

『工科系の物理学基礎 I』問題の解答例/解答方針と解説

2020 年 8 月 28 日版

※解答には複数の答え方があってよい。ここに挙げた例はその一つである。解答例とともに、読者の学びのために解説などを記す。解説では、問題の背景や解答で用いた方法や考え方の補足説明と書き方について必要な注意を述べる。その他関連した事柄も含まれる。問題のねらい、として教科書の中でのその問題の位置づけを述べる。

※解答を作成する際に心がけるべきこと：解答として教科書の中で説明された基本事項については説明を省くことが許される場合がある。その場合でも、計算の理由と具体的な計算について省かずに記すこと。

第 1 章 運動の記述

1.2-1

【解答例】

まず軌道を求める。座標が時間の関数として与えられているので、時間 t を消去することができれば軌道が求まる。 x と y の式から、 $x^2 + y^2 = R^2$ を示すことができる。これは原点を中心とする半径 R の円である。また、 z は常に 0 であるから、軌道は xy 平面上にある。次に、運動の始点と向きを求める。 $t = 0$ とすると質点の y 座標と z 座標は 0 なので、 x 軸上にあり、 t が増えるに従い $y > 0$ の方向に動くことがわかる。位置座標の三角関数に現れる角速度 ω を用いて、運動の周期は $\frac{2\pi}{\omega}$ と表される。

これらをまとめて、質点は xy 平面上で、原点を中心とする半径 R の円周上を、 $z > 0$ の側から見て反時計回りに運動する。時刻 $t = 0$ には、 x 軸上の点 $(R, 0, 0)$ を通過し、時間 $2\pi/\omega$ で円周を一周する。

【解説】

問が「運動はどのようなものか」であるとき何を答えるべきか。1.2 節で学んだ範囲で分かったように、運動を表現することは位置座標を時間の関数として表すことである。逆に位置座標が時間の関数で与えられたときに、表現されている運動の特徴とは何か。以下に 1.2 節までで取り上げた運動の特徴をあげてみよう。

1. 全体像 軌道の図形
2. 動き 運動の向き

ここまででは運動の速さについては扱われていない。この問題のように繰り返す運動ならば、周期を答える。

【問題のねらいなど】

質点の運動の様子を記述する方法をここまでで学び、質点の座標を時間の関数として表現することを理解した。そこで、その逆に座標の記述から運動の特徴を把握できることを試している。

【補足】

1.2 節まででは速度について学んでいないので、通常の運動の样子の記述で使う「等速円運動」のような言い方は求められていない。

1.3-1

【解答例】

質点の位置が時間の関数として与えられるならば、速度はその関数の微分である。式 (1.10) によって位置を表す x, y, z が時間 t の関数として与えられているので、 x, y, z それぞれを t で微分すると、おのおのが質点の速度ベクトルの x 成分、 y 成分、 z 成分を与える。それぞれを v_x, v_y, v_z と記すと、微分を計算した結果得られる式をまとめて、 $v_x = a$, $v_y = 0$, $v_z = b(c - 2t)$, となる。

【解説】

運動が、位置を表す時間の関数として与えられているので、微分の計算をすること、そのことを整理して記述する。

【問題のねらい】

速度を間違いなく位置から求めること、そのことを説明できる力をつける。

1.3-2

【解答例】

質点の位置が時間の関数として与えられるならば、速度はその関数の微分である。位置を表す x, y が時間 t の関数として与えられているので、 x, y それぞれを t で微分すると、 $\dot{\theta} = \omega$ であるから、 $v_x = -a\omega \sin \theta$, $v_y = a\omega \cos \theta$ と求まる。

運動の軌道は図に示すように半径 a の円周である。各時刻 t での質点の位置の偏角、 $\omega t + \pi/4$, はそれぞれ $\pi/4, \pi/4 + \pi/4 = \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4$ である。速度 $\mathbf{v}$ と位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ が $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ となることが確かめられるので、速度ベクトルは半径方向と垂直、つまり円の接線方向を向く。

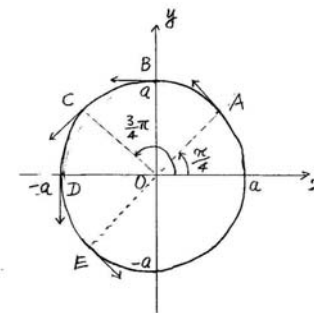


図 1: 円運動をする質点の軌跡と、指定された時刻の速度の方向。A～E は問題で指定された時刻の質点の位置を意味する。矢印は各位置における速度ベクトルの方向を示す。

【解説】

運動が、位置を表す時間の関数として与えられているので、微分の計算をすること、そのことを整理して記述する。

【問題のねらい】

速度を間違いなく位置から求めること、図示して説明できる力をつける。

1.3-3

【解答例】

点 P の動きに対する束縛条件によって点 P の座標を表す式を求める。角度 θ を媒介変数として用いる。点 P の座標 (x, y) を θ の関数として表し、 θ が時間の関数であるとする。したがって、位置座

標を時間で微分して得られる速度は合成関数の微分によって求められる。

質点の座標 (x, y) は点 Q の位置ベクトルとベクトル $\overrightarrow{QP}$ の和で与えられるので、 $\mathbf{A} = \overrightarrow{QP}$ とすると、 $x = R \cos \theta + A_x$ 、 $y = R \sin \theta + A_y$ である。線分 PQ の長さが弧 RQ の長さに等しく、弧 RQ の長さは $R\theta$ であることから、また、ベクトル $\overrightarrow{QP}$ の x 軸を基準にした偏角は $\theta - \frac{\pi}{2}$ であることから、 $\mathbf{A} = (R\theta \sin \theta, -R\theta \cos \theta)$ である。これらより、

$$x = R(\cos \theta + \theta \sin \theta), \quad y = R(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

である。これより、 v_x, v_y の計算はそれぞれ、

$$v_x = \dot{x} = R(-\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \sin \theta + \theta \dot{\theta} \cos \theta) = R\theta \dot{\theta} \cos \theta, \\ v_y = \dot{y} = R(\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \cos \theta + \theta \dot{\theta} \sin \theta) = R\theta \dot{\theta} \sin \theta,$$

のようにできる。題意は、内積 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ がゼロであることを示すことであるので、上記の (x, y) と (v_x, v_y) の表式を用いて計算してみると

$$v_x A_x + v_y A_y = 0$$

が確かめられ、 $\mathbf{v}$ と $\mathbf{A}$ は互いに垂直である。すなわち、 $\mathbf{v}$ は QP に垂直である。

【解説】

束縛条件が与えられていること、点 P の座標は時間の関数としては与えられていないこと、がポイントである。束縛条件を利用するときには、条件を式で表すとよい。質点の位置座標が時間の関数として分かっていなくても、媒介変数を用いればその時間依存性を仮定することにより速度を求めることができる。条件式を使うことができる。それにより題意にいう速度が満たす関係式を証明することができる。今の場合はベクトル $\overrightarrow{QP}$ の大きさと向きが図より読み取れるので、それを利用するとよい。このとき、点 Q を通り、それぞれ x 軸と y 軸に平行な 2 本の補助線が役に立つ。ちなみに、ここに現れた点 P の描く図形はインボリュート曲線とよばれていて、工学において有用である。他にも束縛条件の下での運動を考える問題を解いてみるとよい。

【問題のねらい】

束縛条件が与えられたときの 2 次元あるいは 3 次元空間の運動を時間やその代わりの媒介変数によって式で表す力をつける。それによって速度を求めることもできるし、運動の特徴を表す関係式を導くこともできることを理解する。

【補足】

ある曲線上を運動する質点の速度について、その向きは曲線上で質点の位置における接線の向きである。この問題は、問題文で定義された曲線の接線についての幾何学上の性質を尋ねているものである。

1.5-1

【解答例】

直線上を等速で運動する質点について、その速度の直交座標系 (x, y) での成分 v_x, v_y は x, y には依存しない定数として容易に書き下せる。すると式 (1.46) により速度の極座標成分 v_r, v_ϕ はそれら定数と平面極座標の φ で表される。一方で、それら v_r, v_ϕ は式 (1.49) によって極座標 r, φ と極座標の微分 $\dot{r}, \dot{\varphi}$ で表すことができる。これらを $\dot{r}, \dot{\varphi}$ に対する方程式として解けば答が得られるが、注意することは φ の関数として表わさなければならないことで、 r を消去するために軌道を条件として用いる必要がある。

まず、速度の直交座標成分は、

$$v_x = -V, \quad v_y = 0$$

である。これらを式 (1.46) に代入すると

$$v_r = -V \cos \varphi, \quad v_\phi = V \sin \varphi. \quad (1)$$

さらに、式 (1.49) は

$$\dot{r} = v_r, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_\phi}{r}$$

と書ける。ここに式 (1) を代入する。ただし、最後の式に含まれる r を φ を用いて表すために、粒子の y 座標がつねに a であることを利用する。つまり、

$$y = r \sin \varphi = a \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\sin \varphi}.$$

こうして次の結果を得る。

$$\dot{r} = -V \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{V}{a} \sin^2 \varphi.$$

【解説】

等速直線運動を表すには、直交座標系 (x, y) が便利である。しかし、もし平面極座標系での記述が必要な場合には、本文で述べた変換規則が役に立つ。ここでは、速度の極座標成分 v_r, v_ϕ は式 (1.44) で定義され、それらは式 (1.46) によって v_x, v_y で表される。

例えば、極座標系で座標の時間変化率は直交座標系 (x, y) の場合と異なり、一定ではなく極値をとることがわかる。実際、 $\varphi = \pi/2$ のとき（粒子が y 軸を通過するとき）に、 $|r|$ が最小 ($\dot{r} = 0$) になり、 $\dot{\varphi}$ が最大 ($\dot{\varphi} = V/a$) になる。

【問題のねらい】

座標、速度などについて、異なる座標系での記述の間の変換規則を応用することができるようにする。

第 2 章 運動方程式

2.2-1

【解答例】

質点の位置座標が時間の関数として与えられているので、時間微分によって速度を時間の関数として計算でき、さらに時間微分によって加速度の式が求められ、これによって、与えられた質量を用いて力を求めることができる。この計算を行うと、加速度は、 $0 < t < t_1$ と $t_1 < t$ のそれぞれの時間帯でそれぞれ $\ddot{x} = a$ 、 $\ddot{x} = b$ である。これらと質量の積により、質点に働いている力はそれぞれ、 ma 、 mb と求まる。数値を代入して $0 < t < 1\text{s}$ では $5 \times 10^{-2}\text{N}$ 、 $1\text{s} < t$ では $1.0 \times 10^{-1}\text{N}$ である。

位置座標 $x(t)$ 、速度 $v(t)$ 、力 $F(t)$ のグラフは以下の図のように描ける。

この運動で速度が時刻 $t = t_1$ で不連続であることは不自然である。このように観測されているならば、理由として直前まで動いていた質点の速度を 0 にさせてしまう力が作用したこと、短時間なので位置はほとんど変わらなかったこと、が考えられる。非常に短い時間だけ作用した大きな力があり、その力積は x 軸の向きに $-m(b-a)$ と推定される。設問の数値の場合には、その大きさは $5 \times 10^{-2}\text{N s}$ である。

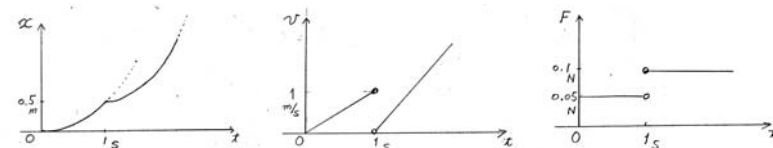


図 2: 問題 2.2-1 の質点の位置座標、速度、働く力

【解説】

本節 (第 2 章 2.2 節) で学ぶことの基本が、時間の関数として与えられた運動する質点の位置から力を求めることである。これを知識として、そのまま使って問題の要求に答える能力は基本である。求まった時間の関数をグラフにすることも同様に必須事項といえる。

ところで、与えられた位置座標の時間変化のデータあるいは数式に意外なことや不自然なことが含まれていないとも限らない。データなどの誤りを疑う場合もあろう。この問いでは不連続という不自然さを例にしてそれを示している。

解答例に述べている撃力の作用する例として、第5章で扱う2つの質点が衝突する場合がある。時刻 $t = t_1$ で問題の質点Aがほかの質点Bと衝突するとして、もしAとBが同じ質量をもち、衝突前にBが静止していたならば、衝突の瞬間にAに作用する撃力はAの速度を瞬間的に0に変える。

2.2-2

【解答例】

(1) 図に示すように、斜面から受ける垂直抗力の大きさを R とする。題意から、質点の鉛直方向の運動は起こらないから、垂直抗力を水平方向成分と鉛直方向成分とに分けたうちの鉛直上向き成分は重力とつり合い、 $mg = R \sin \theta$ が成り立つ。水平方向成分 $F = R \cos \theta$ は題意から、円運動を起こしている求心力である

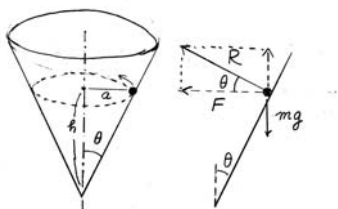


図 3: 問題 2.2-2 の運動のようすと、質点に働く力

(2) 求心力と円運動の角速度 ω の間に $F = -m\omega^2 a$ が成り立つ。前の小問で求めた関係を使うと、 $\omega = \sqrt{g/a \tan \theta}$ と求まる。

(3) 与えられた a と h の関係を用いて、 $\omega = \sqrt{g/h} / \tan \theta$ と書ける。この式から、回転運動の面が徐々に下がって h が減少すると、回転の角速度は h の平方根に反比例して増大することが分かる。

問いの趣旨は、向心力（求心力）を用いて考えることにあるので、小問 (1) で示した向心力 F の式に注目する。 R は重力と面の傾き角 θ のみで定まり、半径 a には依らない。したがって F も同様であり、高さが減っても半径が減っても求心力は変わらないといえる。つまり、小問 (2) の F の表式から $\omega^2 a$ が一定である。

まとめると、回転する水平面の高さ h が減少して回転の半径が減ったとき、向心力が共通であるので回転の角速度は円運動の半径の $1/2$ 乗に反比例する。

【解説】

等速円運動をする質点に働く力について、本節ではニュートンの運動法則から導かれることを示し、第二法則の例として理解されるように書かれているが、結果は円の半径と回転の角速度を用いた公式のように得られている。これが与えられたので、応用することによって公式としての親しみを増すことも期待されている。なぜ力が（言い換えれば加速度が）角速度の2乗に比例するかを思いながら公式として記憶することができれば役に立つであろう。この節で学んだことに沿っていえば、それは加速度が時間での2階微分によって求められるから、である。

もう一つ、この問題設定の目的は等速円運動の加速度（つまり質点に働く力）の向きについて、慣れることも想定している。力が軌道の存在する平面の中にある円を中心を向いていることを単なる知識ではなく、斜面で質点に働く力のつり合いや合成を考えると、思い出し役に立てることが大事である。

2.3-1

【解答例】

ニュートンの運動方程式に基づいて、地表付近の重力により物体が一定加速度の運動をするとその軌道は放物線になることを学んだ。題意は、その軌道を一般に式 (2.30) として求めたうえで、初期条件に合わせて定数を選んで軌道の方程式を求め、図 2.11 に定義された飛距離を計算することである。

図 2.11 のように x 軸と y 軸を設定すると、選手の軌跡は、例題 2.3-1 の場合と同じ式で与えられる。すなわち、

$$y = -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

この右辺をまとめなおすと、曲線が原点 $(0, 0)$ を通ることを顕に示す方程式、

$$y = -\frac{gx}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right). \quad (2)$$

が得られる。一方、斜面の方程式は

$$y = -x \tan \alpha \quad (3)$$

で与えられるから、斜面と軌跡との交点の x 座標は、

$$-\frac{gx}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right) = -x \tan \alpha$$

を満たす。選手が着地する地点の x 座標は、この方程式の $x \neq 0$ の解である。すなわち、

$$x - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{2(v_0 \cos \theta)^2}{g} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow x = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos \theta}{g \cos \alpha}$$

と計算できる。また、着地点の y 座標は、この x を式 (3) に代入して計算できる。したがって、飛距離 ℓ は

$$\ell = \sqrt{x^2 + y^2} = x \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos \theta}{g \cos^2 \alpha}$$

となる。この式で θ に依存する部分は

$$2 \cos \theta \sin(\theta + \alpha) = 2 \cos \theta (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) = \sin 2\theta \cos \alpha + (\cos 2\theta + 1) \sin \alpha$$

$$= \sin(2\theta + \alpha) + \sin \alpha$$

と書き換えることができるので、 $2\theta + \alpha = \pi/2$ のとき、すなわち

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

のときに ℓ が最大になることが分かる。

【解説】

投射体の水平到達距離を求める計算はよく知られていて、この教科書でも例題 2.3-1 で取り上げた。その類題として投射点から水平方向の距離ではなく、着地面が傾いているという一段階応用の程度を上げた問題である。軌道との交点を求める手続きは同じであり、解くべき方程式が少し変わる。結果の表式で $\alpha = 0$ と置いてみると、お手本にした問題の答に帰着することがわかり、どのように複雑化されたかを考察することもできる。

【問題のねらい】

例題 2.3-1 は高校生の時に解いて答を知っているから少し違う問題で力を試してみたいという人にはこの問題は役に立つ。このように、解き方を知っている問題と細部で少し違うような問題を解くことは、知っている解答を再現しながら新しい部分を付け加えて解答を作ることの練習になる。一般に、込み入った題意の問題を解く場合に、単純化した設定の問題を先に一度解いておくことは有効である。計算などの負担を軽くし、見通しをよくして、間違いの可能性を減らしたうえで解答を作り、それに追加する形で本来の問題の解答を作っていくと、楽に解けるものである。

【教訓】

問題のページの脚注最後の問に答えることは簡単ではない。しかし、答えようとしてそれぞれに考えることがあれば、それは今後の役に立つ。一つの例を書いておく。

例題 2.3-1 では、軌道の方程式を使って投げ上げ角度 α が 45° の時に最大飛距離が出ることが示された。これをもっと簡単に説明してみる。飛距離は水平速度と滞空時間の積である。したがって速度の水平方向成分が $v \cos \theta$ 、また滞空時間が初期速度の鉛直方向成分を使うと $2v \sin \theta / g$ と表せることにより、飛距離は $\cos \theta \sin \theta$ に比例することがいえる。この量が最大になる条件は $\theta = \pi/4$ である。本問でも同じように考えられないだろうか。しかし残念ながら、落下点の高さが飛距離とともに下がっていくので、滞空時間の計算が簡単ではない。上記の、軌道の方程式から求める方法が能率の点から見て最適であるようだ。

