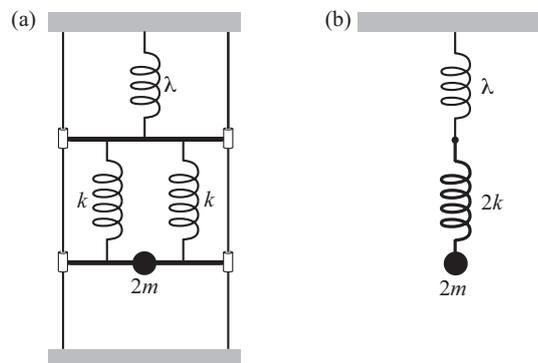


図 18: 同位相で振動する基準振動と同じ振動をする力学系. (a) と (b) に示す質量 $2m$ のおもりは, どちらも同じ振動数で振動する.

8.4-2

【解答例】

(1) 2つのおもりの変位を角度を用いて表すと :

$$x_1 = a\theta + l\varphi_1, \quad x_2 = a\theta + l\varphi_2.$$

ここで揺れが小さいとして $\sin\theta \approx \theta$ などの近似をした。

振り子1に作用する重力の φ_1 方向への成分は $-mg\sin\varphi_1$ である。これを $-mg\varphi_1$ で近似する。これと垂直の向きの成分は糸の張力とつり合う。振り子2についても同様であり、したがってそれぞれのしたがう運動方程式は以下ようになる：

$$m(a\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi}_1) = -mg\varphi_1, \quad m(a\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi}_2) = -mg\varphi_2. \quad (85)$$

(2) 張力 T は変位の1次微小量の範囲でひもによらず等しく、振り子に作用する重力で与えられ、

$$T = mg$$

である。横棒が受ける横向き力は、天井のひもが棒の両端で作用する張力の水平成分 $-T\theta \times 2$ と、振り子のひもが棒の両端で作用する張力の水平成分 $T\varphi_1 + T\varphi_2$ である。横棒の質量は0であるからこれらの力はつり合い、次が成り立つ：

$$-2mg\theta + mg\varphi_1 + mg\varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \quad (86)$$

(3) $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ と θ の方程式を立てる。式(85)の2式の差から次が導かれる：

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi. \quad (87)$$

また、式(85)の2式の和から次が導かれる：

$$m(a+l)\ddot{\theta} = -mg\theta. \quad (88)$$

これらの運動方程式から φ と θ は基準座標であり、基準振動数はそれぞれ

$$\varphi: \omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad (\theta = 0 \text{ のとき } \varphi_1 = -\varphi_2)$$

$$\theta: \omega_1 = \sqrt{g/(a+l)} \quad (\varphi = 0 \text{ のとき } \varphi_1 = \varphi_2)$$

である。

(4) 図19で、(a)に基準座標 φ の振動を示す。横棒は動かず2つのおもりが逆向きに振れる。矢印は質点の変位の向きと大きさを表す。また、(b)に基準座標 θ の振動を示す。2つのおもりの変位がそろっていて、並んで振動する。 $\varphi_1 = \varphi_2$ であり、したがって $\theta = \varphi_1 = \varphi_2$ であるから、天井のひもとおもりのひもは同じ1本の直線上にあるように見える。

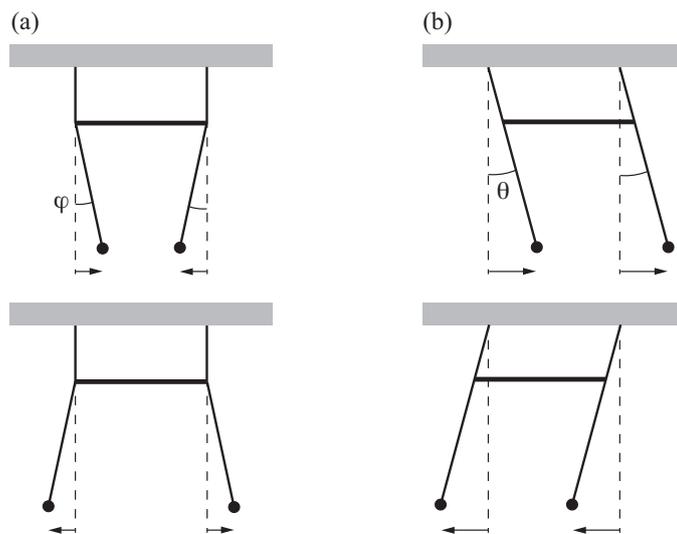


図19: 2つの振り子が逆位相で振動する基準振動(a)と同位相で振動する基準振動(b)。矢印は、それぞれのおもりの変位の向きと大きさを表す。

【解説】

2つの基準振動数を比較すると $\omega_0 > \omega_1$ である（逆位相のほうが同位相よりも角振動数が大き

い). この関係は次のように理解できる. 逆位相の基準振動では, 横棒が静止しているのだから, 棒から吊り下げられた2つの振り子はどちらも, 長さ l の単振り子と同じ角振動数で振動する. 一方, 同位相の基準振動では, 天井のひもとおもりのひもは同じ1本の直線上にあるので, その運動は長さ $a+l$ の単振り子と同じである. 振り子の長さが長いほど角振動数が小さいので, 同位相の基準振動のほうが角振動数は小さい, と理解できる.

第9章 加速している座標系

9.1-1

【解答例】

静止した座標系で見る. 電車が減速して停止するまで, 減速の加速度が一定であり, 停止までの時間が τ , 初めの速さが v_0 であるから, 加速度の大きさ α は

$$\alpha = \frac{v_0}{\tau} \quad (89)$$

である.

次に電車に固定した座標系で考える. この座標系は負の加速度で加速しているから, 前方に向かって見かけの力が作用する. おもりには鉛直下向きに大きさ mg の重力と, 水平前向きに大きさ $m\alpha$ の見かけの力が作用する. これを図20(a)に示す(この図には電車が減速を始めた時点でのおもりの位置を示している). この図に示すように, 重力と見かけの力の合力が鉛直線となす角を θ で表す. この状況は, この合力の方向に大きさ $mg' = m\sqrt{g^2 + \alpha^2}$ の「見かけの重力」がおもりに作用していると見なすことができる. なお, 図20(a)からもわかるように, 角度 θ は次の関係を満たす.

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{g}. \quad (90)$$

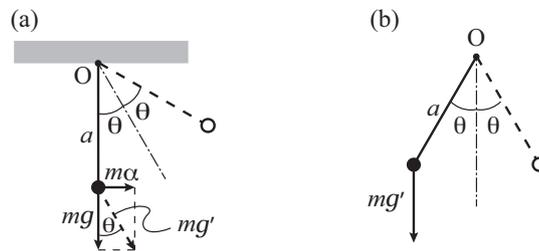


図20: (a) 電車の天井から吊り下げたおもり作用する力は重力(鉛直下向き, 大きさ mg)と慣性力(水平右向き, 大きさ $m\alpha$). 電車が減速を始めた直後の状況を示す. (b) 鉛直方向から振り子を角度 θ だけ傾けて, 静かに手を放す.

電車が減速を始めた時点では, おもりは電車に対して静止しているのだから, その後のおもりの運動を時計回りに角度 θ だけ回転させてながめると, 単振り子を鉛直線から角度 θ だけ傾けて静かに手を放したときのおもりの運動(図20(b))と同じに見える. 後者の場合, 振り子は鉛直線の反対側に θ だけ振れた後, 元の位置まで戻ってきて, 振動を繰り返す. したがって, おもりが天井に衝突しないと仮定すると, 電車の中の観測者から見て, おもりは, ひもと鉛直線のなす角度が 2θ に達した後, 元の位置(鉛直線上)に戻ってきて, 振動を繰り返す.

以上の考察により, 2θ が $\pi/2$ 以上($\tan \theta \geq 1$)ならば, おもりは天井に衝突するといえる. 式(90)より, この条件は $\alpha/g \geq 1$ と表される. さらに, α は式(89)で与えられるので, この条件は $\tau \leq v_0/g$ と書き換えられる. したがって, τ_c として次の結果を得る.

$$\tau_c = \frac{v_0}{g}.$$

【解説】

上記の解答例では, 問題の状況と等価な振り子の運動を考察することによって答を導いたが, 仕

事・エネルギーの定理を利用した，以下のような解法（教科書の略解）もある。

いま， τ が十分小さく，したがって α が大きく，進行前きの力が大きく，重力の働きに勝っておもりが天井に達したと仮定する． $\theta = 0$ から $\theta = \pi/2$ に至るまでに重力がおもりに対してなした仕事 W_1 は，

$$W_1 = -mga$$

である．その間に見かけの力がおもりに対してなした仕事 W_2 は

$$W_2 = m\alpha a$$

である．

仕事・エネルギーの定理により， $W_1 + W_2$ はおもりの運動エネルギーの増加になる．初めにおもりは静止していたから， $W_1 + W_2$ はおもりが天井に達したときの運動エネルギーである．したがって， $W_1 + W_2 \geq 0$ である．よって $\alpha - g \geq 0$ である．

$W_1 + W_2 = 0$ となるときの加速度 α の値を α_c と記すと $\alpha_c = g$ である．このときの τ の値を τ_c と記すと， $v_0/\tau_c = g$ である．もし $\tau > \tau_c$ であれば $\alpha < g \Rightarrow W_1 + W_2 < 0$ となり，仮定に反する．

これにより，電車が停車したときにちょうどおもりが天井に達することができる限界としての τ の値 τ_c が次のように求まった：

$$\tau_c = \frac{v_0}{g}.$$

電車が減速する前の速さを $v_0 = 80 \text{ km/h}$ と仮定して， τ_c の値を計算してみよう． v_0 を秒速で表すと 22.2 m/s となるから，重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とすると， $\tau_c = 2.3 \text{ s}$ である．時速 80 km の電車が 2 秒あまりで停車することは，通常ではあり得ないので，電車の急ブレーキによって，天井から吊り下げられた物体が天井に衝突することはあり得そうもない．

9.2-1

【解答例】

リングがその一つの直径を回転軸として回転できるようになっており，その回転軸が鉛直方向に向いているとしている．回転軸上の最下点を A とする．図 21 の直線 OA が固定された回転軸である．問題の設定のように，ビーズがリングに沿って動くことなく θ が一定のまま回転する場合を考える．ビーズの位置を B と記す．回転軸にビーズの位置 B から下ろした垂線の足を O' とする．設定から，B は O' を中心とする水平な円周を軌道として，角速度 ω の円運動をする．円運動の半径は $\overline{O'B} = a \sin \theta$ である．

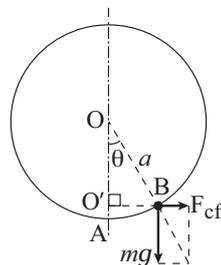


図 21: リングに固定した座標系では重力（大きさ mg ）のほかに遠心力（大きさ F_{cf} ）が作用する．

リングに固定した座標系で考える．ビーズは静止しており，鉛直下向きに重力（大きさ mg ）と $\overrightarrow{O'B}$ の向きに見かけの力（遠心力，大きさ F_{cf} ）が作用する．ビーズは質量が m ，回転軸からの距離が $a \sin \theta$ で，リングの角速度が ω だから，遠心力の大きさは $F_{cf} = m(a \sin \theta)\omega^2$ である．なめらかなリング上でビーズが静止するためには，重力と遠心力の合力がリングに垂直でなければならない．この条件は，図 21 からわかるように， $\tan \theta = F_{cf}/mg$ である．この式に $F_{cf} = m(a \sin \theta)\omega^2$ を代入して整理すると，次式が得られる．

$$\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}. \quad (91)$$

$|\cos \theta| \leq 1$ であることから、この方程式は $g > a\omega^2$ であるときには解を持たないが、 $g \leq a\omega^2$ であれば、つり合う場所がある。その場所に置かれたビーズが動き出すことはない。この境界となる角速度を ω_c で表すと、