2.4-1

【解答例】

ばね定数は重力とばねの力のつり合い条件を使って求められる。物体の質量を m 、ばねのばね定数を k としておき、ばねにおもりを吊したときのばねの伸びを ℓ とすると、 $k = mg/\ell$ が成り立つ。

例題 2.4-1 のようにばねを水平に置いて物体を接触させ、最初に手でばねを a だけ縮めたあとで静かに手を放すとき、ばねが物体を押し出し、物体がばねから離れた後の速さ v は例題に説明したような計算により、 $v = a\sqrt{k/m}$ と求まる。この k に、上記で得られた表式を代入すると、速さは

$$v = a\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

で与えられる。この式に、 $a = 3.0 \text{ cm}$ 、 $g = 980 \text{ cm/s}^2$ 、 $\ell = 2.0 \text{ cm}$ を代入して計算すると、 $v = 66 \text{ cm/s}$ を得る。

【解説】

例題 2.4-1 では、ばね定数と物体の質量が与えられているとして運動を予測した。題意は、経験的にばね定数を知って例題のような運動について物体がばねから離れるときの速さを数値で求めることである。

例題は、ばねと物体が固定されていない投げ出し運動の設定なので、単に運動方程式を解くだけではなく力と加速の法則を用いて考えることを要求している。例題について示された解に従っていけばよいが、なぜ自然長の位置で物体がばねから離れるのかについては、以下のようにするとよい。

ばねと物体の間に働く力を考えてみよう。ばねが自然長よりも短い状態では、先端が止まっていようが動いていようが、自然長に戻る方向に力を及ぼす。この力によって物体はばねに押されてさらに加速される。つまり、ばねが自然長より短いときには、ばねと物体は押し合っていて離れることがない。自然長を超すとばねは縮もうとするのに対して、物体には力が作用しなくなってそのまま一定の速度で進もうとするので、ばねと物体は離れる。

【問題のねらい】

ばねを使って何らかの行動をとる場合、例えば物体を接触させて押し縮め、反発力で放出するとき、ばね定数が与えられているとは限らない。どうすれば求まるか。この問題はその答えを示唆している。複数の違った知識を組み合わせることで問題を解決する力をつけること。

2.6-1

【解答例】

張力を T とおき、運動方程式をたて、例題の結果を代入できるようにする。質点に対する拘束条件から、質点に作用する力の x 成分は $F_x = -T \cos \theta$ で与えられるので、運動方程式の x 成分は、

$$-T \cos \theta = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{m\ddot{x}}{\cos \theta} \quad (4)$$

となる。 $\ddot{x}$ を求めるために例題 2.6-1 の途中の式を利用すると、 $\dot{x} = -\ell\dot{\theta} \sin \theta$ であり、 $\ell\dot{\theta} = v_0$ であるから、

$$\dot{x} = -v_0 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -v_0 \dot{\theta} \cos \theta$$

を得る。これを式 (4) に代入すると $T = mv_0 \dot{\theta}$ となる。ここで、再度 $\ell\dot{\theta} = v_0$ を用いて、

$$T = \frac{mv_0^2}{\ell}$$

が得られる。この式の ℓ に式 (2.53) を代入すると式 (2.54) になる。

【解説】

運動が与えられると運動方程式から力が求まる。例題 2.6-1 では運動方程式を使わずに運動の特徴を式で表すことが課題であった。本問の題意はその結果を利用して、糸の張力を運動方程式によって求めることにある。

【問題のねらい】

例題でとりあげられた運動について、教科書の記述としては完結していない。学習者が、運動方程式を使って力を求めることにより補完することになる。その双方を併せて、拘束条件のもとでの運動についてその記述の方法と運動方程式が意味することを学ぶ。拘束条件の用い方に慣れることも本問のねらいである。

第 3 章 仕事とエネルギー

3.2-1

【解答例】

重力は質点の位置に依存し、速度やほかの変数には依存しないので、定義式 (3.7) に従って重力の表式からポテンシャルエネルギーの表式を求めることができる。題意により $x_* = 0$ である。右辺を本問で与えられた式に置き換えて計算すると、

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x F(x') dx' = \int_0^x \frac{mgR^2}{(R+x')^2} dx' = \left[-\frac{mgR^2}{R+x'} \right]_0^x \\ &= mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+x} \right) = \frac{mgRx}{R+x}. \end{aligned}$$

【解説】

ポテンシャルエネルギーを学んだ。最も身近に感じられる力の一つである重力についてポテンシャルエネルギーを知ることが重要である。積分の計算は容易であるが、重力のポテンシャルは基本的に重要である。

【問題のねらい】

力とポテンシャルの関係について間違いなく理解できること。力の向きと符号について注意深くすることと同じように、ポテンシャルの符号とその増加する方向（ポテンシャルの勾配のことである）について注意する感覚が育つこと。

3.3-1

【解答例】

最初の位置が高さ h であると分かっているとき、重力のポテンシャルエネルギーは mgh である。これと、最後の位置が未知数であるときのバネと重力のポテンシャルエネルギーとを使って、エネルギー保存則を方程式として解く。

バネの最大の縮みを ℓ とする。落下し始めるときと、バネが最も縮むときには質点の速度はゼロなので、エネルギー保存則より、

$$mgh = \frac{1}{2}k\ell^2 - mg\ell$$

が成り立つ。これを ℓ について解くと、

$$\ell = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

となる。 $\ell > 0$ でなければならないので、複号のうち + を採用する。 よって、

$$\ell = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}} \right).$$

【解説】

最も身近にあって重力とともにポピュラーな保存力がバネの力である。本問はこの両方が絡む問題である。質点の運動を、運動方程式ではじめから終わりまで追いかけるとしたら、途中で力が交代するので手続は面倒である。この解答例のように、ポテンシャルエネルギーの形にして方程式を立てると方程式も簡単になり、容易に解けることがわかる。力のポテンシャルが位置エネルギーの役割を果たしており、高校時代からこの考え方に慣れている人にはなじみの問題であろう。

【問題のねらい】

力学的エネルギー保存則を用いると容易に解ける問題があることを知り、解く際の基本的な考え方に慣れること。保存則の利用は、物理学において極めて有用で重要性も高い。

3.3-2

【解答例】

鉛直上向きに x 軸をとり、地表を座標原点に選ぶ。地球の重力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は問題 3.2-1 から、 $U(x) = mgRx/(R+x)$ である。エネルギー保存則より、 $\frac{1}{2}v_0^2 + U(0) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ が成り立つ。この式に $U(x)$ の表式を代入して整理すると、次が得られる：

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{2gRx}{R+x}. \quad (5)$$

(a) 式 (5) の右辺は x の単調減少関数であり、 $x \rightarrow \infty$ のとき $v_0^2 - 2gR$ に収束する。したがって $v_0^2 > 2gR$ であれば常に $\dot{x}^2 > 0$ が成り立ち、 $\dot{x} > 0$ は時間とともに減少するけれどもゼロになることはなく、物体は無限遠まで飛び去る。 よって、

$$v_c = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times (9.80 \text{ m/s}^2) \times (6.37 \times 10^6 \text{ m/s})} = 11.2 \text{ km/s}.$$

(b) 物体が到達する最高点 $x = h$ において $\dot{x} = 0$ だから、式 (5) より、

$$v_0^2 = \frac{2gRh}{R+h} \Rightarrow h = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}. \quad (6)$$

(c) 式 (6) を使って式 (5) 右辺の v_0 を h で表して整理すると、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gR^2(h-x)}{(R+h)(R+x)}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} \frac{dx}{dt}$$

となる。この式の両辺を $t = 0$ から $t = T$ まで積分すると、

$$\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}} T = \int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} dx. \quad (7)$$

この積分を実行するために $y = \sqrt{\frac{h-x}{R+x}}$ と置換すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R+h}{2(R+x)^2} \sqrt{\frac{R+x}{h-x}}, \quad R+x = \frac{R+h}{1+y^2}$$

となる。したがって、式 (7) の右辺は

$$\int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} dx = 2(R+h) \int_0^{\sqrt{h/R}} \frac{dy}{(1+y^2)^2}$$

と書き換えられる。さらに、この式の右辺の積分は、部分積分を利用して、

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(1+y^2)^2} &= \int \left[\frac{1}{1+y^2} - \frac{y^2}{(1+y^2)^2} \right] dy = \arctan y - \left\{ -y \cdot \frac{1}{2(1+y^2)} + \int \frac{dy}{2(1+y^2)} \right\} \\ &= \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \end{aligned}$$

と実行できる。よって、式 (7) の右辺は

$$\int_0^h \sqrt{\frac{R+x}{h-x}} dx = 2(R+h) \left[\frac{\sqrt{Rh}}{2(R+h)} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{\frac{h}{R}} \right]$$

となる。したがって、式 (7) より次の結果を得る。

$$T = \sqrt{\frac{R+h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R}} + \left(1 + \frac{h}{R} \right) \arctan \sqrt{\frac{h}{R}} \right]. \quad (8)$$

(d) 式 (6) の第一式と式 (8) に $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, $R = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ と $h = 400 \text{ km}$ を代入すると、 $v_0 = 2.7 \text{ km/s}$ と $T = 300.6 \text{ s} = 5 \text{ min}$ が得られる。また、 $h = 3.58 \times 10^4 \text{ km}$ の場合には、 $v_0 = 10.3 \text{ km/s}$, $T = 1.485 \times 10^4 \text{ s} = 4.1 \text{ h}$ が得られる。

3.6-1

【解答例】

本文の図 3.11 に示されているように、問題にしている球形の物体を薄い球殻の集まりとみなす。物体による重力ポテンシャルは、それぞれの球殻による重力のポテンシャルの表式を求めてその和をとればよい。

いま注目する球殻を、半径 a の球面と半径 $a + da$ の球面に挟まれた領域とする。この体積は $4\pi a^2 da$ であり、その質量を $M_{\text{shell}}(a, da)$ と記すと $M_{\text{shell}}(a, da) = 4\pi a^2 \rho(a) da$ である。球殻の外部の点にある質点に対するこの球殻の質量による重力のポテンシャルは、球殻上で質量が一樣に分布していることから、球殻の質量が中心に集中しているとした場合の重力のポテンシャルで与えられる。このことは文中の式 (3.43) の導出と同様にして示すことができる。球の中心と質量 m の質点の距離を r とし、このポテンシャルを $U_{\text{shell}}(r : a, da)$ と記し、式 (3.43) の表式を利用すると、 $U_{\text{shell}}(r : a, da) = -GM_{\text{shell}}(a, da)m/r$ で表される。

求める球状の物体によるポテンシャル $U(r)$ は、質点の位置がどの球殻についてもその外側にあることから、単にすべての球殻についてポテンシャルの和によって以下のように求められる。

$$U(r) = (U_{\text{shell}}(r : a, da) \text{ の総和}) = - \int_0^R \frac{G \times (4\pi a^2 \rho(a) da) m}{r}$$

この a についての積分を実行して、 $M = \int_0^R \rho(a) \times 4\pi a^2 da$ より、 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ であることが示された。

【解説】

本文の 3.6 節では、式 (3.41) が成り立つ条件として質量が一樣に分布していることを用いたが、実は、質量分布が球対称でありさえすればよい。本問には、このことに注意を向ける意味がある。

また、保存力が与えられるとそのポテンシャルが定義され、その表式を求めることができるが、力の起源が複数の場合それらの和をとることは、一般にはベクトルである力そのものの和としては困難である。そのような場合でもポテンシャルはスカラー量であるために和を容易に求められる。この問題ではそのことが実感できるであろう。

3.6-2

【解答例】

重力加速度は、重力による質点の運動の加速度であり、力が質点の質量と加速度の積であることから重力の大きさから求めることができる。地上における重力の大きさ F は、地球の質量を M 、質点の質量を m 、重力定数を G 、地球の中心から地表までの距離を R とすると、 $F = GMm/R^2$ である。よって重力加速度は $g = GM/R^2$ となる。与えられた数値を代入して計算すると、 $g = 9.82 \text{ m/s}^2$ 。

3.6-3

【解答例】

トンネル中を運動する質量 m の質点に作用する地球の重力は式 (3.42) に与えられる。これにより運動方程式を立て、解いて運動を求める。

地球の中心を原点とし、トンネルに沿って中心から入り口に向かって x 軸をとる。地球の半径を R とする。質点の位置を x とすると、質点と地球の中心の距離は $r = |x|$ である。質点に作用する x 方向の力 F は、式 (3.42) の $r < R$ の場合を適用して、

$$F = -\frac{GMm}{R^3}x$$

と表される。ここで力の向きは質点の位置から原点に向かうことから、 F の符号は x の符号と逆になることに注意する。これより、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{R^3}x, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

ただし、 $\omega = \omega^2 = GM/R^3$ で定義した。この方程式に従う運動は単振動であり、入り口から出口までを振幅の小さい単振子のように往復運動する。その周期は $T = 2\pi/\omega$ である。

計算のため数値をとりやすい重力加速度 g を $g = GM/R^2$ を用いて周期の式の中に代入すると $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ が得られる。 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を代入して、求める所要時間は周期の半分であることから、約 42 分。

3.6-4

【解答例】

(a) 等速円運動をする人工衛星の質量を m 、円運動の半径を r 、速さを v_0 とすると、この加速度は v_0^2/r である。これの地球の中心からの距離が r であることから、本節で示されたことにより重力の大きさは GMm/r^2 である。よって、運動方程式は

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_0^2}{r}$$

となる。また、 $r = R + h$ が与えられているので、これより

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

が得られる。

(b) 円運動の速さが v_0 で半径が r のとき周期は一周に要する時間として求め、 $T = 2\pi r/v_0$ である。 $r = R + h$ と前の小問の式から、

$$T = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

である。問題 3.6-2 で与えられた R, M, G の数値とここで与えられた h を用いて 92 min と求まる。

(c) 静止衛星の高度を H 、地球の自転周期を T 、地球の半径を R とすると、前の小問の式の高度 h に H を用いて、 $R + H = (T\sqrt{GM}/2\pi)^{2/3}$ である。したがって

$$H = (GM)^{1/3} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} - R$$

となる。与えられた T と問題 3.6-2 の R, M, G の値を用いて $H = 3.579 \times 10^4 \text{ km}$ と求まる。

3.7-1

【解答例】

ひもの回転角を φ とすると、おもりの速さは $\ell\dot{\varphi}$ であるから、エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\varphi})^2 + mg\ell(1 - \cos\varphi)$$

と表される。初期条件 ($\varphi = 0$ のとき $\ell\dot{\varphi} = v_0$) より $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ である。したがって、エネルギー保存則より

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{\ell} \left(\frac{v_0^2}{g\ell} + 2\cos\varphi - 2 \right). \quad (9)$$

また、ひもの張力を T とすると、半径方向の運動方程式は

$$m\ell\dot{\varphi}^2 = T - mg\cos\varphi$$

と表される。これら二つの式から $\dot{\varphi}$ を消去して、

$$T = mg \left(\frac{v_0^2}{g\ell} + 3\cos\varphi - 2 \right). \quad (10)$$

が得られる。

いま、式 (9) の左辺は負になることはないで、この式より φ の範囲は

$$\frac{v_0^2}{g\ell} \geq 2(1 - \cos\varphi) \quad (11)$$

に限られることが分かる。また、ひもがたるまないためには $T \geq 0$ でなければならないので、式 (10) より、ひもがたるまない条件として

$$\frac{v_0^2}{g\ell} \geq 2 - 3\cos\varphi \quad (12)$$

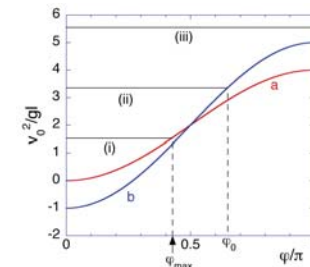
が得られる。条件 (11) は下図の曲線 a の上側の領域に対応し、条件 (12) は曲線 b の上側の領域に対応する。図から分かるように、 $v_0^2/g\ell \leq 2$ の場合には条件 (11) を満たす φ の領域 (図の水平線 i) において、条件 (12) は満たされる。この場合には、ひもはたるむことなく、 $-\varphi_{\max} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ の範囲で振動を行う。また、 $v_0^2/g\ell > 5$ の場合には全ての φ の領域で条件 (11) と (12) が満たされる (図の水平線 iii)。この場合には、ひもはたるむことなく、おもりは回転運動 ($\dot{\varphi} > 0$) を行う。そして、 $2 < v_0^2/g\ell < 5$ の場合には、条件 (11) を満たす φ の領域の一部分 (図の水平線 ii) だけで、条件 (12) が満たされる。つまり、条件 (12) の等号を満たす角度 φ に達したときに $T = 0$ となって、その後はひもがたるむ。よって、ひもがたるむための v_0 の条件は

$$\sqrt{2g\ell} < v_0 < \sqrt{5g\ell}$$

であり、ひもがたるむときの回転角 φ_0 は

$$\frac{v_0^2}{g\ell} = 2 - 3\cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_0 = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3g\ell}$$

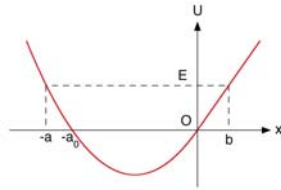
で与えられる。



3.7-2

【解答例】

(a) $x > 0$ の領域では重力によるポテンシャルエネルギーだけが存在するので $U(x) = mgx \sin \alpha$. $x \leq 0$ の領域では、これにバネによるポテンシャルエネルギーが加わるので $U(x) = mgx \sin \alpha + \frac{1}{2}kx^2$. $U(x)$ のグラフは下図のようになる.



(b) 初期状態では $x = -a$, $\dot{x} = 0$ なので、エネルギーは

$$E = U(-a) = \frac{1}{2}ka^2 - mga \sin \alpha. \quad (13)$$

エネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

より、運動は $E \geq U(x)$ の範囲で起きる。ポテンシャル $U(x)$ のグラフから分かるように、 $E \leq 0$ ならば運動の範囲は $x \leq 0$ の領域にとどまるので、質点はバネから離れることなく運動を続ける。一方、 $E > 0$ ならば、 $x > 0$ の領域にまで質点は到達するので、バネから離れることがある。式 (13) より、 $E = 0$ となるのは a の値が

$$\frac{1}{2}ka^2 - mga \sin \alpha \Rightarrow a = \frac{2mg}{k} \sin \alpha$$

となるときである。よって、 $a_0 = (2mg/k) \sin \alpha$.