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

である。そして、 $\omega \geq \omega_c$ であれば、リングが回転するときにビーズがリングに対して動かないでともに回転することができる。このとき、ビーズが静止する位置を表す角度 θ は式 (91) を満たすので、 θ は次式で与えられる。

$$\theta = \arccos \frac{g}{a\omega^2}.$$

この式で表される θ と ω の関係をグラフに描くと図 22 のようになる。 θ が θ_c よりもわずかに大きい場合には θ は小さくて、近似的に $\theta \approx 2\sqrt{(\omega - \omega_c)/\omega_c}$ と表される（テイラー展開を使って、この近似式を導けますか?）。また、 ω が大きくなると、 θ の値は $\pi/2 = 90^\circ$ に漸近する。

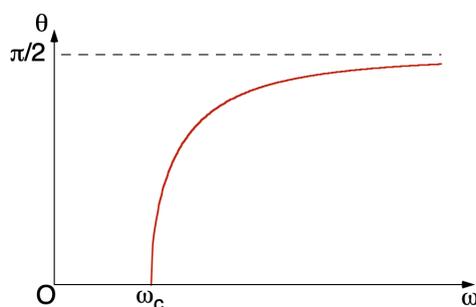


図 22: ビーズが静止する角度 θ とリングの回転角速度 ω の関係。

なお、 $\omega < \omega_c$ の時には、どんな角度 θ であっても重力が見かけの力に勝るから、ビーズはリングの最下点 A ($\theta = 0$) に落ちてしまう。

9.3-1

【解答例】

式 (9.18) の各関係式の両辺を時間 t で微分する。

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega t - x' \omega \sin \omega t - \dot{y}' \sin \omega t - y' \omega \cos \omega t, \quad (92)$$

$$\dot{y} = \dot{x}' \sin \omega t + x' \omega \cos \omega t + \dot{y}' \cos \omega t - y' \omega \sin \omega t, \quad (93)$$

$$\dot{z} = \dot{z}'. \quad (94)$$

それぞれの右辺を整理すると式 (9.36), (9.37), (9.38) の右辺であることが分かる。

式 (9.26) の右辺第 2 項 $\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ は、 $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'}$ であることに注意して、また \mathbf{r} に式 (9.21) の最右辺を代入して、そしてベクトル積の定義から得られる $\mathbf{e}_{z'} \times \mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_{y'}$ などの関係を用いて、次のように書き直せる：

$$\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{e}_{z'} \times (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) = \omega (-y' \mathbf{e}_{x'} + x' \mathbf{e}_{y'}).$$

式 (9.26) の右辺の第 1 項に式 (9.23) の定義式を用い第 2 項に上記を用いて、式 (9.26) は次のように書き直せる：

$$\mathbf{v} = (\dot{x}' - \omega y') \mathbf{e}_{x'} + (\dot{y}' + \omega x') \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'}.$$

この右辺を式 (9.20) を用いて $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ で表し、左辺を $\dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z$ と表した上で、 x, y, z 成分をとりだすとそれは式 (9.36), (9.37), (9.38) である。このように、式 (9.36), (9.37), (9.38) は、運動する質点の慣性系 S における速度 \mathbf{v} と運動系 S' における速度 \mathbf{v}' の関係をそれぞれの系における成

分を用いて求めたものであり、既にベクトル表記で導いた式 (9.26) と一致することが確認できた。

【解説】

上で、座標成分の時間微分によって求めた速度の座標成分の間の関係式 (92), (93), (94) が式 (9.26) を表していることは以下のようにしても確かめられる。これらの式をまとめなおすと、

$$\dot{x} = (\dot{x}' \cos \omega t - \dot{y}' \sin \omega t) - \omega(x' \sin \omega t + y' \cos \omega t) \quad \Rightarrow \quad v_x = v'_x - \omega y, \quad (95)$$

$$\dot{y} = (\dot{x}' \sin \omega t + \dot{y}' \cos \omega t) + \omega(x' \cos \omega t - y' \sin \omega t) \quad \Rightarrow \quad v_y = v'_y + \omega x, \quad (96)$$

$$\dot{z} = \dot{z}' \quad \Rightarrow \quad v_z = v'_z, \quad (97)$$

になる。ただし、ここで左辺において $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (v_x, v_y, v_z)$ を用い、右辺のはじめの括弧でまとめた項について $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = (v'_{x'}, v'_{y'}, v'_{z'})$ であることと

$$v'_x = v'_{x'} \cos \omega t - v'_{y'} \sin \omega t, \quad v'_y = v'_{x'} \sin \omega t + v'_{y'} \cos \omega t, \quad v'_z = v'_{z'}$$