(c) a_0 を使うと、 $mg \sin \alpha = ka_0/2$ と表されるので、式 (13) は $E = ka(a - a_0)/2$ と書き換えられる。 $a > a_0$ の場合に質点が達する最高点の座標を b とすると、最高点では $\dot{x} = 0$ だから、エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}ka(a - a_0) = U(b)$$

が成り立つ。いま、 $b > 0$ だから $U(b) = mgb \sin \alpha = ka_0b/2$. したがって

$$b = a \left(\frac{a}{a_0} - 1 \right).$$

第 4 章 運動方程式 (2) 抵抗と摩擦

4.1-1

【解答例】

ニュートンの運動方程式を用いて、特に力が速度に比例していて速度が鈍ったり、加速が抑えられる場合の運動の特徴を予想することを学んだ。具体的に、粘性抵抗の働くときに空中に投げ出された質点の位置座標を、水平方向 x 、鉛直方向 y に分けて時間の関数として式 (4.12) を求め、軌跡を表す方程式、式 (4.13) を求めた。これらを用いる。

式 (4.12) に与えられる y について $dy/dt = 0$ を満たす時刻 t に y の値が最大になる。この条件を方程式として t について解くと、この時刻は

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_0}{g} \sin \theta \right)$$

で与えられる。この t を式 (4.12) に代入すると y の最大値 $y_{\max}$ が次のように得られる。

$$y_{\max} = \frac{v_0}{\alpha} \sin \theta - \frac{g}{\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_0}{g} \sin \theta \right).$$

【解説】

最高到達点は、質点の y 座標の最大値である。教科書の説明の中に、 y 座標の表式が与えられているので、時間 t の関数としての最大値を求めればよい。軌道の方程式 (4.13) も与えられているので、軌道の x, y 平面の曲線の極大値として求めてもよい。

【問題のねらい】

この問題ではニュートンの運動方程式を解いた結果の表式を利用することに慣れることである。運動方程式の解の指数関数を含む関数に触れることにより、一般に粘性抵抗のある運動への理解を深める。

4.1-2

【解答例】

式 (4.13) の右辺は $\alpha = 0$ つまり $\gamma = 0$ のときには定義されていない式である。題意は、数学的にそれを α の関数として $\alpha \rightarrow 0$ の極限を求めることである。

表式は直接にロピタルの公式を使える形ではないので、 α についてのテイラー級数展開を用いた方法で極限を求める。 $\varepsilon = 0$ のまわりにおけるテイラー展開の公式から、

$$\ln(1 - \varepsilon) = -\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \dots$$

である。これを用いて、式 (4.13) の右辺は $v_t = g/\alpha$ を代入して、

$$\left(\tan \theta + \frac{g}{\alpha v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\alpha^2} \left[-\alpha \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 - \frac{\alpha^3}{3} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^3 + \dots \right]$$

となり、整理すると

$$x \tan \theta - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 - \frac{\alpha g}{3} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^3 + (\alpha \text{ の } 2 \text{ 次以上の項})$$

である。この第 3 項以降は $\alpha \rightarrow 0$ の極限で 0 になる。ここで第 2 項では三角関数の公式を使って $2 \cos^2 \theta = 2 \cos \theta \sin \theta / \tan \theta = \sin 2\theta / \tan \theta$ のように変形しておく。これらにより、式 (4.13) の極限は次のようになる：

$$y = \tan \theta \left(1 - \frac{g}{v_0^2 \sin 2\theta} x \right) x.$$

【解説】

抵抗が働かないとき、つまり $\alpha = 0$ のとき、原点から投げ上げられた投射運動の軌跡は式 (2.30) で $x_0 = 0, y_0 = 0$ と置いたものになる。が、一般の場合の式 (4.13) では $\alpha = 0$ と置くことができない。

このように物理学においては「抵抗が働かないとする」といった簡単化された条件のもとで求められた関係式が「抵抗が働くとき」といった一般の場合の関係式と見かけ上大きく違うことが起こる。それにもかかわらず実際にグラフを描いてみると、両者の軌道はほとんど違わなかったりする。自然は $\alpha = 0$ で連続だということである。グラフを描かずに確かめるためには極限を求めることが役に立つ。 α が小さいとき、複雑ではあるが厳密な式 (4.13) を使うよりも近似的に $\alpha = 0$ とした式 (2.30) を使うほうが便利である。

しかし自然には、Y 字形に分岐した水路に向かっていく流れでは上流での位置取りがその後の運動に大きな違いを与えるように、場合分けをする変数について不連続になる現象もあることに注意しておく。

【問題のねらい】

数学的には極限を求める計算を実行できることである。ここではしかしむしろ、解説に述べているようなことを実感することであり、できるならコンピュータを用いて図 (4.1) よりももっと小さな α の場合のグラフを描かせてみるとよい。

4.1-3

【解答例】

粘性抵抗の働く落下運動の方程式とその解き方を学んだ。題意は方程式の係数が与えられて終端速度を数値的に評価することである。

密度 ρ 、半径 a の球形の物体の質量は $m = (4\pi/3)\rho a^3$ で与えられるので、この物体が粘性率 η の流体中を落下するときの終端速度は式 (4.11) に式 (4.14) の γ を用いて

$$v_t = \frac{mg}{\gamma} = \frac{2\rho g a^2}{9\eta}$$

である。 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ として、問題に与えられた ρ , a , η の値を上の式に代入して計算すると、

- (a) 雨粒の終端速度として 1.2 cm/s ,
- (b) 油滴の終端速度として 0.69 mm/s を得る。

【解説】

指示に従って与えられた数値を用いて係数 γ と物体の質量を求め、終端速度として求めた結果の式を用いてその数値を計算すればよい。ここでは、質量の表式を終端速度の表式に代入して得られる一つの式にすべての数値を代入した。

ニュートンの運動方程式を解くという観点ではどんな大きさの力が働くかが必要なことである。これを速度に比例する力の場合について学んだが、実際に目にする状況との関連については個々に調べなくては把握できない。ここでは式 (4.14) が与えられていて、抵抗が物体の大きさに比例していることがキーポイントである。ここに注目した答え方をすることが必要になる。

【問題のねらい】

ここでは抵抗がなぜ速度に比例するのかは問わない。これをすでに知られている事実として抵抗が物体の半径に比例していることに注意した解き方ができることがねらいである。得られた結果によって、小さな物体で実際の落下速度にいかん抵抗が重要な役割を果たしているかを認識することができる。

4.2-1

【解答例】

場合分けされたいずれにおいても、上昇運動は重力と摩擦力のために終了する。これをまず運動方程式で導けることとして示す。その後、粗い斜面上にそっと置かれた物体の問題になり、摩擦角の定義から、斜面の傾き角によって静止し続けるか滑り落ちるかが分かれる。滑り落ちる場合の加速を運動方程式によって考察する。

斜面と平行で上向きに x 軸をとり、物体の速度を $v = \dot{x}$ とする。作用する力は重力と垂直抗力と摩擦力である。重力は、 x 成分が $-mg \sin \alpha$ であり、面の法線方向の成分は面に向かって $mg \cos \alpha$ である。これを打ち消す斜面からの垂直抗力の大きさが $mg \cos \alpha$ であることから動摩擦力は x 軸方向に運動と逆の向きで作用し、この大きさが μ' 倍である。したがって運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - mg\mu' \cos \alpha$$

よって

$$\dot{v} = -g(\sin \alpha + \mu' \cos \alpha)$$

を得る。この式の右辺は負の定数なので、 v は (一定の加速度で) 単調に減少して、やがて $v = 0$ になる。

その直後を考えると、本文で説明したように、(i) 斜面の傾斜角 α が摩擦角より小さいと物体は静止を続け、(ii) α が摩擦角より大きいと物体は静止できずに滑り降りる。

後者の場合、動摩擦力の向きが逆転するから、斜面を降り始めてからの速度が従う方程式は

$$\dot{v} = g(-\sin \alpha + \mu' \cos \alpha)$$

となる。 α が摩擦角より大きいと $\mu < \tan \alpha$ であり、一般に $\mu' < \mu$ なので $\mu' < \tan \alpha$ となり、上の式の右辺は負の定数になる。したがって、物体は等加速度運動により斜面を下降し続ける。

4.2-2

【解答例】

物体が $x = 0$ の点を通過する時刻を $t = 0$ とし、そのときの速度を初期条件として、運動方程式を解く。 $t \geq 0$ における運動方程式は、作用する力は動摩擦力であることから

$$m\dot{v} = -mg\mu'$$

である。いま、 $t = 0$ のとき $v = v_0$ だから、この運動方程式の解は

$$v = v_0 - g\mu' t$$

となる。物体が静止する時刻を t_0 とすると、この式で左辺を 0 とおいて、

$$t_0 = \frac{v_0}{g\mu'}$$

が得られる。

また、 $t = 0$ から $t = t_0$ までに物体が移動する距離は、

$$\ell = \int_0^{t_0} v(t) dt = \int_0^{t_0} (v_0 - g\mu' t) dt = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g\mu' t_0^2.$$

となる。これに上の t_0 を代入して、

$$\ell = \frac{v_0^2}{2g\mu'}.$$

以上より、静止するまでの時間は $\frac{v_0}{g\mu'}$ 、静止するまでに動く距離は $\frac{v_0^2}{2g\mu'}$ である。

【解説】

働く力がわかると運動方程式が解けば運動がわかる。この問題では、時刻 0 から静止する時刻までの間に限って動摩擦力が働いている。運動方程式には顕に記されていないが、解答例に記した運動方程式が有効な時間は、上記の定義を用いると $0 \leq t \leq t_0$ であることに注意する。

速度から時間積分により位置を求めることは、本節の基本事項である。

【問題のねらい】

この問題文では位置によって働く力が異なる設定になっている。運動方程式は時間を変数とした微分方程式であるので、一般に位置に依存する力の場合工夫が必要である。本問では止まるまでは同じ大きさの力であるのでそれを意識することがないが、後で複雑な設定の問題を解くなどの際には、簡単に解けたこの問題のことを想起することがありうる。

4.2-3

【解答例】

まず問題の前半に答える。問題 (4.2-2) で質点に働く力と、運動量の初期値および最終値がわかっている。力積と運動量の定理を利用すると、運動方程式を立てることなく答を得ることができる。

突入時点での運動量は $p_0 = mv_0$ 、静止した瞬間に運動量は $p = 0$ となる。これらが式 (2.21) の左辺を与える。質点に作用する摩擦力は $F = -\mu' mg$ で一定なので、静止するまでの所要時間を t とすると、この間に質点に作用した力積は $Ft = -\mu' mgt$ 。これが式 (2.21) の右辺である。したがって、

$$0 - mv_0 = -\mu' mgt \Rightarrow t = \frac{v_0}{g\mu'}.$$

次に、問題の後半では、質点に働く力と、運動エネルギーの初期値及び最終値が分かっていることから、仕事・エネルギーの定理を利用すると、運動方程式を立てることなく答を得ることができる。

突入時点での運動エネルギーは $mv_0^2/2$ 、これが摩擦によってすべて失われるから運動エネルギーの増加分は $-mv_0^2/2$ である。これが式 (3.5) の左辺を与える。質点に作用する摩擦力は $F = -\mu' mg$ で一定なので、静止するまでに移動する距離を ℓ とすると、摩擦力が質点になした仕事は $F\ell = -\mu' mg\ell$ 。これが式 (3.5) の右辺である。したがって、

$$-mv_0^2/2 = -\mu' mg\ell \Rightarrow \ell = \frac{v_0^2}{2g\mu'}.$$

【問題のねらい】

力積と運動量の変化を、また仕事と運動エネルギーの変化を具体的な問題に触れて、より身近に認

識する。力が時間に依存する、位置に依存する、などもっと複雑な問題に対応するための準備となる。関係式 (2.21) が実は運動法則の積分形式であり、既習のニュートンの運動方程式は微分形式であることを改めて認識すること。

4.2-4

【解答例】

ブレーキをかけた瞬間の速度が与えられていて、その後の働く力が与えられているので、その速度を初期条件として運動方程式を解けばよい。方程式とその解き方は、問題 4.2-2 と同じである。問題 4.2-3 のように求めてもよい。結果の $v_0^2/2g\mu'$ に、 $v_0 = 40 \text{ km/h} = (40000/3600) \text{ m/s}$ と $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ と $\mu' = 0.8$ を代入して計算すると、 7.9 m を得る。

【解説】

問題 4.2-2, 3 と良く似た設定であるから、結果の式を使うことを考える。ただ、働く動摩擦力が場所ではなく、止まるまでという時間で与えられていること、計算することは同じであること、に注意する。

【問題のねらい】

日常の経験で慣れている停止距離が 10 m 程度であることにはどの程度の動摩擦係数に対応するのか、一度数値をあたってみて経験することである。また、数値計算の際には単位の取り違いや不注意によって誤りが生じ、得られた数値が経験的な数値に比べて異常に大きかったり小さかったりすることがある。order of magnitude の間違いのことである。そのようなとき、それに気づくことが大事である。

4.2-5

【解答例】

ばねの復元力を $F = mg|2\mu' - \mu|$ 、最大摩擦力を $F_m = mg\mu$ とする。まず、(i) $2\mu' - \mu > 0$ の場合、 $F = mg(2\mu' - \mu)$ だから $F - F_m = 2mg(\mu' - \mu)$ である。一般に $\mu' < \mu$ だから、 $F < F_m$ が成り立つ。つぎに、(ii) $2\mu' - \mu < 0$ の場合、 $F = mg(\mu - 2\mu')$ だから $F - F_m = -2mg\mu' < 0$ である。したがって、 $2\mu' - \mu$ の符号にかかわらず $F < F_m$ が成り立つ（ばねの復元力は最大摩擦力より小さい）。

4.3-1

【解答例】

止まった時に持つエネルギーが初めに持っているエネルギーから増えた分が摩擦によって物体が受けた仕事だから（式 (4.37)），ばねが最大で ℓ だけ縮むとすると

$$\frac{1}{2}k\ell^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu' mg\ell \quad (14)$$

が得られる。これを ℓ について解くと、

$$\ell = \frac{mg\mu'}{k} \left[\sqrt{1 + \frac{k}{m} \left(\frac{v_0}{g\mu'} \right)^2} - 1 \right]. \quad (15)$$

と求まる。

【解説】

問題でもし非常に弱いバネが使われた場合はバネが存在しない時とほとんど同じ答になる。 $k = 0$ のときはバネが存在しないことになり、問題は問題 4.2-3 と同じことをきいていることになり、仕事・エネルギーの定理による関係式は式 (14) で $k = 0$ とすればよい。答として $\ell = v_0^2/2g\mu'$ が得られる。しかしここで得られた結果の式 (15) に $k = 0$ を代入することはできない。そういうときは $k \rightarrow 0$ の極限をとることでバネの無い場合と比較することができる。問題に含まれる条件を外した状況で得られた式と、条件下で式を得た後で条件を緩和して比較する場合、極限をとって比較しなければならないことは物理学ではよくあることである。

同様に、摩擦が非常に小さい場合は $\mu' = 0$ とみなせるはずである。だからといって結果の式 (15) に $\mu' = 0$ を代入して答えることができない。もし摩擦が全く働かないのであれば初期状態で持っている運動エネルギーがすべてバネの位置エネルギーになることが条件となり、式 (14) で $\mu' = 0$ とした方程式を解けば答として $\ell = v_0\sqrt{m/k}$ が得られる。こういうときも結果の式 (15) で $\mu' \rightarrow 0$ の極限をとればよい。極限をとることで摩擦の無い場合とごく小さい場合を比較することができる。

これらのことは、問題 4.1-2 の解説で既に述べた。再度言葉を変えて述べると、物理学においては「○○が働かないとする」簡単化された条件のもとで求められた関係式が「○○が働く」一般の場合と見かけ上の結果の式が大きく違うことが起こる。しかしバネの力や摩擦力に関しては自然は連続であり、それは力のパラメータを 0 にする極限を求めることで確かめられる。

第 5 章 質点系の力学

5.1-1

【解答例】

地球の中心を原点に、月に向かう方向を x 軸にとる。地球と月のそれぞれの中心の座標を x_E, x_M と記すと、 $x_E = 0$ であり、 $x_M = 3.844 \times 10^5 \text{ km}$ と与えられている。地球の質量を m_E と記し、月の質量を m_M と記すと $m_M = 0.0123m_E$ と与えられている。

地球から重心までの距離を ℓ とする。重心の位置の定義により

$$\ell = \frac{m_E x_E + m_M x_M}{m_E + m_M}$$

である。数値を代入して計算すると

$$\ell = 4.671 \times 10^3 \text{ km}.$$

これは地球の半径の約 0.73 倍である。

5.2-1

【解答例】

図 (a) に示すようにバネの自然長を ℓ_0 とする。図 (b) に示すように、質量 m の円板を上にとめ、バネの長さが ℓ_1 になったところでつり合って静止したとする。上の円板を押してさらに a だけバネを縮めたところを図 (c) に示す。手を放してバネが伸び始めてしばらく経過したときの上の円板の位置座標を図 (d) のように、つり合いの位置を原点として、 x で記す。

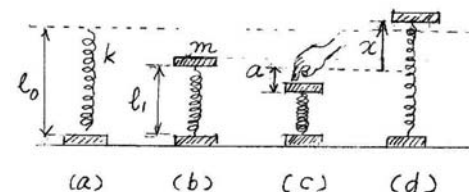


図 (b) のとき、ばねの力と上の円板に作用する重力のつり合いの条件は、 $mg = k(\ell_0 - \ell_1)$ であり、

$$\ell_1 = \ell_0 - \frac{mg}{k} \Rightarrow \text{つり合いの位置 (b) でバネの伸び} = -\frac{mg}{k}, \quad x = 0.$$

図 (c) のとき、長さ a だけ下がっているので

$$\text{押さえられた位置 (c) でバネの伸び} = -a - \frac{mg}{k}, \quad x = -a.$$

図 (d) のようにバネの長さが自然長よりも長く伸びたとき、下の円板に作用する力は下向きに重力 mg と上向きのばねの力 $k(x + \ell_1 - \ell_0)$ と床から受ける垂直抗力 R である。バネの力は上の ℓ_1 を与える式から、 $k(x - mg/k)$ である。 R は下の円板が床に押し付けられている限り動き出さないこと

から、 $R = mg - k(x - mg)$ を満たす。 R は負にならないから、 x が増加してこの右辺が 0 になった瞬間に下の円板は床を離れて持ち上げられる。 右辺が負になる条件は $x > 2mg/k$ である。 下の円板が床から離れる瞬間は $x = 2mg/k$ であり、 x の定義から

$$\text{図 (d) で下の円板が床を離れるときのバネの伸び} = \frac{mg}{k}, \quad x = \frac{2mg}{k}.$$

ここで、重力の下での互いに力を及ぼしあう上下の円板からなる質点系についてのエネルギー保存則を用いる。ただし、下の円板が静止している間に限ることにして、下の円板の重力ポテンシャルエネルギーは省略する。左辺に図 (c) の位置に静止しているときのポテンシャルエネルギー、右辺に図 (d) で $x = 2mg/k$ となった瞬間のポテンシャルエネルギーと速度を v とした運動エネルギーの和、を等置するとエネルギー保存を表す方程式として次のように得る：

$$\frac{1}{2}k\left(a + \frac{mg}{k}\right)^2 - mga = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + mg \times \frac{2mg}{k}.$$