という、式 (9.18) に相当する変換式を用いた。また、式 (95), (96) の右辺の 2 つ目の括弧でまとめた項については式 (9.18) を用いた。

導かれた式 (95), (96), (97) は式 (9.26) の x, y, z 座標成分である。

9.3-2

【解答例】

式 (9.36), (9.37), (9.38) の各関係式の両辺を時間 t で微分する。

$$\ddot{x} = (\ddot{x}' - \omega \dot{y}') \cos \omega t - (\dot{x}' - \omega y') \omega \sin \omega t - (\dot{y}' + \omega \dot{x}') \sin \omega t - (\dot{y}' + \omega \dot{x}') \omega \cos \omega t, \quad (98)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{x}' - \omega \dot{y}') \sin \omega t + (\dot{x}' - \omega y') \omega \cos \omega t + (\dot{y}' + \omega \dot{x}') \cos \omega t - (\dot{y}' + \omega \dot{x}') \omega \sin \omega t, \quad (99)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}'. \quad (100)$$

それぞれの右辺を整理すると式 (9.39), (9.40), (9.41) の右辺であることが分かる。

式 (9.31) の右辺第 2 項 $2\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}'$ は $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'}$ であることに注意して、また \mathbf{v}' に式 (9.23) の最右辺を代入して、そしてベクトル積の定義から得られる $\mathbf{e}_{z'} \times \mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_{y'}$ などの関係を用いて、次のように書き直せる：

$$2\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}' = 2\omega \mathbf{e}_{z'} \times (\dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'}) = 2\omega(-\dot{y}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{x}' \mathbf{e}_{y'}).$$

同様に右辺第 3 項 $\omega^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})$ は、 \mathbf{r} に式 (9.21) の最右辺を代入して、

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) &= \omega^2 \mathbf{e}_{z'} \times [\mathbf{e}_{z'} \times (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'})] \\ &= \omega^2 \mathbf{e}_{z'} \times (x' \mathbf{e}_{y'} - y' \mathbf{e}_{x'}) = -\omega^2 (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'}) \end{aligned}$$

となる。よって式 (9.31) は

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}' + 2\omega(-\dot{y}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{x}' \mathbf{e}_{y'}) - \omega^2 (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'}) \\ &= (\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x') \mathbf{e}_{x'} + (\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}' \mathbf{e}_{z'} \end{aligned}$$

となる。この右辺に式 (9.20) を用いて $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ で表し、左辺を $\ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z$ と表した上で、 x, y, z 成分をとりだすとそれは式 (9.39), (9.40), (9.41) である。このように、式 (9.39), (9.40), (9.41) は、運動する質点の慣性系 S における加速度 \mathbf{a} と運動系 S' における速度 \mathbf{a}' の関係をそれぞれの系における成分を用いて求めたものであり、既にベクトル表記で導いた式 (9.31) と一致することが確認できた。

【解説】

上で、座標成分の時間微分によって求めた速度の座標成分の間の関係式 (98), (99), (100) が式 (9.31) を表していることは以下のようにしても確かめられる。これらの式をまとめなおすと、

$$\ddot{x} = (\ddot{x}' \cos \omega t - \dot{y}' \sin \omega t) - 2\omega(\dot{x}' \sin \omega t + y' \cos \omega t) - \omega^2(x' \cos \omega t - y' \sin \omega t), \quad (101)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{x}' \sin \omega t + \dot{y}' \cos \omega t) + 2\omega(\dot{x}' \cos \omega t - y' \sin \omega t) - \omega^2(x' \sin \omega t + y' \cos \omega t), \quad (102)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}'. \quad (103)$$

になる。左辺において $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = (a_x, a_y, a_z)$ を使い、右辺の括弧でまとめた項について $(\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}') = (a'_{x'}, a'_{y'}, a'_{z'})$ および $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = (v'_{x'}, v'_{y'}, v'_{z'})$ であることと

$$a'_{x'} = a'_{x'} \cos \omega t - a'_{y'} \sin \omega t, \quad a'_{y'} = a'_{x'} \sin \omega t + a'_{y'} \cos \omega t, \quad a'_{z'} = a'_{z'}$$

$$v'_{x'} = v'_{x'} \cos \omega t - v'_{y'} \sin \omega t, \quad v'_{y'} = v'_{x'} \sin \omega t + v'_{y'} \cos \omega t, \quad v'_{z'} = v'_{z'}$$

のように式 (9.18) に相当する変換式を用い、右辺の 3 つ目の括弧でまとめた項について式 (9.18) を用いて、次を得る：

$$a_x = a'_{x'} - 2\omega v'_{y'} - \omega^2 x, \quad (104)$$

$$a_y = a'_{y'} + 2\omega v'_{x'} - \omega^2 y, \quad (105)$$

$$a_z = a'_{z'}. \quad (106)$$

導かれた式 (104), (105), (106) は式 (9.31) の x, y, z 座標成分である。

9.4-1

【解答例】

まず、教科書の図 9.16 に示す x', y' と $z' = z$ で定義される $x'y'z'$ 座標系で運動方程式を表す。その準備として、この座標系の基本単位ベクトル $e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}$ (図 23) を導入する。これらの基本ベクトルと xyz 座標系の基本ベクトルとの関係は、

$$e_x = e_{x'} \cos \phi - e_{y'} \sin \phi, \quad e_y = e_{x'} \sin \phi + e_{y'} \cos \phi, \quad e_z = e_{z'} \quad (107)$$

である。

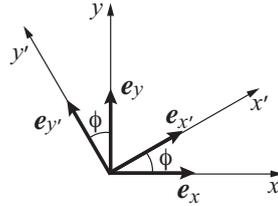


図 23: xyz 座標系と $x'y'z'$ 座標系における基本ベクトル。 z 軸と z' 軸は紙面に垂直で、紙面からこちら側を向く。

地球の自転軸方向を表す単位ベクトルを \mathbf{u} とすると、速度 \mathbf{v} で運動する質量 m の質点に作用するコリオリの力——教科書の式 (9.33) において $\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}$, $e_z \rightarrow \mathbf{u}$ と置き換える——は、

$$2m\omega \mathbf{v} \times \mathbf{u} = 2m\omega \begin{vmatrix} e_{x'} & e_{y'} & e_{z'} \\ v_{x'} & v_{y'} & v_{z'} \\ u_{x'} & u_{y'} & u_{z'} \end{vmatrix}$$

$$= 2m\omega [(v_{y'}u_{z'} - v_{z'}u_{y'})e_{x'} + (v_{z'}u_{x'} - v_{x'}u_{z'})e_{y'} + (v_{x'}u_{y'} - v_{y'}u_{x'})e_{z'}]$$