整理すると次を得る：

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2(mg)^2}{k}.$$

この式を満たす v が存在するためには a に条件が付く。よって、 $a > 2mg/k$ ならば跳びあがることができる。

【解説】

a が十分に大きくないとつまり押し込み方が弱いと、バネの反発力が十分ではなく、最初にバネによって跳ね上げられる上の円板の勢いが足りず、ばねが自然長に戻った後に上の円板にかかる重力とバネが上の円板を引き戻そうとする力の和に逆らうことができず、十分な高さまで到達できない。その結果下の円板を引き上げることができない、といえる。

しかし、そのように分解して運動方程式を立てて上の円板の運動を求めてから問題を解こうとすることは、時間と手間がかかる。ここは、エネルギーの問題として保存則を利用することが便利である。

重力のポテンシャルを式で表すときに高さの原点をどこにとってもよい。解答例では、計算が少なくて済むようにしたが、例えば下の円板の位置を原点にとっても最後の答は同じになる。

【問題のねらい】

質点が 2 個以上含まれる体系の運動を記述し、予測することについてこの章で学ぶが、一般に運動方程式は込み入ったものになる。そのようなとき、特にエネルギー保存則の位置づけを理解し、方法に慣れることは今後の学びに役に立つであろう。

5.3-1

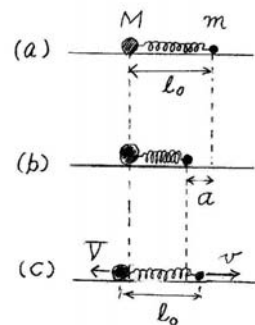
【解答例】

問題の図 5.10 に描かれた台車を質量の大きな質点として右図のバネの左側の物体で表し、スプリングによって打ち出される質点を右図のようにバネの右側の物体で表す。バネの自然の長さを ℓ_0 で表す。図 (a) は自然の状態を示す。図 (b) はバネを何らかの方法で a だけ押し縮め、押す力を取り去った瞬間を示す。図 (c) は、その後バネが伸びてちょうど自然の長さになった瞬間を示す。それ以後バネが押す力は消失するから、軽い物体はばねと離れてそのまま飛び去る。

この 2 つの質点は、図 (b) の状態から図 (c) の状態に至る間、互いに力を及ぼしあう質点系をなしている。外力の作用しない孤立系とみなせるから、系の力学的エネルギー E と運動量 P は保存される。 P は図の右向きを正とする。

図 (b) の時バネの伸びは $-a$ で質点はいずれも静止していて $E = ka^2/2$, $P = 0$,

図 (c) のときバネの長さは自然長、速度は V, v で $E = MV^2/2 + mv^2/2$, $P = -MV + mv$,



保存則を式で表すと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ka^2 &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ 0 &= -MV + mv \end{aligned}$$

となる。これから v を消去して式を整理すると、次の結果が得られる：

$$V = a\sqrt{\frac{mk}{M(m+M)}}.$$

【解説】

外力の作用しない 2 質点の体系である。したがって重心の運動は変化しない。初め止まっていた重心はバネが伸び切った後も止まったままである。ばねが切り離された後の速さは、ばねのエネルギーをそれぞれの運動エネルギーとして分け合ったものになる。分け合う比率は重心が留まる条件、 $MV = mv$ で定まる。

【問題のねらい】

このような基本的な問題を解くとき、その筋道を自力でたどることによって、物理学で学ぶべき考え方を身につけることができる。

5.3-2(a)

【解答例】

右図の上のように、台車のバネを取り付けた位置を原点とする座標系をとり、初め自然の長さから a だけ縮めたバネの右上端に乗せた物体の位置を (x_0, y_0) とする。

時刻 $t = 0$ にバネの押さえを外したのち、時刻 $t = t_1$ にバネの長さが自然の長さに戻るまではこの物体はバネに押し戻され続ける。時間 $0 < t < t_1$ の物体の位置を (x, y) 、台車の位置（バネの左端の位置）を $(X, 0)$ と記す。台車の速さ V および物体の速度 v はそれらの位置と次の関係にある：

$$V = -\dot{X}, \quad v = (\dot{x}, \dot{y}).$$

台車と物体の 2 つの質点からなる体系の力学エネルギー E は保存する。時刻 $t = 0$ において、両質点は静止し、ばねの伸びは $-a$ であり、物体の重力によるポテンシャルエネルギーを 0 にとれば、

$$E = \frac{1}{2}ka^2.$$

時刻 $t = t_1$ においてバネの伸びは 0 であり、物体の重力によるポテンシャルエネルギーは $mg(y - y_0)$ であるから、このときは

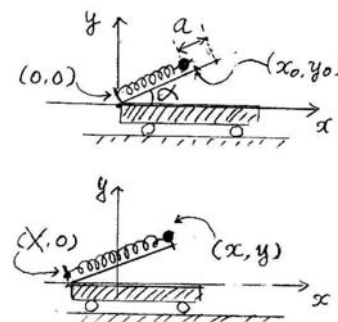
$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 + mgy \sin \alpha$$

と書ける。ただし、ここで $y - y_0 = a \sin \alpha$ は、ばねの自然長を ℓ_0 とするとき $y_0 = (\ell_0 - a) \sin \alpha$ と $y = \ell_0 \sin \alpha$ であることから導かれる。

この体系の運動量保存則は、水平方向成分についてだけ成り立つ。それは、鉛直方向には運動が拘束されているからである。この保存則により、時刻 $t = 0$ には重心が静止していることから時刻 $t = t_1$ でも重心の速度の x 成分が 0 であり、次が成り立つ：

$$MV = mv_x.$$

さらに、物体の運動は常に台車の上の斜面上に限られるので、拘束条件が付く。 $0 \leq t \leq t_1$ において、ばねの長さによらず $y/(x - X) = \tan \alpha$ (一定) である。よって次の関係が成り立つ：



$$v_y = (v_x + V) \tan \alpha.$$

これらの式から v_x, v_y を消去して得られる V の方程式を解けばよい。まず、エネルギー保存則によって得られる式

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 + mga \sin \alpha = \frac{1}{2}ka^2$$

を変形し、また、運動量保存則（床に平行な成分）と拘束条件を用いて v_x, v_y を消去すると、

$$m \left(\frac{M}{m} V \right)^2 + \frac{(M+m)^2}{m} V^2 \tan^2 \alpha + MV^2 = ka^2 - 2mga \sin \alpha$$

が得られ、この左辺を変形して

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{V^2}{m} (M^2 + (M+m)^2 \tan^2 \alpha + mM) = \frac{V^2}{m} (M + (M+m) \tan^2 \alpha) (M+m) \\ &= \frac{V^2}{m \cos^2 \alpha} (M + m \sin^2 \alpha) (M+m) \end{aligned}$$

となるので、最終的に求まる V の表式は次のとおりである：

$$V = \cos \alpha \sqrt{\frac{m(ka^2 - 2mga \sin \alpha)}{(M + m \sin^2 \alpha)(M+m)}}.$$

また、消去するときに用いた関係式により求める v の表式は次のとおりである：

$$v_x = \frac{M}{m} V, \quad v_y = \frac{M+m}{m} \tan \alpha V.$$

【解説】

前問 5.3-1 の単純な焼き直しで解答を作ることができない理由は、速度が 2 次元のベクトルであることによる。鉛直方向には床からの力を受けるため、体系は孤立系ではない。したがって孤立系についての運動量保存則は使えない。その代わりに、床に平行な向きの外力が作用しないことと、運動が斜面に沿って起こるという拘束条件、を用る。

方法的な違いはあるにしても、前問と同じ考え方をすればよいことは理解できよう。

なお、本問で発射台が水平に置かれた場合は前問と同じことになるから、本問の結果で $\alpha = 0$ とおいたものは前問の結果に一致するべきである。読者自身で確かめられよう。

【問題のねらい】

エネルギー保存則と運動量保存則が基本であることを知ったうえで、問題に即して拘束条件が必要になる、あるいは便利に使えることが理解できるであろう。時々そのタイプの問題を解いて、拘束条件を利用する力を磨いていくとよい。

5.3-2(b)

【解答例】

例題 2.3-1 の結果は

$$l = v_0^2 \sin 2\theta / g$$

であった。初めの速度を (v_x, v_y) と置くと、 $v_x = v_0 \cos \theta, v_y = v_0 \sin \theta$ であることから、

$$l = 2v_x v_y / g$$

と表すことができる。この右辺に問題 5.3-2(a) で得られた v_x, v_y, V の表式を代入すると、飛距離 l の表式は次で与えられる：

$$l = \frac{M \sin 2\alpha (ka^2 - 2mga \sin \alpha)}{m(M + m \sin^2 \alpha)g}.$$

5.3-3

【解答例】

質点は図 (a) に示すように、下向きで大きさ mg の重力、斜面からの右上向きの垂直抗力を受ける。垂直抗力の大きさを R とおく。また、三角柱はその反作用と床からの垂直抗力の和によって左向きに力を受ける。このように質点と三角柱は互いに力を及ぼしあっている一つの体系をなす。この体系に作用する外力のうち質点に作用する重力だけが仕事をするから、物体の重力ポテンシャルを含めたこの体系の力学的エネルギーは保存する。また、水平方向には外力が作用しないので体系の運動量の水平成分は保存する。

図 (b) に示すように x 軸と y 軸をとる。質点の速度を (v_x, v_y) 、三角柱の左向きの速さを V とおく。

体系の運動量の x 成分は $P_x = mv_x - MV$ である。初期時刻 $t = 0$ で静止していたので、このとき $P_x = 0$ である。 P_x は保存するから、つねに $mv_x - MV = 0$ 、よってつねに次が成立する：

$$mv_x = MV \quad (16)$$

図 (c) に示すように三角柱に固定した座標系の上での質点の速度を (v'_x, v'_y) と記すと、速度は斜面に沿っているので $v'_y/v'_x = -\tan \alpha$ である。斜面は静止系で見て左向きに移動するので図 (b) に示したように v_x は v'_x よりも小さく、 $v_x = v'_x - V$ である。また、 $v_y = v'_y$ である。よって、つねに次が成り立つ：

$$\frac{v_y}{v_x + V} = -\tan \alpha. \quad (17)$$

三角柱と質点の系の力学的エネルギー E は保存する。 E は質点の高さと質点の速度と三角柱の速さで与えられ、時刻 $t = 0$ で $E = mgh$ であり、斜面の下端に到達した時に、その時の v_x, v_y, V を用いて $E = MV^2/2 + mv_x^2/2 + mv_y^2/2$ である。したがって、次が成り立つ：

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = mgh \quad (18)$$

これらの方程式を連立させて V, v_x, v_y を求めることができる。まず式 (17) より、

$$v_y = -\tan \alpha V \left(\frac{v_x}{V} + 1 \right),$$

また式 (16) より

$$v_x = \frac{M}{m} V \Rightarrow v_y = -\tan \alpha V \left(\frac{M}{m} + 1 \right) \quad (19)$$

である。これらを式 (18) に代入して書き換えた V についての方程式

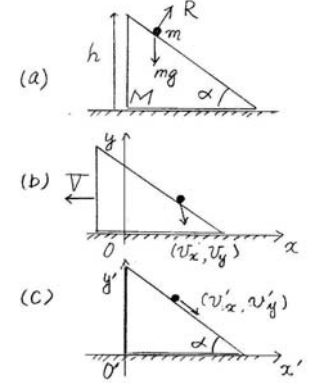
$$MV^2 + \frac{M^2}{m} V^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} m \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2 V^2 = 2mgh$$

の左辺を変形すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{(M+m)(M \cos^2 \alpha + (M+m) \sin^2 \alpha)}{m \cos^2 \alpha} V^2 \\ &= \frac{(M+m)(M + m \sin^2 \alpha)}{m \cos^2 \alpha} V^2 \end{aligned}$$

となり、 V について解くと結果が得られる：

$$V = \sqrt{2gh} \frac{m \cos \alpha}{\sqrt{(M+m)(M + m \sin^2 \alpha)}}.$$



【解説】

問題文には要求されていないが、質点の斜面最下点に到達した瞬間の速度を求めるには得られた V の表式を式 (19) に用いる。結果は：

$$v_x = \sqrt{2gh} \frac{M \cos \alpha}{\sqrt{(M+m)(M+m \sin^2 \alpha)}}, \quad v_y = -\sqrt{2gh} \sin \alpha \sqrt{\frac{M+m}{M+m \sin^2 \alpha}}.$$

もしも斜面の台である三角柱が非常に質量の大きなものであったなら、質点の運動によってほとんど影響を受けることがないであろう。したがって、以上の結果で $M \rightarrow \infty$ の極限では、 $V \rightarrow 0$, (v_x, v_y) は固定された高さ h の斜面を滑り落ちるときの表式 $\sqrt{2gh}(\cos \alpha, -\sin \alpha)$ に近づくことが確かめられよう。

5.3-4

【解答例】

弾丸と物体の運動は水平面上で起こり、衝突後に物体は弾丸の運動した軌道の直線に沿って進むと考えられる。したがって、2つの質点が1次元的な運動をするときの問題として答えればよい。図の右向きを x 軸にとる。 m, M, v は与えられているとおりとし、合体したのちの速度を V とする。2つの質点には x 軸方向の外力が作用しないので運動量の x 成分 P は保存する。

運動量は衝突前の速度（それぞれ v と 0）あるいは衝突後の速度（ともに V ）で表され、

$$\text{衝突前} \quad P = mv$$

$$\text{衝突後} \quad P = (M+m)V$$

である。よって $mv = (M+m)V$ が成り立つ。これより求める複合体の速度として次が得られる：

$$V = \frac{m}{M+m}v.$$

5.4-1

【解答例】

2つの質点の x 軸上の1次元的な運動として考える。 v_1, v_2, m_1, m_2, k は問題文に与えられた通りとする。質点系では重心の運動と相対運動に分けて考えると便利である。

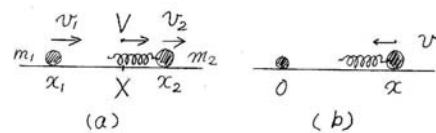


図 (a) のように質点それぞれの位置座標を x_1, x_2 , 重心の座標を X と記し、重心の速度を V とする。 v_1, v_2, V は右向きに運動するときに正である。 $v_1 > v_2$ であり、静止した座標系では図 (a) のように質点 1 が左から質点 2 に追いつき、衝突する。相対座標 $x = x_2 - x_1$ は、図 (b) のように質点 1 が止まって見える座標系で見た質点 2 の位置座標である。相対速度 $v = v_2 - v_1$ は今の場合 $v < 0$ である。

2つの質点の体系には、床が滑らかであることから、運動の方向に外力が作用しない。したがって体系的力学的エネルギー E は保存する。 E は運動エネルギーと相互作用のエネルギーからなる。以下でバネの自然長を ℓ_0 とし、体系の質量を M , 換算質量を m と記すと

$$M = m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

である。

衝突前と、衝突してばねが縮んでいるとき、それぞれ力学的エネルギーの表式は時間とともに変化する V, v および x を用いて次のように書ける：

$$\begin{aligned} \ell_0 < x \quad \text{のとき} \quad E &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2, \\ 0 < x < \ell_0 \quad \text{のとき} \quad E &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2. \end{aligned}$$

衝突前の E の値と、衝突してばねが最も縮んだときの値を等しいと置いて、後者の位置座標 x を求める。前者で $v = v_2 - v_1$ を、後者では $v = 0$ を代入する。両者において V は、重心の速度が常に

一定であることから共通である。このようにして、また m を m_1, m_2 で表して、次の方程式を得る：

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2$$

ばねの縮みの最大値はこの式から求まる $|x - \ell_0|$ で与えられるから、 $v_1 > v_2$ に注意して

$$(v_1 - v_2) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

である。

【解説】

2つの質点からなる体系における力学エネルギー保存則を用いる問題である。この式は一般に重心の速度と系の質量、そして相対座標と相対速度に換算質量で表される。一般に重心の位置による場合もあるが、この問題では重心の位置には依存しない。最も記憶しづらい量が換算質量であろう。丸暗記でなく覚えるには逆数の和の逆数と覚えるとよい。パターンで覚える人は、2つの質量の積と和の比とみればよいかもしれない。

もし換算質量を用いた運動エネルギーの式を使わずに、各質点の速度を用いた運動エネルギーの式でこの問題を解こうとするならば、(1) 衝突してばねが最も深く縮んだときに両質点の速度が等しくなること、(2) 系の運動量が保存すること、を用いてその速度を求める計算が余分に必要になる。

【問題のねらい】 物理学 A の学習では、保存則そのものを知っているだけではなく、状況に応じた記号や量を用いて説明し利用する力を身につけることが到達目標である。重心座標、相対座標、換算質量は簡単に覚えられて重要な量であろう。

第 6 章 角運動量

6.2-1

【解答例】

(a) 力 (F_x, F_y) が点 (x, y) において作用するとき、原点 O に関するトルク N は $N = xF_y - yF_x$ で与えられることを用いる。今の場合、重力と図から分かる位置ベクトルはそれぞれ

$$F_x = mg, \quad F_y = 0, \quad x = \ell \cos \varphi, \quad y = \ell \sin \varphi$$

となる。張力によるトルクは、力の方向が位置ベクトルの方向と同じであるから 0 であり、したがってしたがっておもりに作用する力のトルクは

$$N = -mg\ell \sin \varphi$$

である。

(b) 式 (6.43) はトルク N と角運動量 L の関係を与える方程式であり、いま、トルクの表式が φ で表されているので、角運動量 L を $\varphi, \dot{\varphi}$ で表せば、 φ に対する運動方程式が求まるはずである。

例題 6.2-1 により $L = m\ell^2 \dot{\varphi}$ が分かっているから、上の問 (a) の結果の N を用いて式 (6.43) から

$$\frac{d}{dt} m\ell^2 \dot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi$$

が得られる。したがって

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi,$$

よって求める式 (2.51) が得られた。

【解説】

【成分を使って問 (a) の計算をした理由】

問題の趣旨が、トルクを式 (6.38) で定義されたものとしてではなく、式 (6.40) で定義されたものとして考えることであると解釈した。

6.2-2

【解答例】

質点の位置座標が時間の関数として与えられているから、定義に従って角運動量を計算することができる。

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = b\omega \cos \omega t$$

であるから、 $L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ より、

$$L = mab\omega \cos^2 \omega t - (-mab\omega) \sin^2 \omega t \quad \Rightarrow \quad L = mab\omega$$

を得る。これは時間 T にらず一定値 $mab\omega$ をとる。よって示された。

【解説】

この問題では「原点 O に関する」角運動量を求めていることが重要である。もしもほかの「点 (x_0, y_0) に関する」が課題なら、一般には時間 t に依存する結果が得られるであろう。本問題の運動では、「楕円の焦点に関する」角運動量は時間とともに変化する。

これは惑星の運動で楕円の焦点にある太陽を基準にした角運動量が一定であることと矛盾するわけではない。惑星の運動は後で式 (6.88) と式 (6.99) に示されるように、本問題とは異なる。

【問題のねらい】

見かけ上簡単な関数で表された質点の運動について簡単に角運動量を計算で求められることで、自然の単純さを見るであろう。その上で、それほど簡単ではないが同様に角運動量が一定になる重要な自然現象（太陽系の惑星の運動）の不思議さを感じることができれば、課題の意味もあろう。

6.2-3

【解答例】

xy 平面内を運動する質点の角運動量は位置 (x, y) と運動量 (mv_x, mv_y) が分かると $L = m(xv_y - yv_x)$ から求められる。いま、 $x = a, v_y = v, v_x = 0$ であるから、

$$L = mav$$

と求まる。

6.2-4

【解答例】

xy 平面内を運動する質点の角運動量は位置 (x, y) と運動量 (mv_x, mv_y) が分かると $L = m(xv_y - yv_x)$ から求められる。時刻 $t = 0$ に位置 $(0, 0)$ から速度 $(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ で投げ出された石の位置と速度はそれぞれ、

$$x = v_0 t \cos \theta, \quad y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

と表される。これらを L の表式に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} xv_y &= v_0^2 t \sin \theta \cos \theta - v_0 gt^2 \cos \theta, \\ yv_x &= v_0^2 t \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2}v_0 gt^2 \cos \theta, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad L = -\frac{1}{2}mv_0 gt^2 \cos \theta$$

のように求まる。

一方、トルクは位置 (x, y) と力 (F_x, F_y) によって $N = xF_y - yF_x$ から求められる。ここで $F_x = 0, F_y = -mg$ であるから上の (x, y) とこの $\mathbf{F}$ を N の式に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} xF_y &= -mv_0 gt \cos \theta, \\ yF_x &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad N = -mv_0 gt \cos \theta$$

のように求まる。上の L を時間 t で微分すると上の N の右辺に一致することが分かるので、 $\dot{L} = N$ が成立することがたしかめられた。

【解説】

平面内の運動をする質点の角運動量は、その運動が直線状の運動であっても放物線上の運動であっても、一般に 0 ではない。力が作用して加速が起きる場合には角運動量は時間とともに変化する。この問題と一つ前の問題では、分かっている運動から定義に従って角運動量とトルクを求めることとそれらの関係を確認することが課題である。

【問題のねらい】

与えられた表式を代入して方程式が成り立つことを確かめることは、それ自体に大きな目的のあることではない。トルクと角運動量が満たす運動方程式はニュートンの法則を使って導いたものであるから、個々の運動で検証する必要はない。課題の目的はむしろ、分かっている運動を例にとって運動方程式に慣れることにより、今後の、作用する力や拘束条件を知って運動を求める応用問題に対応するときに備えることである。

6.2-5

【解答例】

テーブルの穴の位置を原点として 2 次元極座標 (r, φ) をとる。質点は $t \leq 0$ では半径 r_0 で角速度 ω_0 の等速円運動をしているから、その位置は次のように表せる：

$$t \leq 0 \quad (r, \varphi) = (r_0, \omega_0 t).$$

質点はひもを通じて原点 O に向かう力を受ける。等速円運動をしているときの向心力も、ひもの長さが短くなっていくときの余分な力もすべて、力は原点に向かっている。この力による O に関するトルクは、力の作用点が O を通るので、0 である。よって角運動量 L は保存され、すべての時間帯で一定である。

極座標 (r, φ) で表すと角運動量の表式は

$$L = mr^2 \dot{\varphi} \tag{20}$$

であることを学んだ。 $t \leq 0$ の値 $r = r_0, \dot{\varphi} = \omega_0$ を代入すると、

$$t \leq 0 \quad L = mr_0^2 \omega_0 \tag{21}$$

である。角運動量が一定であるので式 (20) の値は $t = 0$ における値、式 (21)、に固定されており、これにより $\dot{\varphi}$ は求まり、 $\dot{\varphi} = r_0^2 \omega_0 / r^2$ である。以下 $\dot{\varphi}$ を ω と記すことにすると、 ω は r が時間変化するとき、それに従って変化して

$$0 \leq t \leq T \quad \omega = r_0^2 \omega_0 / r^2 \tag{22}$$

である。これにより、ひもが短くなるにつれて回転が速まる様子が表されている。 $t \geq T$ では r は一定で $r = r_0/2$ であるから、 ω も一定であり、求める結果は：

$$t \geq T \quad \omega = 4\omega_0$$

【解説】

問題では顕に答えを求められていないが、ひもの長さが変化する時間帯 $0 \leq t \leq T$ の $r = r_0(1 - t/2T)$ を式 (22) に用いると、このときの角速度が時間の関数として求まり、結果は次のとおりである：

$$0 \leq t \leq T \quad \omega = \frac{\omega_0}{(1 - t/2T)^2}.$$

6.3-1

【解答例】

3 次元空間を運動する質点の角運動量は、式 (6.48) に定義されているように、質点の位置 (x, y, z) と運動量 (mv_x, mv_y, mv_z) を用いた式、 $L_x = m(yv_z - zv_y), L_y = m(zv_x - xv_z), L_z = m(xv_y - yv_x)$ から求めることができる。

与えられた座標の時間変化は、 a, ω, c を定数として、

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = c$$

であり、これらの時間微分から

$$v_x = -a\omega \sin \omega t, \quad v_y = a\omega \cos \omega t, \quad v_z = 0$$

が求まるので、これらを $\mathbf{L}$ の式に代入する。計算は、

$$yv_z - zv_y = 0 - ac\omega \cos \omega t, \quad zv_x - xv_z = -ac\omega \sin \omega t, \quad xv_y - yv_x = a^2\omega \cos^2 \omega t - (-a^2\omega \sin^2 \omega t)$$

を整理して、原点 O に関する角運動量を次のように得る：

$$\mathbf{L} = (-mac\omega \cos \omega t, -mac\omega \sin \omega t, ma^2\omega).$$

この z 成分は一定値を取り、 x 成分と y 成分は時間とともに振動する。

【解説】

角運動量は基準となる点が違っていると違った値をもつ。問題では原点に関する角運動量であったが、もし仮に質点の円運動の中心である点 $(0, 0, c)$ に関する角運動量を求めるならば、上の計算で z の代わりに $z - c$ が使われ、答は

$$\mathbf{L} = (0, 0, a^2\omega)$$

であり、これは時間的に変動しない。

題意のように単純な等速円運動を行っている質点の角運動量は時間変化しない定数であると考えがちだが、原点に関する角運動量が時間的に変動しているということは、質点に作用する力の原点に関するトルクが 0 ではないことを意味する。等速円運動を起こしている力（向心力）は、原点ではない点 $(0, 0, c)$ に向かう力であるから、原点に関するトルクは 0 でなくて当然である。

【問題のねらい】

角運動量の定義を用いて与えられた運動について角運動量を計算できればいいということではなく、角運動量には基準とする点が重要であることに気づくことが期待されている。

6.3-2

【解答例】

この質点に作用する力は、重力とひもの張力である。質量が m であるから、鉛直上向きを z 軸としてその基本ベクトルを $\mathbf{k}$ と記すと、重力は $-mg\mathbf{k}$ である。ひものを固定している点を原点として位置ベクトルを $\mathbf{r}$ と記すと、張力の大きさを T として、張力は $-T\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ である。

球面振り子の原点 O に関する角運動量 $\mathbf{L}$ の時間変化は作用する力の原点に関するトルク $\mathbf{N}$ で与えられ、

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r} \times (-mg\mathbf{k}) + \mathbf{r} \times \left(-T \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right),$$

である。トルクの第1項が重力によるもの、第2項が張力によるものである。第1項はベクトル積をとる2数の一方である $\mathbf{k}$ 方向の成分を持たない。第2項は同じ方向 ($\mathbf{r}$) の2数のベクトル積だから 0 である。よって、トルクの z 成分が 0 であることが示されて、 L_z は時間変化せず一定であることが示された。

【解説】

球面振り子の運動は、球面上をあちこち動き回る複雑なものになっていると想像される。規則性を見出すことは難しいかもしれないが、要求されている角運動量の z 成分の保存することだけに限れば簡単である。おもりに作用する力の向きの考察からトルクの向きを考察すればよい。

3次元の問題を解くときには、ベクトルの向きに注意して式を整理することが大切である。

6.4-1

【解答例】

2つの任意のベクトル $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ についての内積 $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ と外積 $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ の成分による定義に従って、任意のベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ について $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ の表式、またそれを用いた $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ の表式を求めると、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x), \quad (23)$$

また同様に、

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = B_x(C_y A_z - C_z A_y) + B_y(C_z A_x - C_x A_z) + B_z(C_x A_y - C_y A_x), \quad (24)$$

である。式 (23) で B_x を因数にもつ項を取り出すと $A_y(-B_x C_z) + A_z(B_x C_y)$ である。これは式 (24) の右辺の初めの項 $B_x(C_y A_z - C_z A_y)$ に一致する。同様に式 (23) で B_y を因数にもつ項、また B_z を因数にもつ項について調べると、それぞれ式 (24) の右辺の第2の項 $B_y(C_z A_x - C_x A_z)$ 及び第3の項 $B_z(C_x A_y - C_y A_x)$ にそれぞれ一致するから、全体として式 (23) の右辺と式 (24) の右辺が一致することが確かめられた。したがって左辺同士も等しい、つまり

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

が確かめられた。同様に次についても確かめられる：

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

6.5-1

【解答例】

重心を基準にした位置座標の定義 $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ と運動量の定義 $\mathbf{p}_i = m\mathbf{r}_i$ を式 (6.69) の右辺に代入して変形すると

$$\text{式 (6.69) の右辺} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{R} \times (M \dot{\mathbf{R}})$$

が得られる。ただし、この途中で $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = M\mathbf{R}$ を用いて $\sum \mathbf{R} \times m_i d\mathbf{r}_i/dt = \mathbf{R} \times d(\sum m_i \mathbf{r}_i)/dt = \mathbf{R} \times M d\mathbf{R}/dt$ の変形をした。

同じように、 $\mathbf{q}_i$ の定義を式 (6.70) の右辺に代入して変形すると

$$\begin{aligned} \text{式 (6.70) の右辺} &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}}) \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \dot{\mathbf{R}} \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{R} \times \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times (M \dot{\mathbf{R}}) \end{aligned}$$

ここで $\sum_i m_i = M$ を用いた。この式の最後の行で第2項と第3項はともに $-\mathbf{R} \times (M \dot{\mathbf{R}})$ に等しく、さらにそのうち一つは第4項と打ち消す。その結果は、すでに上で求めた式 (6.69) の右辺を計算したものと同じである。したがって、式 (6.69) と式 (6.70) が同じ内容であることが示された。

【解説】

質点系の重心を基準にした角運動量 $\mathbf{L}_0$ の2通りの定義式、

$$\text{式 (6.69)} \quad \mathbf{L}_0 = \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i$$

$$\text{式 (6.70)} \quad \mathbf{L}_0 = \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i$$

が同等であることを示す問題である。

上に書いた解答例の他に、式 (6.69) の右辺と式 (6.70) の右辺の差が 0 であることを示してもよい。それは次のようにしてできる：

$$\text{式 (6.69) の右辺} - \text{式 (6.70) の右辺} = \sum_i \mathbf{q}_i \times (\mathbf{p}_i - m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}})) = \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}} = 0$$

ここで、 $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ であることと、 $\sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}$ において $\dot{\mathbf{R}}$ は i に依らず共通だから和の外に出せて、また $\mathbf{q}_i$ の定義から $\sum_i m_i \mathbf{q}_i = \sum m_i \mathbf{r}_i - \sum m_i \mathbf{R} = 0$ となることを使った。

6.5-2

【解答例】

まず、式 (6.71) を導く。原点に関する角運動量とトルクの定義から、重心に関する角運動量とトルクの表式を導けばよい。質点系の i 番目の質点の位置を $\mathbf{r}_i$ 、質量を m_i 、質点の運動量を $\mathbf{q}_i$ とし、重心の位置を $\mathbf{R}$ 、系の質量を M 、系の運動量を $\mathbf{P}$ とする。系の角運動量 $\mathbf{L}$ の定義と、重心を基準にした質点の位置 $\mathbf{q}_i$ の定義は、それぞれ

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{q}_i$$

である。後者を $\mathbf{L}$ の定義式の右辺に代入すると、次が得られる：

$$\text{右辺} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{q}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i.$$

第1項は $\mathbf{P}$ の定義式 $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ から $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$ 、第2項は $\mathbf{L}_0$ の定義式 (6.69) により $\mathbf{L}_0$ 、よって

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_0.$$

となる。これが式 (6.71) の最初の式である。

原点に関する系に作用するトルクの定義式

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

の右辺に上記の $\mathbf{r}_i$ を代入して整理すると、

$$\text{右辺} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{q}_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{F}_i$$

である。この式を $\mathbf{F}$ の定義 $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ と、 $\mathbf{N}_0$ の定義式を用いて変形すると、関係式

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{N}_0$$

が得られる。これが式 (6.71) の第2の式である。

次に、式 (6.72) を導く。原点に関する角運動量の運動方程式が式 (6.66) に与えられており、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

である。左辺に上で求めた $\mathbf{L}$ を、右辺に $\mathbf{N}$ を代入すると、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times \mathbf{P}) + \frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{N}_0$$

である。左辺の第1項は

$$\text{第1項} = \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{P} + \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} = 0 + \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

となる。ここで、 $\mathbf{P}$ の定義 $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ と、同じベクトルの外積が0になることを用いた。これにより左辺の第1項は右辺の第1項と同じであり、打ち消すことが分かった。よって次が得られた：

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{N}_0.$$

これが重心を基準にした角運動量の運動方程式 (6.72) である。

【解説】

この解答例の導出は $\mathbf{L}_0$ の定義式 (6.69) を用いた。代わりに式 (6.70) による解答例概略を示す。まず定義から

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{p}_i = m_i(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{q}}_i)$$

である。後の2式を第1式の右辺に用いると、次が得られる：

$$\text{右辺} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{q}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}} + \sum_i \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i.$$

第1項では $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ であり、第2項 $= (\sum_i m_i \mathbf{q}_i) \times \dot{\mathbf{R}}$ は $\mathbf{q}_i$ の定義から $\sum_i m_i \mathbf{q}_i = 0$ であるから0、第3項は式 (6.70) より $\mathbf{L}_0$ である。

6.5-3

【解答例】

本文中に「直接にも導ける」と書かれているから、 $\mathbf{q}_i$ の定義を使って計算するだけで示せるはずである。実際、 $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ より、

$$\text{式 (6.74) の右辺} = \sum_i ((\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i \mathbf{g}) = \left(\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) m_i \right) \times \mathbf{g}$$

ここでベクトル積の分配則を用いた。重心座標の定義 $\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{q}_i / \sum_i m_i$ を用いて、

$$\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) m_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \mathbf{R} = 0$$

である。よって示された。

【解説】

「質点の質量に比例して場所には依存しない力は、重心を基準にしたトルクを発生しない」ことの証明である。ほかの点を基準にするとトルクは、0ではない。だから、証明には「重心を基準にした座標」でトルクを求めることが重要になる。

証明から、「各質点に作用する重力が各々の質点の質量に比例すること、その質量を用いて重心が定義されている」ことが本質的であることが読み取れるであろう。

6.5-4

【解答例】

図のように質点1, 2の座標を (x_1, y_1) , (x_2, y_2) と記し、それぞれの速度を $\mathbf{v}_1 = (v_{x1}, v_{y1})$, $\mathbf{v}_2 = (v_{x2}, v_{y2})$ と記す。

重心の運動を考える。2つの質点からなる系の運動量 $\mathbf{P}$ はそれぞれの運動量の和であり、系の質量 M はそれぞれの質量 m の和である。また、運動量 $\mathbf{P}$ は重心の速度と系の質量の積 $M\mathbf{V}$ であるから、

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2, \quad \text{また} \quad \mathbf{P} = 2m\mathbf{V}$$

である。各質点の速度の初期値が

$$t = 0 \text{ のとき} \quad \mathbf{v}_1 = (0, v_0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 0)$$

と与えられているから $\mathbf{P}$ の初期値は

$$t = 0 \text{ のとき} \quad \mathbf{P} = (0, mv_0)$$

となる。系に外力が作用しないから系の運動量は保存する。よって

$$t > 0 \text{ で} \quad \mathbf{P} = (0, mv_0)$$

であり、この $\mathbf{P}$ の値と上の $\mathbf{P}$ と $\mathbf{V}$ の関係から、

$$t > 0 \text{ で} \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{2m} = (0, \frac{1}{2}v_0) \quad \text{よって} \quad V = \frac{1}{2}v_0$$

と求まった。ここで V は問題文に指定された、 $t > 0$ における重心の y 方向に動く速さである。

このあと、角運動量を求めるため時刻 $t > 0$ における重心の位置座標を求めておく。質点1と質点2の初期位置は

$$t = 0 \text{ のとき} \quad (x_1, y_1) = (2l, 0), \quad (x_2, y_2) = (0, 0)$$

であるから、重心の初期位置は

$$t = 0 \text{ のとき} \quad (X, Y) = (l, 0)$$

である。これと上で求めた速度を使って、重心の位置は次のように求まる。

$$t > 0 \text{ で } (X, Y) = (l, \frac{v_0 t}{2})$$

角運動量を考える。今の場合の L_0 の表式

$$L_0 = m \sum_{i=1}^2 ((x_i - X)v_{yi} - (y_i - Y)v_{xi})$$

を用いる。 L_0 の初期値は、上の $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の初期値を用いて

$$t = 0 \text{ のとき } L_0 = mlv_0$$

となる。外力が作用しないから系の角運動量は保存する。よって

$$t > 0 \text{ で } L_0 = mlv_0$$

が得られた。ここで L_0 を、2つの質量 m の質点がそれぞれ半径 l の等速円運動をしている体系の中心に関する角運動量として、回転の角速度 ω を使って表すと

$$L_0 = 2ml^2\omega$$

である。これら L_0 の2つの表式を比較して最終結果を次のように得る：

$$\omega = \frac{v_0}{2l}.$$

【解説】

上記の解答例の角運動量 L_0 を直接求める代わりに、まず原点に関する角運動量 L を求めた後、 $L = XP_y - YP_x + L_0$ によって L_0 を求めてもよい。この式は、平面運動の角運動量についての式 (6.71) に相当する関係式である。