で与えられる。ここで、単位ベクトル \mathbf{u} の成分 $u_{x'}$, $u_{y'}$, $u_{z'}$ は教科書の式 (9.42) と上の式 (107) から次のように計算できる ($e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$ の係数が成分)。

$$\mathbf{u} = e_y \cos \alpha + e_z \sin \alpha = e_{x'} \sin \phi \cos \alpha + e_{y'} \cos \phi \cos \alpha + e_{z'} \sin \alpha. \quad (108)$$

また、質点に作用する重力は $-mge_{z'}$ なので、 $x'y'z'$ 座標系における、運動方程式 $m\dot{\mathbf{v}} = 2m\omega \mathbf{v} \times \mathbf{u} - mge_{z'}$ の成分は次のようになる。

$$m\dot{v}_{x'} = 2m\omega(v_{y'} \sin \alpha - v_{z'} \cos \phi \cos \alpha), \quad (109)$$

$$m\dot{v}_{y'} = 2m\omega(v_{z'} \sin \phi \cos \alpha - v_{x'} \sin \alpha), \quad (110)$$

$$m\dot{v}_{z'} = 2m\omega(v_{x'} \cos \phi - v_{y'} \sin \phi) \cos \alpha - mg. \quad (111)$$

これらの運動方程式を、 $t = 0$ のときに $v_{x'} = 0$, $v_{y'} = v_0 \cos \theta$, $v_{z'} = v_0 \sin \theta$ という初期条件の下で解きたい。例題 9.4-2 と同様に ω が小さい (正確には砲弾が着地するまでの時間において ωt が

小さい) という事実に基づく近似を用いる。まず, 式 (111) の右辺の最後の項に比べて他の項には ω が含まれているので後者を無視すると, $\dot{v}_{z'} \approx -g$ と近似できる。初期条件を考慮してこの式を積分を実行すると,

$$v_{z'} \approx v_0 \sin \theta - gt, \quad z' \approx v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2.$$

次に, 式 (110) の右辺は ω に比例するので, ゼロと近似すると, $\dot{v}_{y'} \approx 0$ 。初期条件を考慮してこの式を積分を実行すると,

$$v_{y'} \approx v_0 \cos \theta, \quad y' \approx v_0 t \cos \theta.$$

最後に, 式 (109) 右辺の $v_{y'}$ と $v_{z'}$ に上で得た結果を代入すると,

$$\dot{v}_{x'} \approx 2\omega v_0 (\sin \alpha \cos \theta - \cos \phi \cos \alpha \sin \theta) + 2\omega gt \cos \phi \cos \alpha$$

が得られる。初期条件を考慮して, この式を積分を実行すると,

$$v_{x'} \approx 2\omega v_0 t (\sin \alpha \cos \theta - \cos \phi \cos \alpha \sin \theta) + g\omega t^2 \cos \phi \cos \alpha, \\ x' \approx v_0 \omega t^2 (\sin \alpha \cos \theta - \cos \phi \cos \alpha \sin \theta) + \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \phi \cos \alpha.$$

【解説】

教科書の略解では, $v_0 = 0$ の場合や $\theta = \pi/2$ の場合についての言及がされているけれども, これらの状況では, y' 軸の方向に大砲を発射するという問題設定に合致しないので, ここでは除外する。また, このような状況 (自由落下や鉛直投げ上げ, 鉛直投げおろし) では角度 ϕ は定義できない (意味がない) ので, xyz 座標系を使って解くのが自然である。問題 9.4-3 と問題 9.4-4 でこのような状況を扱う。また, 略解には, $\theta = 0$ の場合には, z' の式に $-\omega v_0 t^2 \sin \phi \cos \alpha$ の項を加える, という説明があるけれども, $v_0 = 600 \text{ m/s}$ のときには $\omega v_0/g = 4.5 \times 10^{-3}$ なので, 有効数字 2 桁の計算では, この項は $-gt^2/2$ の項に比べて無視してもよい。

ちなみに, 北緯 30° の地点で, 大砲を真西 ($\phi = \pi/2$) に向けて, 仰角 30° で砲弾を速さ $v_0 = 600 \text{ m/s}$ で発射すると, 砲弾が着地する点は真西から北に 71 m だけずれる。これは真北に向けて発射した (例題 9.4-2 の) 場合の東方へのずれの 1.5 倍である。

9.4-2

【解答例】

この問題は, 例題 9.4-2 において, $\alpha = 35^\circ$, $\theta = 0$, $v_0 = 150 \text{ km/h} = 41.7 \text{ m/s}$ (150 m/s の有効数字は 2 桁なので途中の計算では 3 桁目まで残す) の場合に相当する。したがって, 式 (9.59) と式 (9.60) が適用できて, 前者より

$$y \approx v_0 t, \quad z \approx -\frac{1}{2}gt^2,$$

後者より

$$x \approx \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \alpha + v_0 \omega t^2 \sin \alpha \quad (\alpha = 35^\circ)$$

を得る。

いま, $y = 18.44 \text{ m}$ となる時刻を t_0 とすると,

$$t_0 = \frac{18.44 \text{ m/s}}{v_0} = \frac{18.44 \text{ m/s}}{41.7 \text{ m/s}} = 0.442 \text{ s}$$