角速度について次のように考えてもよい。 $t = 0$ に撃力を受けて動き出した直後、重心と共に移動する座標系では質点の初期速度が棒と垂直であり、また棒の長さが固定している。外力が作用しないから、 $t > 0$ で両端の質点の運動は重心を中心にした円運動である。重心から端までの距離が l で、円運動の速さが正の回転方向に $v_0/2$ であることから角速度は $\omega = v_0/2l$ と求まる。外力が作用しないことから角運動量が保存し、したがって角速度 ω の値も保たれる。

【問題のねらい】

第6.5節では質点系の角運動量について学んだ。重心の運動と重心のまわりのそれぞれの質点の運動を分けて扱う方法を学んだ。本問題のように重心のまわりの回転運動を取り上げて考えると、重心を基準にした角運動量が便利であることが実感できよう。

6.6-1

【解答例】

式 (6.102) は惑星の公転周期 T 、軌道の長半径 a 、太陽の質量 M の間に

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

が成り立つことを表している。ここで G は重力定数である。

題意は、地球について $T = 365.256$ 日、 $a = 1.496 \times 10^{11}$ m、既に式 (3.39) で与えられ、式 (6.67) の下でも用いた $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ を用いて M の数値を求めることである。ここで、1日 = $24 \times 60 \times 60$ s の換算を用いる。上の式 (6.102) から導いた式

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

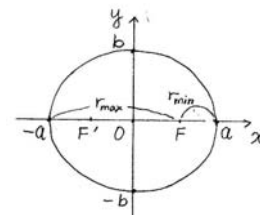
にそれらの数値を代入して、有効桁数4桁の計算をする。結果は $M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ となる。

6.6-2

【解答例】

xy 平面で中心を原点に置き長軸を x 方向に置いた楕円を使って、楕円についての基本的な性質を整理しておく。長軸の長さを $2a$ 、端軸の長さを $2b$ とする。ここで $a > b$ としている。この楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



である。2つの焦点 F, F' の座標は $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ である。それぞれの焦点から楕円周上の任意の一点までの距離の和は一定値 $2a$ である。

(a)

太陽が惑星の楕円軌道の焦点 F の位置にあるとする。焦点から軌道までの最近点と最遠点は長軸の両端である。したがって、 $r_{\max} + r_{\min}$ はちょうど長軸の長さ $2a$ に等しい。よって、

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$$

である。次に、点 $(a, 0)$ は周の上で焦点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ からの最近点であるから、 $r_{\min} = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ 、点 $(-a, 0)$ は周の上で焦点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ からの最遠点であるから、 $r_{\max} = \sqrt{a^2 - b^2} - (-a)$ 、この式の辺々を掛け合わせて、 $r_{\max}r_{\min} = a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2$ となる。よって求める結果は

$$b = \sqrt{r_{\max}r_{\min}}$$

である。

(b)

ケプラーの第2法則は面積速度が一定であることをいうが、上の図の場合に式で表すと次のようになる。焦点 F を改めて原点にとり、原点から惑星までの距離を r 、惑星の位置の偏角を φ 、とすると、ケプラーの法則は、 $r^2\dot{\varphi}$ が一定であることを保証する。この値を教科書の本文の式 (6.75) に従って面積速度 h で表すと、

$$r^2\dot{\varphi} = 2h \quad (\text{一定})$$

である。 $r = r_{\min}$ のときに速度が最大で $v_{\max}$ であることが与えられている。その時速度 $\mathbf{v}$ は動径 $\mathbf{r}$ に垂直であるので、速さを v とすると $\dot{\varphi} = v/r$ が成り立ち、次が成り立つことが分かる：

$$r_{\min}^2 \frac{v_{\max}}{r_{\min}} = 2h, \quad \Rightarrow \quad r_{\min}v_{\max} = 2h.$$

$r = r_{\max}$ のときに速度が最小で $v_{\min}$ であることが与えられている。その時も速度 $\mathbf{v}$ は動径 $\mathbf{r}$ に垂直であって $\dot{\varphi} = v/r$ であるので上と同様に次が成り立つことが分かる：

$$r_{\max}^2 \frac{v_{\min}}{r_{\max}} = 2h, \quad \Rightarrow \quad r_{\max}v_{\min} = 2h.$$

公転周期 T は楕円の面積 πab を面積速度で割ると得られ、

$$T = \frac{\pi ab}{h}$$

である。この分母の h を上で求めた2通りの式を使って消去し、整理するとそれぞれから

$$v_{\max} = \frac{2\pi ab}{Tr_{\min}}, \quad v_{\min} = \frac{2\pi ab}{Tr_{\max}}$$

が得られる。この a, b に問 (a) で求めた表式を代入してそれぞれから

$$v_{\max} = \frac{\pi(r_{\max} + r_{\min})}{T} \sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}}, \quad v_{\min} = \frac{\pi(r_{\max} + r_{\min})}{T} \sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}}$$

を得る。

6.6-3

【解答例】

本節の p.108 で、2 個の質点が互いに万有引力を及ぼしあう体系の運動方程式を考察した。重心は静止または等速に直線運動して、相対座標は、2 つの和を質量とする質点が静止してその周りを万有引力によって、換算質量をもった質点として運動をする、と考えればよいことが分かった。p.108 から p.110 にかけて運動方程式を用いてケプラーの法則を導いたがその際、2 質点の一方が太陽で他方が惑星の場合にはそれらの質量の比が十分に大きいから質量の和を太陽の質量とみなし、重心の位置を太陽の位置とみなし、相対座標を太陽を基準とした惑星の位置とみなすことができるとした。

本問題においては、相対座標の運動方程式 (6.84) において、 M_1 が冥王星の質量であり、 m_2 が衛星のカロンの質量である。式 (6/85)～式 (6.102) において $M = M_1 + m_2$ 、 $m = M_1 m_2 / (M_1 + m_2)$ と読み替え、「惑星の運動」を「相対座標の運動」と読み替える。相対座標の運動は楕円軌道を描き、その運動の周期 T は式 (6.102) に相当する次を満たすことから、質量の和を求める表式が得られる：

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + m_2)} \Rightarrow M_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}.$$

ここで、 a は軌道の長半径、 G は万有引力定数であり、数値は既に式 (3.39) で与えられ、式 (6.77) の下でも用いたように $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ である。問題に与えられた $a = 19,640 \text{ km}$ と $T = 6.3872 \text{ day}$ を代入して計算すると冥王星とカロンの質量の和は $1.471 \times 10^{22} \text{ kg}$ と得られる。

【解説】

この問題の位置づけは、p.108～110 で説明されている太陽と惑星の運動の問題では太陽の質量としていた M が 2 質点の質量の和であったことに注意を向けるところにある。したがって、単に式 (6.102) に与えられた数値を代入するだけではなく、なぜ質量の和が用いられているのかを思い起こすことが大切である。

なお、結果の質量の和は地球の質量に比べるとはるかに軽く、p.50 の問題 3.6-2 に与えられた地球の質量 $5.9725 \times 10^{24} \text{ kg}$ を用いると、

$$(\text{冥王星とカロンの質量の和}) = 0.00246 \times (\text{地球の質量})$$

である。

問題文の中ではカロンの冥王星の周りを半径 $a = 19,640 \text{ km}$ の円運動をするを書いてあるが、実際にはカロンは冥王星とカロンの体系の重心の位置を中心とした円運動をしていて、その半径はカロンと冥王星の間の距離よりも少し小さいと考えられる。その場合冥王星は体系の重心を中心とする小さな半径の円運動をする。これらの円運動の半径がそれぞれ分かるとそれぞれの質量が分かる。

6.6-4

【解答例】

地球の軌道円の半径を a_E 、火星の軌道円の半径を a_M と記す。この火星ロケットの運動は、地球からの離脱と火星への着陸の部分を除けば、あたかも惑星として太陽を焦点とする楕円軌道をたどる運動である。軌道の楕円は近日点で地球の軌道と接し、遠日点で火星の軌道と接して、軌道の長半径を a_R と記すと、 $2a_R = a_E + a_M$ が成り立つ。よって、与えられている地球と火星の軌道半径の関係から地球軌道半径の軌道半径とロケットの軌道長半径の関係として次を得る：

$$a_M = 1.52a_E \Rightarrow a_R = 1.26a_E.$$

(a)

ロケットが楕円軌道を一周するとした場合の所要時間を T_R とおき、地球の公転周期の $T_E = 365$ 日を使うと、ケプラーの第 3 法則により、

$$\frac{T_R^2}{a_R^3} = \frac{T_E^2}{a_E^3}$$

が成り立つ。これより、

$$T_R = T_E \sqrt{\frac{a_R^3}{a_E^3}}$$

であり、上で求めた長径の比 1.26 と地球の公転周期の数値から、この値は 516 日と求まる。求める時間は一周の半分であり、地球から火星までの所要時間として 258 日を得る。

(b)

楕円軌道について、問題 6.6-2 で扱った太陽から近日点までの距離と遠日点までの距離を今のロケットの軌道のものとし、近日点における速さを今のロケットの地球軌道における速さとし、

$$r_{\min} = a_E, \quad r_{\max} = a_M, \quad v_{\max} = v_R$$

の置き換えをすると、問題 6.6-2 (b) の結果から

$$v_R = \frac{\pi(a_E + a_M)}{T_R} \sqrt{\frac{a_M}{a_E}}$$

が成り立つ。また、地球の速さは円周と公転周期から

$$v_E = \frac{2\pi a_E}{T_E}$$

と表せる。これらの比をとる。その際にケプラーの第 3 法則による T_E/T_R の書き換えと、さらに軌道半径の関係を使った書き換えをする。次のように結果が得られる：

$$\frac{v_R}{v_E} = \frac{T_E}{T_R} \frac{a_E + a_M}{2a_E} \sqrt{\frac{a_M}{a_E}} \Rightarrow \frac{v_R}{v_E} = \sqrt{\frac{a_E^3}{a_R^3} \frac{a_E + a_M}{2a_E}} \sqrt{\frac{a_M}{a_E}} \Rightarrow \frac{v_R}{v_E} = \sqrt{\frac{2a_M}{a_E + a_M}}.$$

与えられている数値を代入して、速度の比として $v_R/v_E = 1.10$ が得られる。これより相対速度の大きさは $|v_R - v_E| = 0.10v_E$ である。

(c)

質量 m のロケットが質量 M の太陽と結んだ方向で太陽から遠ざかる向きに直線軌道を飛行すると、太陽からの距離が r のとき速さが v であるとする、力学的エネルギーの保存を表す関係式

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{一定}$$

が成り立つ。ロケットが地球の位置 $r = a_E$ から出発して火星の軌道に相当する位置 $r = a_M$ に到達したときに速さがちょうど 0 になるような出発時の速さを v_R で表すと、

$$\frac{1}{2}v_R^2 - \frac{GM}{a_E} = 0 - \frac{GM}{a_M} \Rightarrow v_R = \sqrt{2 \frac{GM(a_M - a_E)}{a_E a_M}}$$

となる。ところで地球の位置における公転の速さは、円運動の求心力が太陽からの引力で与えられることから求めることができ、

$$m \frac{v_E^2}{a_E} = \frac{GMm}{a_E^2} \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{GM}{a_E}}$$

が成り立つ。これを上の結果に用いると

$$\frac{v_R}{v_E} = \sqrt{\frac{2(a_M - a_E)}{a_M}}$$

が得られる。数値を代入して、必要なロケットの速さの最小値は $v_R/v_E = 0.827$ となる。

地球は軌道上を速さ v_E で動いているから、地球に乗ったロケットが問題の図 (b) の地球の位置にあたかも静止していた状態から図の火星の位置に向かう軌道をたどるためには、火星の軌道に向かう速度に加えて、地球の公転速度を打ち消すための地球に対する相対速度が必要である。前者の大きさは v_R 、後者の大きさは v_E であり、向きはたがいに垂直だから、両者を合わせた相対速度の大きさ v は次によって求められる：

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_E^2} = 1.3v_E.$$

これは小問 (b) における相対速度の約 13 倍である。

(d)

本書の問題 3.3-2 では地球の重力に逆らって上空に到達するために必要な時間を求めた。ここでも、太陽の引力に逆らって地球の軌道から火星の軌道に到達するために必要な時間を求める。経路と速さは前問 (c) で考えた通りのものである。そこでわかったように、火星の軌道にやっと到達できるような速さで出発したときに、太陽からの距離が r であるときのロケットの速さ v が満たす方程式と、そ

れによって求められた速さ v を距離 r で表した式は、

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{a_M} \Rightarrow v = \sqrt{2\frac{GM(a_M - r)}{ra_M}}$$

である。この式で、 $\sqrt{GM}$ を小問 (c) で使った v_E と a_E との関係式によって消去し、その v_E を小問 (b) で使った a_E と T_E で表す式を用いて消去すると、次の表式が得られる：

$$v = \frac{2\pi a_E}{T_E} \sqrt{2\left(\frac{a_M}{r} - 1\right)} \sqrt{\frac{a_E}{a_M}}.$$

一般に単調な 1 次元運動で速度 v が座標 r の関数であるとき $r = *$ から r までの経過時間は

$$t = \int_*^r \frac{dr}{v(r)}$$

である。ロケットが $r = a_E$ を出て $r = a_M$ に達するために要する時間 (日数) を $t = T_{ER}$ と置くと、

$$T_{ER} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_M}{a_E^3}} \int_{a_E}^{a_M} \sqrt{\frac{r}{a_M - r}} dr \quad T_E$$

である。 r についての積分を公式：

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}$$

を用いて評価をして、全体を整理すると次を得る：

$$T_{ER} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_M^3}{a_E^3}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{a_E}{a_M}} + \sqrt{\frac{a_E}{a_M}} \left(1 - \frac{a_E}{a_M} \right) \right) T_E.$$

数値を代入して T_{ER} の値が得られ、地球の軌道から火星の軌道まで太陽と反対の向きに直線的に運動してちょうど火星の軌道で止まる運動に要する時間は、85 日、と求まった。

【解説】

太陽系内を飛行して惑星や小惑星の探査をする観測機器を使った観測が行われるようになっている。宇宙空間の旅には、その軌道を決めるときに太陽からの引力が大きな制約になるし、惑星の引力を利用したスウィングバイもある。そういうことのない地上での日常の平面運動に慣れて、直線的に移動することが最短と思っている人々にとっては意外な事情がある。力学を勉強して、エネルギー・運動量・角運動量の保存則を知っている読者の皆さんだから、ロケットエンジンの負担を考えた時に有利な軌道がどのようなものかを、典型的ないくつかの軌道でしかも簡単に計算ができる場合について試して考えてみることは、有意義であろう。

本問題では正確な数値を求めることを課題にしたが、それは計算力を高める目的のためである。一方で、軌道によって大きな違いがあるときにその違いの程度を大まかに感じることも必要であろう。速度について、また所要日数について、軌道による違いを概算で比較してみてもどうだろうか。

正確な計算のために積分公式の利用は有効である。本問題では上のような公式を利用したが、公式集が近くないときは、 $\sqrt{x/(1-x)}$ の不定積分のように平方根に x と $1-x$ が混在する関数の積分では置換積分を試すといふ。例えば $x = \sin^2 \theta$ とおく。被積分関数は $\tan \theta$ に等しく、また $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ であるから、求める積分は $\int 2 \sin^2 \theta d\theta$ に帰着する。なお、問題 3.3-2 では別の置換積分をしたが、それはここでやったことと同等である。そのときの変数 x を $x = r - R$ で置き換えると本問題の r を変数とする積分に対応する。

第 7 章 剛体の運動

7.1-1

【解答例】

底面は半径 R の円でありその面積 S は $S = \pi R^2$ である。底面積が S で高さ H の錐体の体積 V は $V = HS/3$ 、よってこの円錐の体積は $\pi HR^2/3$ であり、密度を ρ とすると質量 M は

$$M = \frac{1}{3} \pi HR^2 \rho$$

である。

高さが z の位置にあって円錐の軸に垂直な断面 (図のハッチの部分) は円であり、その面積は $\pi(zR/H)^2$ である。この円と、高さが $z + dz$ の位置にある断面の円との間にある円錐の一部分を考える。これを、 dz の 2 次以上の微小量を無視して円筒とみなす。その体積 dV と質量 dM は次の式で与えられる：

$$dV = \pi \left(\frac{z}{H} R \right)^2 dz, \quad dM = \pi \left(\frac{z}{H} R \right)^2 \rho dz$$

この円筒の重心は、対称性から円の中心であり、 dz の程度の微小量を無視すると $(0, 0, z)$ である。

円錐の重心は、軸対称の物体なのでその軸上にある。重心の座標を $(0, 0, C)$ として C を求める。重心の位置を与える公式は、各部分の位置座標に (広がりがあるときはその部分の重心座標に) 部分ごとの質量重みをつけた平均であるから次で与えられる：

$$C = \frac{1}{M} \int_0^H z \pi \left(\frac{z}{H} R \right)^2 \rho dz \Rightarrow C = \frac{1}{M} \frac{1}{4} \pi R H^2 \rho.$$

ここで後の式は z の積分を実行して得られた。この M に上で求めた式を代入して、 $C = 3H/4$ を得る。よって、頂点から底面に向かって $3H/4$ にある円錐の軸上の点が重心である。

【解説】

もしも、重心を与える公式 (7.4) のようにして計算するならば、以下のようになる：

まず質量は体積 V を求める計算により、

$$M = \rho V = \rho \int_{\text{円錐}} dx dy dz = \rho \int_0^H dz \int_{-zR/H}^{zR/H} dx \int_{-\sqrt{(zR/H)^2 - x^2}}^{\sqrt{(zR/H)^2 - x^2}} dy$$

であり、積分の計算をすると、

$$M = \rho \int_0^H dz \int_{-zR/H}^{zR/H} 2 \sqrt{\left(\frac{z}{H} R \right)^2 - x^2} dx = \rho \int_0^H \pi \left(\frac{z}{H} R \right)^2 dz = \frac{\pi}{3} H R^2 \rho$$

が得られる。

次に重心の位置は積分を順次実行して

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{M} \rho \int_{\text{円錐}} z dx dy dz = \frac{\rho}{M} \int_0^H z dz \int_{-zR/H}^{zR/H} 2 \sqrt{\left(\frac{z}{H} R \right)^2 - x^2} dx \\ &= \frac{\rho}{M} \int_0^H z \pi \left(\frac{z}{H} R \right)^2 dz = \frac{\rho}{M} \frac{R^2}{4} H^2 \rho = \frac{3}{4} H \end{aligned}$$

となる。ここで上で求めた M の表式を用いた。

7.1-2

【解答例】

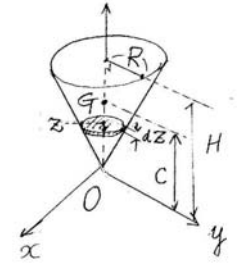
[1]

(1) 円板の重心は円の中心である点 C。

(2) 円板に作用する力：

1) 軸が固定されているから、軸受けからの抗力が C において作用する。大きさと向きは未定。

2) 各点に作用する重力。まとめて重心 C に作用しているとしてよい。大きさ Mg 、向きは鉛直下向きである。



3) ひもの張力。円板との接点に作用する。向きは鉛直下向き、大きさは未定である。これを T とおく。

(3) 重力と抗力の作用線はいずれも C および O を通る。よって C, O のいずれに関してもこれらの力のトルクは 0 である。ひもの張力のトルクは C, O のいずれに関しても $-RT$ である。

[2]

(1) 円板に作用する力：

1) 各点に作用する重力。まとめて重心 C に作用するとしてよい。大きさは Mg 、向きは鉛直下向きである。

2) ひもの張力。円板との接点に作用する。向きは鉛直上向き、大きさは未定である。これを T とおく。

(2) 重力の作用線は C と O を通る。よって C, O のいずれに関してもトルクは 0 である。ひもの張力による力のトルクは C, O のいずれに関しても $-RT$ である。

7.2-1

【解答例】

(1) 円板 C の質量は無視できるから、体系の慣性モーメント I は円板 D と円板 E の C を通る回転軸に関する慣性モーメント I_D, I_E の和である。それぞれの回転軸は回転台の C を通る回転軸と同じ方向に向いているので平行軸の定理が使える。円板 D の重心まわりの慣性モーメントは I_0 であり、D の質量が M 、C から D の重心までの距離が R であることから、定理により

$$I_D = I_0 + MR^2$$

である。 I_E も同じ表式で表される。よって、求める慣性モーメントは次の式で表される：

$$I = 2I_0 + 2MR^2.$$

(2) 回転台が回転しても円板 D と E は台に対して逆向きに回転して、静止した観測者から見ると回転をせず、それぞれの重心が C を中心とする円運動をする。回転をしない剛体の持つ角運動量はその重心の運動による角運動量だけである。これは本文の式 (7.26) で $L_0 = 0$ の場合である。半径 R で角速度 ω の円運動をする質量 M の質点がある円板の中心周りの角運動量は、 $MR^2\omega$ であり、体系には 2 個の質点があるから体系の角運動量 L は

$$L = 2MR^2\omega$$

である。

7.3-1

【解答例】

平行軸の定理 (p.122 式 (7.37)) から、この図 (7.15) の場合には $I_z^0 = MR^2/2$ を用いて

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2$$

である。p.127 の図 7.12 の物理振り子の G は今の円板の中心にあたり、その長さ h は今の ℓ にあたる。同じように、振れ角を φ とすると、 φ のみたす運動方程式は、トルクが $-Mg\ell \sin \varphi$ なので、

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mg\ell \sin \varphi \Rightarrow I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mg\ell \varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg\ell}{I_z} \varphi$$

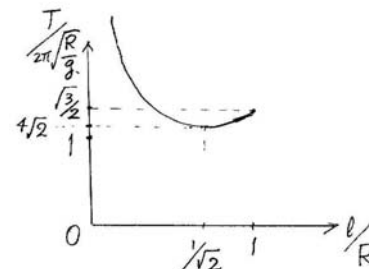
である。振れ角が小さいから $\sin \varphi$ を φ で置き換えた。これは単振り子の運動方程式であるから、第 2.6 節の式 (2.45) を解いたときと同様に、周期として

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mg\ell}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + 2\ell^2}{2g\ell}}$$

を得る。ここで上の I_z の表式を代入した。これを R に対する ℓ の比の関数として考察するため次の表式にする：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{R}{2\ell} + \frac{\ell}{R} \right)}.$$

これを右のグラフに示す。横軸は R を単位とした ℓ 、縦軸は $2\pi\sqrt{R/g}$ を単位とした T である。周期 T は回転軸と重心の距離が 0 の極限で無限に長くなり、 ℓ とともに減少して $\ell = R/\sqrt{2}$ で最小値 $2\pi\sqrt{\sqrt{2}R/g}$ をとり、増加に転じて $\ell = R$ のとき、 $T = 2\pi\sqrt{3R/2g}$ となる。



【解説】

結果は、円板の中心に円板すべての質量が集中しているとした単振り子の周期 $2\pi\sqrt{R/g}$ を基準にすると、常にそれよりも長い周期をもつことを示している。円板の中心を回転軸にすると、円板は振り子にならず、つり合って静止してしまう。よって $\ell \rightarrow 0$ で $T \rightarrow \infty$ である。

解答例の中で $\ell = R$ の場合の T を答えているが、これは円板の縁に細工をして軸を取り付けることができることを想定している。

7.3-2

【解答例】

図 (a) のように質量 m の質点 (人) が半径 R の円 C_1 を反時計回りに歩きはじめる。この円は、半径 $2R$ の円板 C_2 の上に描かれていて、円板の中心を通り円板の円周に接している。この円は円板が移動するとそれにつれて移動することに注意する。円板は中心を軸として回転できるようになっているので、人がコースを歩くために円板を蹴ることにより発生するトルクにより回転をはじめる。円板の質量は M である。

軸となる点を原点にとり、はじめに歩き出す方向が y 軸負の方向になるように y 軸を取り、歩くコースの円の中心を A と記し、質点 (人) の位置を P、円板の周との接点を Q と記す (図 (b), (c) に示す) と、時刻 $t = 0$ では P, A, Q は x 軸上にある。

出発直後は人が円板を蹴る力の作用線が O を通るから、原点に関するトルクは 0 であるが、次第にコースが進行左に曲がるため、蹴る方向 (コース円の接線方向) が傾き、蹴る力の向きは原点に向かってやや左寄りになり、そのため蹴る力の原点に関するトルクは負である。これにより円板は負の方向に回転する。

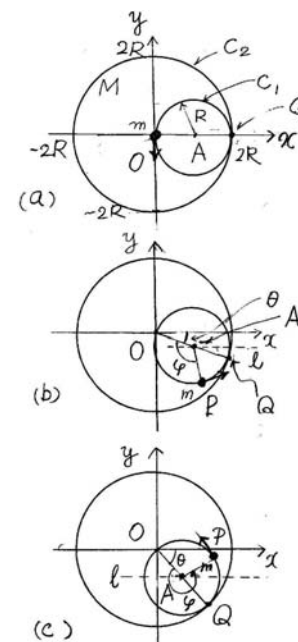
図 (b), (c) に記すように

φ : 人が円 C_1 を回った角度

$\Rightarrow \vec{AO}$ を基準にした $\vec{AP}$ の偏角

θ : 円板の回転した角度

$\Rightarrow \vec{OQ}$ の x 軸基準の偏角の符号を変えたもの



とする。本問の設定では人がコースの C_1 を一周する間を通じて $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\theta \geq 0$ であると想定されるが、実際に計算によって示される。

質量 m の質点と質量 M の円板は互いに力を作用しあうが、外力は円板の中心を原点に固定するための拘束力以外には作用しない。拘束力は原点で作用するから、原点に関するトルクは 0 であり、

したがって人と円板からなる系の角運動量は保存するが、初めに静止していたから、系の角運動量は常に0である。このことを使うと、方程式が得られ、それにより運動の特徴が分かる。

全角運動量は人の位置Pの運動による角運動量と、円板の回転による角運動量の和である。まず前者を求める。そのためにPの位置座標を表す式を求める。図(c)において、 $\overrightarrow{OA} = R$ であるので、

$$\overrightarrow{OA} = (R \cos \theta, -R \sin \theta),$$

図(b)において、Aを通るx軸に平行な直線 ℓ が $\overrightarrow{AP}$ となす角は $\varphi - \theta$ であるから、

$$\overrightarrow{AP} = (-R \cos(\varphi - \theta), -R \sin(\varphi - \theta))$$

である。よって人の位置を表すベクトル $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ と速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ は次のように求まる：

$$\mathbf{r} = R(\cos \theta - \cos(\varphi - \theta), -\sin \theta - \sin(\varphi - \theta)),$$

$$\mathbf{v} = R(-\dot{\theta} \sin \theta + (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \sin(\varphi - \theta), -\dot{\theta} \cos \theta - (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \cos(\varphi - \theta)).$$

求める角運動量は $\mathbf{L}_P = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ で定義されているから、上の表式を代入して計算の結果、そのz成分を L_P と記すと次が得られる：

$$L_P = mR^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta})(1 - \cos \varphi).$$

また、円板の角運動量のz成分を L_C と記すと、負の回転であることと、 $\dot{\theta} > 0$ としていることから、次が得られる：

$$L_C = -I\dot{\theta}, \quad \text{ただし} \quad I = 2MR^2.$$

系の角運動量は常に0であることから、

$$L_P + L_C = 0, \quad \Rightarrow \quad mR^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta})(1 - \cos \varphi) - 2MR^2\dot{\theta} = 0$$

が成り立つ。これを $\dot{\theta}$ について解くと次の方程式が得られる：

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{m\dot{\varphi}(1 - \cos \varphi)}{M + m(1 - \cos \varphi)}.$$

この方程式を時間 t で積分する。題意より φ は時刻 $t = 0$ の $\varphi = 0$ から増加し時刻 $t = t_0$ の $\varphi = 2\pi$ に達する。この間の θ の増分を $\Delta\theta$ と記すと、積分の計算は

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \frac{m(1 - \cos \varphi)}{M + m(1 - \cos \varphi)} \frac{d\varphi}{dt} dt \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{m(1 - \cos \varphi)}{M + m(1 - \cos \varphi)} d\varphi$$

積分公式 $\int_0^{2\pi} 1/(a - \cos \varphi) d\varphi = 2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$ を用いて右辺の定積分は計算できる：

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{M}{M + m(1 - \cos \varphi)} \right) d\varphi = \pi - \frac{M}{2m} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(M/m + 1) - \cos \varphi} d\varphi \\ &= \pi - \frac{M}{m} \frac{\pi}{\sqrt{(M/m)^2 + 2M/m}} = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2m/M}} \right). \end{aligned}$$

よって円板の回転角 $\Delta\theta$ は次のように求まる：

$$\Delta\theta = \pi \left(1 - \sqrt{\frac{M}{M + 2m}} \right).$$

7.4-1

【解答例】

例題 7.4-2 で斜面を転がり落ちる円柱の加速度を求めた。それにならって、転がり落ちる物体の加速度をその物体の慣性モーメント I を用いて表す式を求めておく。例題で円柱について用いた時と同じように、物体の質量を M 、円柱・円筒あるいは球体の半径を R によって表す。重心が傾き α の斜面に沿って降りる速さを図 7.21(a) のように V 、転がりの角速度を ω で表す。

物体に作用する力は、図 7.21(b) のように摩擦力と重力それに斜面から受ける垂直抗力である。摩擦力の大きさを F 、垂直抗力の大きさを F_n で表す。重力の斜面方向の成分は $Mg \sin \alpha$ であるから、斜面に沿っての速度についての運動方程式は

$$M\dot{V} = Mg \sin \alpha - F \quad (25)$$

である。斜面に垂直な力 F_n と $Mg \cos \alpha$ はつりあう。物体は滑らずに斜面を転がるから、

$$\omega = \frac{V}{R} \quad (26)$$

が成り立つ。回転軸に関するトルクは、図 7.21(b) に示すように作用線が軸を通らない摩擦力によるものだけであり、その大きさは FR であるので、回転の運動方程式は次である：

$$I\dot{\omega} = FR. \quad (27)$$

式 (26) を式 (27) に代入し、それを解いて得られる F を式 (25) に代入して整理すると、次のように斜面に沿っての運動の加速度が求まる：

$$\dot{V} = \frac{MgR}{I + MR^2} \sin \alpha. \quad (28)$$

これによると、 M 、 R が同じである物体について比較すると慣性モーメント I が小さいほうが加速度が大きくなり、決まった距離を進むに必要な時間は短いことが分かるので、所要時間の短い順序は慣性モーメントの小さい順序に一致する。

一様な密度を持つ円柱A、中空円筒B、球Cについて同じ質量同じ半径を持つ場合に比較すると、式 (7.46)、(7.45)、(7.44) により、 $I_C < I_B < I_A$ である。よって求める順序は、 $t_C < t_B < t_A$ となる。

【解説】

斜面を転がり落ちる物体について、その加速度は転がらずに滑る場合と比較して必ず小さくなる。これは式を立てなくても分かることである。その際に、力に対して加速度は慣性質量の小さなもので大きいことに対応して、トルクに対して回転の加速度は慣性モーメントの小さなもので大きいことは式を立てなくても分かることである。したがって、時間の短さの順番を答えるためには、慣性モーメントの小さい順番を言えばよい。解答例では、順番だけでなく、数量的な評価までできることを示した。

7.4-2

【解答例】

図 (a) には時刻 $t = 0$ の衝突時の円柱の断面を示し、円盤状の断面の重心をGで記す。図中の ω と v は衝突直前の値を指す。円柱が転がってきて段差のカドCにぶつかる時、台からの力を受けて円柱は瞬間的に運動の向きを変える。この短時間の過程で、作用する力は台と円柱が互いに押し合う力である。この力の作用線は点Cを通るから、Cのまわりの力のモーメントは0であり、円柱の点Cに関する角運動量は保存される。このことを用いて図の角度 θ について、直後の角速度が分かる。

衝突直前までは転がる速さは一定値 v であり、転がりの角速度 ω とは

$$\omega = v/R$$

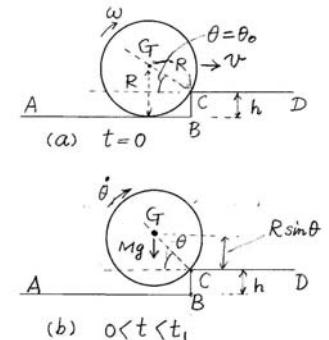
の関係にある。図の θ は点Cから重心Gへ方向が水平方向となす角を表す変数であり、衝突の瞬間の値を $\theta = \theta_0$ と記すと、図より

$$\sin \theta_0 = \frac{R - h}{R} \quad (29)$$

である。なお、 θ の符号はこの図のような場合に正にとる。

円柱の軸に関する慣性モーメントを I_0 で表すと、式 (7.46) から $I_0 = MR^2/2$ である。今の回転軸を表すCに関する慣性モーメントを I で表すと、平行軸の定理から次のようにして I が求まる：

$$I = I_0 + MR^2, \quad \Rightarrow \quad I = \frac{3}{2}MR^2. \quad (30)$$



衝突の直前の角運動量を L_C^- と記す。これは重心のまわりの角運動量 L_0 と重心の運動による点 C のまわりの角運動量 L_G との和であり、

$$L_0 = I_0\omega, \quad L_G = Mv(R-h)$$

より、 ω の表式を用いて、

$$L_C^- = \frac{1}{2}MR^2\frac{v}{R} + Mv(R-h) = \frac{1}{2}M(3R-2h)v \quad (31)$$

である。また、衝突直後の $\dot{\theta}$ を $\dot{\theta}_0$ と記し、衝突直後の円柱の点 C のまわりの角運動量を L_C^+ と記すと、式 (30) の慣性モーメントを用いて

$$L_C^+ = I\dot{\theta}_0$$

である。衝突に際して運動量保存則を適用すると、これは式 (31) に等しい。よって次が得られる：

$$\dot{\theta}_0 = \frac{3R-2h}{3R^2}v. \quad (32)$$

その後、円柱は段差のカドの点 C で台と接触して滑らずに重心が持ち上がる運動をするが、これは剛体の固定軸のまわりの回転運動である。ただし固定軸は図 (b) に示された断面図に C と記された、断面に垂直な直線である。運動は、可能であれば、重心 G がカドの点 C の鉛直上方に達するまで続く。その時刻を $t = t_1$ と記す。その後は円柱は台の上を D に向かって転がる。可能性は、円柱の持つ運動エネルギーが円柱の重心を段差の高さ h だけ持ち上げるに十分であるかどうかにかかっている。

剛体の回転の運動エネルギーは $I\dot{\theta}^2/2$ であり、剛体の位置エネルギーは重心の台 CD からの高さ $R\sin\theta$ で与えられるので、エネルギー保存則は

$$0 < t < t_1 \quad \text{において} \quad \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + RMg\sin\theta = E \quad (\text{一定})$$

である。衝突直後 $t = 0$ では式 (29), (30), (32) より、 $t = t_1$ では $\theta = \pi/2$ であるから、それぞれ

$$E = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}MR^2\frac{(3R-2h)^2}{9R^4}v^2 + Mg(R-h), \quad E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + MgR,$$

である。この 2 つを等しいと置いて、整理すると次を得る：

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{M}{12R^2}(3R-2h)^2v^2 - Mgh.$$

運動が可能であるためには左辺が正であるから右辺が正でなければならない。条件式を v について解くと、 $t \geq t_1$ で円柱が右方向に転がって行ける条件は次のように求まる：

$$v > \frac{2R\sqrt{3gh}}{3R-2h}.$$

7.4-3

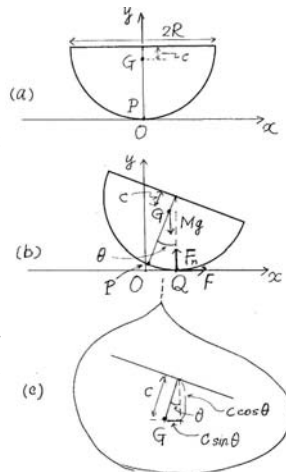
【解答例】

図 (a) につり合いの状態を示す。このとき半球が接している床上の点を原点とし、図に示すように x, y 軸をとる。つり合っているときに原点にある半球上の点を P で表す。半球の重心を G と記す。

初め少し傾けた後に手を離すと半球は床の上を転がるように回転し、揺れる。ある瞬間の半球の位置と向きを図 (b) に示す。このとき半球面が床に接する点を Q で表す。P は半球と共に動き、Q は床面を移動する。P と G を結ぶ直線が鉛直方向となす角を θ とする。 θ の符号は重心の x 座標の符号と同じになるようにとる。

半球に作用する力は重力、床からの垂直抗力、床との摩擦力である。重力は重心の位置を作用点として大きさ Mg で下向きである。垂直抗力は点 Q で作用し、大きさを F_n とする。摩擦力は、半球が滑らずに転がるために必要である。摩擦力の大きさを F とし、符号は右向きを正とする。