である。 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, $\sin 35^\circ = 0.574$, $\cos 35^\circ = 0.819$ と教科書の式 (9.43) に与えられた $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ を使って, 時刻 t_0 における z と x の値を計算すると $z = -0.957 \text{ m}$, $x = 3.58 \times 10^{-4} \text{ m}$ となる。したがって, ボールはホームベースに達するまでに 96 cm だけ落下し, 0.36 mm だけ右にずれる。

【解説】

この例からわかるように, 日常的に目にするような運動においては, コリオリの力の影響は無視できるほど小さい。

9.4-3

【解答例】

この問題の状況は、例題 9.4-2 において、 $\alpha = 0, v_0 = 0$ の場合に相当する。式 (9.52)~(9.53) に $\alpha = 0$ を代入して、次の運動方程式を得る。

$$\dot{v}_x = -2\omega v_z \quad (112)$$

$$\dot{v}_y = 0 \quad (113)$$

$$\dot{v}_z = -g + 2\omega v_x \quad (114)$$

質点が落下を始める時刻を $t = 0$ とする。

まず、 $t = 0$ において $y = 0, v_y = 0$ だから、式 (113) より $t > 0$ でも $y = 0$ であることがわかる。したがって、質点の運動は xz 平面内で起きる。

次に、 $t = 0$ で $v_x = v_z = 0$ であるから、 t が小さいときには式 (114) の第 2 項は第 1 項に比べて小さい。そこで、 $\dot{v}_z \approx -g$ と近似して、これを積分して、

$$v_z \approx -gt. \quad (115)$$

さらに、 $t = 0$ で $z = h$ という初期条件を考慮して、この式を積分すると、

$$z \approx h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (116)$$

質点が地上に到達する時刻を t_0 とすると、この式より次の結果が得られる。

$$t_0 \approx \sqrt{2h/g}. \quad (117)$$

最後に、式 (115) を式 (112) に代入して、 $t = 0$ で $v_x = 0, x = 0$ を考慮して積分すると、

$$v_x \approx \omega gt^2, \quad x \approx \frac{1}{3}\omega gt^3 \quad (118)$$

が得られる。これより $x > 0$ なので、質点は落下を始めると東の方に移動していくことがわかる。この x の式の t に式 (117) の t_0 を代入すると、質点が地上に到達したときの東方へのずれ d が得られる。すなわち

$$d = \frac{2h}{3} \sqrt{\frac{2h\omega^2}{g}}$$

である。ここで、 $h = 634 \text{ m}$ 、 $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を代入して計算すると $d = 35 \text{ cm}$ が得られる。

【補足 1】

質点が落下するときの軌跡を求めてみよう。式 (116) と式 (118) の x の式から t を消去して整理すると、

$$z = h \left[1 - \left(\frac{x}{d} \right)^{2/3} \right] \quad (0 \leq x \leq d)$$

が得られる。これが軌跡を表す式であり、図示すると図 24 のようになる。この曲線はナイル (Neil) の放物線とよばれる。

【補足 2】

式 (114) の右辺第 2 項を無視した近似の妥当性について検討しよう。この近似によって得られた式 (118) の v_x を式 (114) の右辺第 2 項に代入すると、

$$\dot{v}_z \approx -g + 2\omega^2 gt^2 = -g[1 - 2(\omega t)^2]$$

となる。したがって、 $(\omega t)^2 \ll 1$ であれば式 (114) の右辺第 2 項を無視する近似が妥当だといえる。いま、 $t \leq t_0$ であるから、 $(\omega t_0)^2 \ll 1$ を示せばよい。この条件は、式 (117) より、次のように表すことができる。

$$h \ll \frac{g}{2\omega^2} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{2 \times (7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2} = 9.2 \times 10^8 \text{ m}.$$

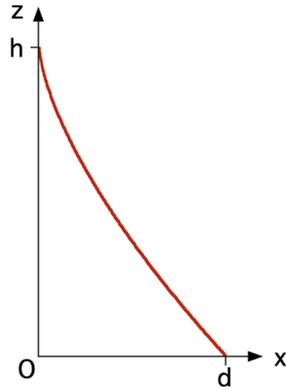


図 24: ナイルの放物線.

このようにして，地上数 100 m 程度の高さからの自由落下の問題では，式 (114) の右辺第 2 項を無視してもよいことがわかる．

【解説】

例題 9.4-2 の解法とは別に，次のように解答することもできる．赤道の円を含む平面は地球の回転軸（地軸）に垂直である．この平面内で考える．コリオリの力は地軸に垂直であること，重力の向きは面内にあること，から問題の質点の運動はこの平面内に限られる．

図 25 に示すように，塔が建っている地点での東向きを回転座標系の x 軸方向にとる．地軸を z 軸にとるとそれはこの赤道上の地点では北向きである．またこの地点での鉛直下向きが回転座標系の y 軸方向である．

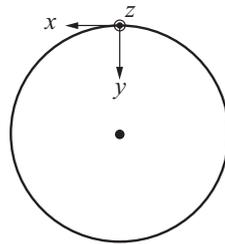


図 25: 赤道上的の地上に固定した座標系 xyz (地球を北極側から見た図)．

塔の頂上から落下を始めた質点は回転系で y 軸の正の向きの速度 v を持ち，加速する．したがって，コリオリの力 $\mathbf{F}_C = 2m\boldsymbol{\omega}v \times \mathbf{e}_z$ は， x 軸の正の向きである．つまり，コリオリの力は東向きに作用する．塔からの落下距離は短く，コリオリの力で速度が向きを変える程度は小さい．コリオリ力の向きを東向きとして，落下地点のずれを求める．

落下を始めた時刻を $t = 0$ として，その後の時刻 t における質点の y 方向への落下速度成分 v と y 座標は次で与えられる（塔の頂上は $y = -h$ の位置なので）：

$$v = gt \quad \Rightarrow \quad y = -h + \frac{1}{2}gt^2.$$

よって，コリオリの力の大きさ $F_C = 2m\omega v$ と， x 方向への速度成分 v_x と移動距離 x は次のように与えられる：

$$F_C = 2m\omega gt \quad \Rightarrow \quad m\dot{v}_x = 2m\omega gt \quad \Rightarrow \quad v_x = \omega gt^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\omega gt^3.$$

地上に達したとき $y = 0$ であるから，そのとき $t = \sqrt{2h/g}$ であり，このとき $x = d$ である．よって，

$$d = \frac{2h\omega}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

となる．

9.4-4

【解答例】

例題 9.4-2 において, $\theta = \pi/2$ の場合に相当するので, 式 (9.59) より

$$v_y \approx 0, \quad v_z \approx v_0 - gt \quad \Rightarrow \quad y \approx 0, \quad z \approx v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (119)$$

を得る. また, 式 (9.60) より

$$v_x \approx (gt^2 - 2v_0 t)\omega \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad x \approx \left(\frac{1}{3}gt^3 - v_0 t^2\right)\omega \cos \alpha \quad (120)$$

を得る.

質点が地上に落下する時刻を t_0 とすると, 式 (119) の z の式より,

$$t_0 \approx 2v_0/g \quad (121)$$

となるので, 落下地点の x 座標を x_0 とすると, 式 (120) より,

$$x_0 \approx -\frac{4\omega v_0^3}{3g^2} \cos \alpha$$

を得る. $\alpha = 0$, $v_0 = 100 \text{ m/s}$ の場合, これらの数値と $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を代入して計算すると, 次の結果が得られる.

$$x_0 \approx -1.01 \text{ m}.$$

したがって, 質点は, 投げ上げた地点より西寄りに 1.01 m の位置に落下する.

【補足 1】

地上から投げ上げた質点の軌跡を求めよう. 式 (119) より, 質点は高さ $h = v_0^2/2g$ まで達することがわかる. 式 (119) の z の式を h と t_0 を使って整理し, 式 (120) の x の式を x_0 と t_0 を使って整理すると, 次のようになる.

$$z \approx 4h \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \frac{t}{t_0}, \quad x \approx x_0 \left(3 - 2\frac{t}{t_0}\right) \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

これらの式は, t/t_0 を媒介変数 (パラメータ) として, z と x の関係 (すなわち, 質点の軌跡) を与える. この軌跡は図 26 のような曲線になる.

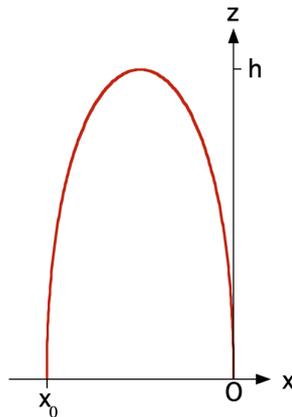


図 26: 鉛直に投げ上げた質点の軌跡.

【補足 2】

式 (119) の $v_y \approx 0$, $y \approx 0$ という近似について検討する. これらの近似式は, 教科書の式 (9.59) において, $\theta = \pi/2$ を代入して得たものである. そして, 式 (9.59) は運動方程式 (9.53), すなわち

$$m\dot{v}_y = -2m\omega v_x \sin \alpha$$

の右辺をゼロと近似して得られたものである. この式の右辺をゼロとせず, v_x に式 (120) の結果を代入するとどうなるだろうか. 代入して, 両辺を m でわると,

$$\dot{v}_y \approx 4\omega^2 (v_0 t - gt^2/2) \sin \alpha \cos \alpha$$

となる。初期条件を考慮して、この式を積分すると、

$$v_y \approx 2\omega^2 \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad y \approx 2\omega^2 \left(\frac{1}{3} v_0 t^3 - \frac{1}{12} g t^4 \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (122)$$

が得られる。これらの式の右辺は小さな量ではあるけれども、ゼロではない。第2式の t に式 (121) の t_0 を代入すると、落下地点の y 座標の値 y_0 が計算できて、

$$y_0 \approx \frac{8\omega^2 v_0^4}{3g^3} \sin \alpha \cos \alpha$$

となる。したがって、赤道では $y_0 = 0$ であり、北半球 ($\alpha > 0$) では $y_0 > 0$ 、南半球では $y_0 < 0$ である。北半球では落下地点は、西に $|x_0|$ だけずれるだけでなく、北にもわずかに y_0 だけずれる。 $|y_0|$ は $|x_0|$ の $(2\omega v_0/g)|\sin \alpha|$ 倍であり、 $v_0 = 100 \text{ m/s}$ の場合、 $2\omega v_0/g = 1.49 \times 10^{-3}$ となり、南北へのずれは西方へのずれの $1/1000$ 程度である。以上の考察により、 $y \approx 0$ という近似は妥当だといえそうだ。

【補足 3】

赤道上の高さ h の場所から質点を自由落下させた場合の質点の運動を問題 9.4-3 で扱った。赤道上ではなく、緯度 α の地点において、高さ h の場所から質点を自由落下させた場合の質点の運動は、式 (119) と式 (120) に $v_0 = 0$ を代入して得られる式によって記述できる。ただし、 z の式は $z \approx h - gt^2/2$ に修正される。また、 y 方向の運動について、近似の精度を上げて計算すると、式 (122) に $v_0 = 0$ を代入した式が得られる。よって、落下地点の座標は次式で与えられる。

$$x_0 \approx \frac{2h}{3} \sqrt{\frac{2h\omega^2}{g}} \cos \alpha, \quad y_0 \approx -\frac{2h}{3} \frac{h\omega^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha.$$

赤道上で運動に比べて、落下地点の東方へのずれは $\cos \alpha$ 倍となり、緯度が高いほど小さくなる。また、北半球では南側にわずかにずれて、南半球では北側にわずかにずれる。南北方向へのずれは、東方へのずれに比べて $\sqrt{h\omega^2/g}$ 倍ほどになる。 $h = 634 \text{ m}$ の場合、 $\sqrt{h\omega^2/g} = 5.9 \times 10^{-4}$ である。

9.5-1

【解答例】

この場合には慣性力が作用しないので、潮汐力は式 (9.65) の F で与えられる。この式の a/L は 1 に比べて十分に小さいので、この潮汐力は

$$F_{\text{td}} \approx F_0 \mathbf{u}, \quad F_0 = GmM_{\text{月}}/L^2$$

と近似できる。この力は地球上のどこでも月の方（ベクトル \mathbf{u} の方向）を向くので、月に近い地点で満潮、遠い地点で干潮になる。

【解説】

この仮想的な場合の、潮汐力と地球の重力の大きさの比は

$$\frac{F_{\text{td}}}{F_g} = \frac{F_0}{F_g} = \frac{GmM_{\text{月}}}{L^2} \frac{a^2}{GmM_{\text{地}}} = \frac{M_{\text{月}}}{M_{\text{地}}} \left(\frac{a}{L} \right)^2 \approx 3.38 \times 10^{-6}$$

で与えられる。これは、実際の潮汐力の場合——式 (9.67) ——の $L/a \approx 60$ 倍の値である。

また、例題 9.5-1 と同じようにして、この場合の海水面の形状を計算することができる。図 9.19 と同様に a, r, θ, ϕ を定義すると、式 (9.68) と同じ式が成り立ち、 ϕ と θ の関係として

$$\sin \phi = \frac{F_0}{F_g} \sin(\pi - \theta - \phi) \quad \Rightarrow \quad \phi \approx \frac{F_0}{F_g} \sin \theta \quad (\because F_0/F_g \ll 1)$$

を得る。この関係を式 (9.68) に代入して、 θ で積分すると、海面の形状を表す方程式

$$r \approx c + a \frac{F_0}{F_g} \cos \theta \quad (c \text{ は積分定数})$$

が得られる。これより、 $\theta = 0$ (月に近い側) で海水面が最も高く、 $\theta = \pi$ (月の反対側) で海水面が最も低くなることが確かめられる。干潮と満潮の潮位の差は $2aF_0/F_g \approx 43 \text{ m}$ となる。この値は本来の潮汐力による潮位差 (54 cm) の約 80 倍である。

9.5-2

【解答例】

地球と月だけが存在するとき、地表にある質量 m の物体に作用する潮汐力は教科書の式 (9.66) で与えられる。この場合の潮汐力を $F_{\text{td}}^{\text{月}}$ 、地球と月の間の距離を $L_{\text{月}}$ と書くと、この式は

$$F_{\text{td}}^{\text{月}} = \frac{aGmM_{\text{月}}}{L_{\text{月}}^3} \left(3\mathbf{u} \cos \theta - \frac{\mathbf{r}}{a} \right)$$

と表される。ここで、 a は地球の半径、 G は重力定数（万有引力定数）、 $M_{\text{月}}$ は月の質量、 \mathbf{u} は地球の中心から月の中心へ向く単位ベクトル、 \mathbf{r} は物体の位置ベクトル、 θ は \mathbf{r} と \mathbf{u} のなす角である。

地球と太陽だけが存在するときの潮汐力 $F_{\text{td}}^{\text{太}}$ は、上の式で「月」を「太陽」で置き換えた式で与えられる。すなわち、

$$F_{\text{td}}^{\text{太}} = \frac{aGmM_{\text{太}}}{L_{\text{太}}^3} \left(3\mathbf{u} \cos \theta - \frac{\mathbf{r}}{a} \right)$$

が成り立つ。ここで、 $M_{\text{太}}$ は太陽の質量、 $L_{\text{太}}$ は地球と太陽の間の距離、 \mathbf{u} は地球の中心から太陽の中心へ向く単位ベクトル、 \mathbf{r} は物体の位置ベクトル、 θ は \mathbf{r} と \mathbf{u} のなす角である。

二つの潮汐力の大きさ $F_{\text{td}}^{\text{太}}$ と $F_{\text{td}}^{\text{月}}$ を比べるのに、それぞれの力の大きさの最大値で比較すると、その比は

$$\frac{F_{\text{td}}^{\text{太}}}{F_{\text{td}}^{\text{月}}} = \frac{2aGmM_{\text{太}}}{L_{\text{太}}^3} \frac{L_{\text{月}}^3}{2aGmM_{\text{月}}} = \frac{M_{\text{太}}}{M_{\text{月}}} \left(\frac{L_{\text{月}}}{L_{\text{太}}} \right)^3$$

である。この式の、 $M_{\text{太}}$ 、 $M_{\text{月}}$ 、 $L_{\text{太}}$ 、 $L_{\text{月}}$ に問題文に与えられた数値を代入して計算すると

$$\frac{F_{\text{td}}^{\text{太}}}{F_{\text{td}}^{\text{月}}} = \frac{3.3 \times 10^5}{0.0123} \left(\frac{3.8 \times 10^5}{1.50 \times 10^8} \right)^3 \approx 0.44.$$

したがって、太陽による潮汐力の大きさは月による潮汐力の大きさの約半分である。