重心の位置は例題 7.1-1 で求めたように、半球の中心から半球の対称軸に沿って



$$c = \frac{3}{8}R$$

離れたところである。よって

$$\overline{GP} = \frac{5}{8}R$$

である。半球の重心に関する慣性モーメントを I_0 と記す。式 (7.47) により次のように与えられる：

$$I_0 = \frac{83}{320}MR^2.$$

重心の位置座標 (X, Y) は図 (c) によって分かるように、 $X = \overline{OQ} - c\sin\theta = R\theta - c\sin\theta$, $Y = R - c\cos\theta$ であるが、揺れの振幅が小さいから $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$ とすると、次で表される：

$$X = \frac{5}{8}R\theta, \quad Y = \frac{5}{8}R.$$

重心の運動方程式は、 x 方向には摩擦力、 y 方向には重力と垂直抗力が作用するから：

$$M\ddot{X} = F, \quad M\ddot{Y} = F_n - Mg \Rightarrow \frac{5}{8}MR\ddot{\theta} = F, \quad F_n = Mg. \quad (33)$$

重心のまわりの回転運動の方程式を導く。垂直抗力によるトルク N_{Fn} と摩擦力によるトルク N_F は微小振動の近似の下でそれぞれ次のように表せる：

$$N_{Fn} = \frac{3}{8}RF_n\theta, \quad N_F = \frac{5}{8}RF.$$

今の θ の定義では半球の回転は反時計回りに $-\theta$ であるので、回転角加速度は $-\ddot{\theta}$ であることに注意すると、半球の角運動量の運動方程式は次のようになる：

$$-I_0\ddot{\theta} = \frac{3}{8}RF_n\theta + \frac{5}{8}RF. \quad (34)$$

式 (33) と式 (34) から F_n と F を消去、上に記した I_0 の表式を用いて、

$$-\frac{83}{320}MR^2\ddot{\theta} = \frac{3}{8}RMg\theta + \left(\frac{5}{8}R\right)^2M\ddot{\theta}, \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{15g}{26R}\theta.$$

が得られた。これは単振動の方程式であり、振動の周期 T はこの右辺を $-\omega^2\theta$ と置いて得られる ω から $T = 2\pi/\omega$ により求められる：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}.$$

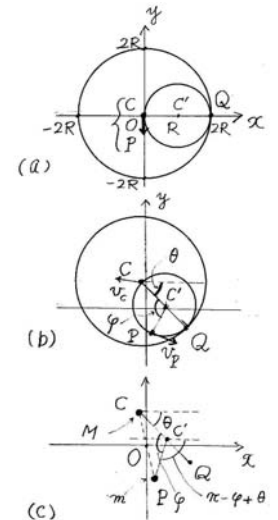
7.4-4

【解答例】

図 (a), (b) に問題文の図 7.26 に対応して初期配置と人が円 C' 上を角度 φ だけ回った配置とを図示する。問題文に与えられた記号の他、Q は台の円 C と歩くコース円 C' の接点、図 (b) に示すように v_P を人 P の歩く速度、 v_C を円板 C の移動速度とする。ここでそれぞれの円の中心も C, C' で表している。 φ と θ の符号は図 (b) の配置のとき $\varphi > 0, \theta > 0$ とし、初期値は $\varphi_0 = 0, \theta_0 = 0$ である。

円板と人からなる系に外力が作用しないから、初めに止まっていた重心は静止したままであり、初めに回っていなかった系の角運動量は 0 のままである。ここで系の重心は円板の重心 C と質点 P を結ぶ線分上にある。初期時刻に P, C は一致し、系の重心にある。

初めに P が動く方向は y 軸の負の向きであるから、初めの C の動きは y 軸の正の向きである。P の動きは次第に進行左方向に曲がり図 (c) に示すように x 軸正の向きへの動きが含まれるようになり、したがって C の動きには x 軸負の向きへの動きが含まれるようになる。P が進むときに円板を蹴る力は作用線が P から C に向かって左側を通るから、円板の回転は時計回りになる。



Pの動きをCをもとにした相対位置ベクトルで記述することにし、これを $\mathbf{r}$ で表す。Pの位置ベクトルを $\mathbf{r}_P$ 、Cの位置ベクトルを $\mathbf{r}_C$ とすると

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C = \mathbf{r}. \quad (35)$$

である。図(c)に示すように系の重心は原点に静止しているから次の関係が成り立つ：

$$\frac{m\mathbf{r}_P + M\mathbf{r}_C}{m + M} = 0.$$

これらより、次が導ける：

$$\mathbf{r}_P = \frac{M}{M+m}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_C = -\frac{m}{M+m}\mathbf{r}. \quad (36)$$

ここで $\mathbf{r}$ を既に定義したPの回転角 φ と円板の回転角 θ で表しておく：図(c)に示すように $\overrightarrow{CC'} = R(\cos\theta, -\sin\theta)$, $\overrightarrow{C'P} = R(-\cos(\varphi-\theta), -\sin(\varphi-\theta))$ であることを用いて、

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'P} = R(\cos\theta - \cos(\varphi-\theta), -\sin\theta - \sin(\varphi-\theta)) \quad (37)$$

が得られる。

これより、系の角運動量を φ と θ とそれらの時間微分を用いて表し、角運動量保存則により得られる関係式から、 φ と θ との変化分の関係を求める。以下では角運動量は z 軸の向きのベクトルとして求められる。まず、円板の原点回りの角運動量のうち、重心の運動によるものは $\mathbf{L}_C = M\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C$ である。質点Pの原点回りの角運動量は、 $\mathbf{L}_P = m\mathbf{r}_P \times \mathbf{v}_P$ である。ここで $\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C$, $\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P$ である。式(36)を代入して計算すると、

$$\mathbf{L}_C + \mathbf{L}_P = \frac{Mm}{M+m}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

が得られる。ここで、式(37)を時間で微分して

$$\dot{\mathbf{r}} = R(-\dot{\theta}\sin\theta + (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\sin(\varphi - \theta), -\dot{\theta}\cos\theta - (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\cos(\varphi - \theta))$$

である。次に、円板の原点周りの角運動量は円板の重心まわりの回転による角運動量 $-I\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ を $\mathbf{L}_C$ に加えて得られる。ただし $\mathbf{e}_z$ を z 方向の基本ベクトルとする。ここで、 I は円板の重心を通り円板に垂直な回転軸に関する慣性モーメントを表し、図(b)から円板の回転は $\theta > 0$ の時に時計まわりであることに注意する。円板の半径 $2R$ と質量 M によって、 $I = 2MR^2$ である。(式(7.42)による。)

このようにして、系の角運動量 $\mathbf{L}$ の z 成分 L の表式は

$$L = -I\dot{\theta} + \frac{Mm}{M+m}R^2(\dot{\varphi} - 2\dot{\theta})(1 - \cos\varphi)$$

と求まった。これが初期値に等しいことから次の方程式が得られる：

$$L = 0 \Rightarrow -I\dot{\theta} + \frac{Mm}{M+m}R^2(\dot{\varphi} - 2\dot{\theta})(1 - \cos\varphi) = 0$$

これを $\dot{\theta}$ について解くと、

$$\dot{\theta} = \frac{\frac{MmR^2}{M+m}\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi)}{I + 2\frac{MmR^2}{M+m}(1 - \cos\varphi)} \quad \text{ただし} \quad I = 2MR^2$$

が得られる。問題7.3-2で行ったようにこの式を時間 t で積分することにより、 φ が0から 2π まで変化したときの θ の変化分 $\Delta\theta$ を求めることができる。

その結果、人が円C'を反時計回りに一周するとき、円板Cは時計回りに

$$\Delta\theta = \pi \left(1 - \sqrt{\frac{M+m}{M+3m}} \right)$$

だけ回転することが求められた。

【解説】

円板の向きは、最後に元の向きからある角度だけ回って終わるが、円板の中心は、原点に戻る。これは重心の位置が動かないからである。

7.5-1

【解答例】

歳差運動についての本文の説明によると、こまの質量を M とし、こまの軸を支える点と重心の距離を ℓ 、こまの慣性モーメントを I 、回転角速度を ω とすると、こまが歳差運動をして先端が円運動をする角速度 $d\varphi/dt$ は式(7.78)のように求められた。それを記すと

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mg\ell}{I\omega}.$$

である。この関係式を用いると、与えられた数値から未知の数値が求められる。歳差運動の周期が3秒であるから、 φ は3秒間で 2π 変わり、

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{3}\text{s}^{-1},$$

また、

$$M = 62\text{g}, \ell = 35\text{mm}, I = 2.8 \times 10^4\text{g mm}^2, g = 9.8\text{m s}^{-2}$$

である。毎秒の回転数を n とすると $\omega = 2\pi n$ である。上の式を整理して数値を代入し、

$$n = \frac{Mg\ell}{2\pi Id\varphi/dt} = \frac{35\text{mm} \times 62\text{g} \times 9.8 \times 10^3\text{mm s}^{-2}}{2\pi \times 2.8 \times 10^4\text{g mm}^2 \times 2\pi/3\text{s}^{-1}} = 58\text{s}^{-1},$$

を得る。よって、歳差運動の周期が3秒であることからこまの回転数が毎秒58回転であることが分かった。

7.6-1

【解答例】

本文の7.6節の冒頭で述べられているつり合いの条件式(7.79)を用いて図7.31の棒の場合に式(7.80), (7.81)が得られている。式(7.81)では点Oに関するトルクを用いた。ここでは点Aに関するトルクを使って同じ結果を導く。図に示されているすべての力について以下に整理する：

作用点	力の大きさ	点Aから作用線までの距離	トルクの正負
点A	F_1, R_1	0	,
重心	Mg	$\frac{1}{2}\ell \sin\theta$	−,
点B	F_2	$\ell \cos\theta$	−,
点B	R_2	$\ell \sin\theta$	+.

よって、トルクの和がゼロになる条件は次の式である：

$$\frac{1}{2}Mg\ell \sin\theta + F_2\ell \cos\theta = R_2\ell \sin\theta \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2}Mg + F_2 \cot\theta.$$

力の水平方向の成分のつり合いの条件式は式(7.80)のように

$$F_2 = R_1$$

であるから、ここで導いた条件式は式(7.81)と一致する。

【解説】

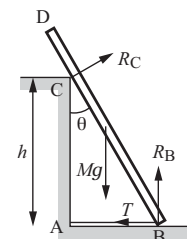
テキストに述べられているように、基準点を変えてもトルクのつり合い条件式が同等であることは力のつり合いに基づく。本問題ではそのことを実際の例で示したものである。

7.6-2

【解答例】

図に示すように、段差の高さを A とし、立てかけた棒の下端を B とする。 AB 間をひもで結ぶ。段差の肩を C とし、棒の他の端を D とする。棒が段差の鉛直面 AC となす角を θ とする。略解では傾き角を α としたが、ここでは θ を使う。ひもの張力を T とする。段差の高さを h 、棒の長さを ℓ とし、質量を M とする。棒は一様であるとするから中点が重心である。

どの場所も滑らかであることから、床・段差から受ける力は面に垂直に作用する。



よって、Cにおける抗力は棒に垂直、Bにおける抗力はAB面に垂直である。

つり合っているから、棒に作用する力の和は0である。水平方向、鉛直方向それぞれの成分を記す：

$$R_C \cos \theta - T = 0, \quad R_C \sin \theta - Mg + R_B = 0. \quad (38)$$

また、点Bに関するトルクの和が0である：

$$-R_C \frac{h}{\cos \theta} + Mg \frac{\ell}{2} \sin \theta = 0. \quad (39)$$

式(39)を R_C について解くと $R_C = (Mg\ell/2h) \sin \theta \cos \theta$ 、これを式(38)の第1の式に代入して整理すると

$$T = \frac{Mg\ell}{2h} \sin \theta \cos^2 \theta. \quad (40)$$

が得られる。これが求めるひもの張力である。

なお、式(38)から $R_B = Mg - T \sin \theta / \cos \theta$ 、よって式(40)より

$$R_B = Mg \left(1 - \frac{\ell \sin^2 \theta \cos \theta}{2h} \right)$$

が得られる。これが棒に作用する床面からの垂直抗力である。

【解説】

与えられた段差、棒に対してひもの長さを変えると傾き角 θ が変わり、ひもの張力が変わる。ごく短いひもに対して張力が小さいことは想像できる。ひもを長くしたときに、どの長さ（どの角度）で張力が最大になるかを考えてみる。

式(40)について θ を変えた時の最大値問題を解く。 $s = \sin \theta$ と置くと $s(1-s^2)$ の最大値問題となるから、 $\sin \theta = 1/\sqrt{3}$ で最大値 $2/3\sqrt{3}$ をとることが分かる。このとき、ABの長さは $h/\sqrt{2}$ 、BCの長さは $\sqrt{3}/2h$ である。

ただし、そのときDがCに届いているために棒がそのときの $\overline{BC}$ よりも長くなくてはならない。長さについて、 $\sqrt{3}/2h < \ell < 2h$ が条件になる。もしも $\ell < \sqrt{3}/2h$ であれば、張力はひもの長さとともに単調に増加し、DがCにちょうど乗るほどに棒が傾いても張力は増え続けて、途中で極大になることはない。

(棒があまり長いと小さな θ の時に重心がCより上になる可能性があり、すると棒が回転して横になってしまうから、 $\theta = 0$ でも横に倒れることがないように $\ell < 2h$ を想定していると考ええる。また棒の先の点Dが常に段差の肩Cよりも上になくなくてはならないことから $\ell > h$ であるものとする。)

7.6-3

【解答例】

はしごが倒れない条件は、重力によってはしごに作用する大きさ Mg の力、人に作用する大きさ mg の力、壁から受ける大きさ R_1 の垂直抗力、床から受ける大きさ R_2 の垂直抗力と大きさ F_2 の摩擦力、の和が0であり、かつ、トルクの和が0になることである。原点と位置A,Bを図のようにとり、人のBからの距離を x で表す。はしごの長さを 2ℓ で表し、中点が重心であるとする。はしごの傾き角を θ で表す。

力の和の水平方向と鉛直方向それぞれの成分が0になるから、

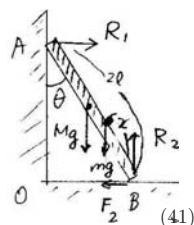
$$R_1 - F_2 = 0, \quad (M+m)g - R_2 = 0 \quad (41)$$

が成り立つ。点Bに関するトルクが0であるから、次が成り立つ：

$$-2\ell R_1 \cos \theta + (Mg\ell + mgx) \sin \theta = 0 \quad (42)$$

点Bで床に乗った物体が滑り出さないための条件は $F_2 < \mu R_2$ である。以下では、このようなつり合いがなりたつ限界の x を次の条件によって求める：

$$F_2 = \mu R_2. \quad (43)$$



この関係と式(41)から F_2 と R_2 を消去すると $R_1 = (M+m)g\mu$ 、これを式(42)に代入すると

$$-2(M+m)g\ell\mu \cos \theta + (M\ell + mx)g \sin \theta = 0$$

を得る。この式の両辺を $mg\ell$ で割って整理すると次を得る：

$$\frac{x}{\ell} = 2\mu(1 + \frac{M}{m}) \cot \theta - \frac{M}{m} \quad (44)$$

この x の値までははしごの足が滑り出して倒れることはない。

ところで題意から $0 \leq x \leq 2\ell$ であるので、右辺が負であるか2を超えているかの場合にはこの式が成り立つことがない。

まず、式(44)の右辺が正であることは次のように確かめられる：

$$\text{右辺} = \frac{1}{\tan \theta} \left(\frac{M}{m}(2\mu - \tan \theta) + 2\mu \right)$$

において括弧の中の第1項は問題に与えられている θ の条件 $\tan \theta < 2\mu$ により正であり、第2項では $\mu > 0$ である。

次に、式(44)の右辺が2を超えない条件を求めると：

$$\frac{1}{\tan \theta} \left(\frac{M}{m}(2\mu - \tan \theta) + 2\mu \right) - 2 \leq 0, \quad \Rightarrow \quad (2\mu - \tan \theta) \left(\frac{M}{m} - 2 \frac{\tan \theta - \mu}{2\mu - \tan \theta} \right) \leq 0.$$

ここで、最後の式の括弧内の $(\tan \theta - \mu)/(2\mu - \tan \theta)$ は、与えられた傾き角 θ の条件 $\mu < \tan \theta < 2\mu$ により正である。

以上をまとめる。

1. 人の体重がはしごの質量に比べて十分小さく、次の条件が満たされるとき：

$$\frac{M}{2m} > \frac{\tan \theta - \mu}{2\mu - \tan \theta},$$

人がはしごの上端に達するまで、はしごが滑ることはない。

2. そうでない場合には、はしごの途中まで登ったところで滑り出す。その限界位置を下端からの距離 x で表すと

$$x = \ell \left(2\mu(1 + \frac{M}{m}) \cot \theta - \frac{M}{m} \right)$$

である。

第8章 振動

8.1-1

【解答例】

(a) 4倍 (b) 2倍 (c) 2倍 (d) 変わらず

【解説】

それぞれ、式(8.9)、式(8.6)の1階微分と2階微分、式(8.4)の下の説明にある ω_0 の式において、 a を2倍にした時どうなるかをみればよい。

【問題のねらい】

単振動では、振幅と角振動数が重要な量である。それぞれは別のものであり、独立であることをしっかり認識できればよい。振幅と速度と加速度は比例関係にあり、運動エネルギーは速度の自乗で決まることを知っていればよい。

8.1-2

【解答例】

ピストンの位置を往復運動の中心を原点として x で表す。題意より、 x は単振動の式で、例えば

$$x = a \cos \omega t$$

で表せる。ここで a は振幅で $a = 0.05\text{m}$ と与えられている。 t は時間である。 ω は角振動数であり、題意から $\frac{\omega}{2\pi} = 3600\text{min}^{-1}$ と与えられている。

x の式から微分して速度と加速度はそれぞれ、

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t$$

が得られ、また、単位を換算して、

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3600}{60} s^{-1}$$

である。ピストンの速さの最大値と加速度の最大値はそれぞれ、数値を代入して次のように求まる。

$$|\dot{x}|_{\max} = a\omega = 0.05\text{m} \times 2\pi \times 60\text{s}^{-1} = 18.8\text{ m/s}$$

$$|\ddot{x}|_{\max} = a\omega^2 = 0.05\text{m} \times (2\pi \times 60\text{s}^{-1})^2 = 7.1 \times 10^3\text{m/s}^2$$

【解説】

調和振動の式において、変位・速度・加速度の大きさの最大値がどこに入っているかが分かればよい。

問題文ではピストンの質量が与えられているが、設問に答えるためには質量は不要である。質量が与えられているので、力を見積もることができる。

【問題のねらい】

自動車の中でピストンの運動はロッドによってクランクの回転運動とつながっている。このことから、問題ではピストンの往復運動を単振動になぞらえている。その速度と加速度を見積もって、問題に与えられた質量を用いて、働いている力を見積もって、身近ではあるがあまり知らない部分のことを推測してみる機会とする。

8.1-3

【解答例】

バネが4個並べて使われているが、重量を分散して担うので変位は1個だけの時の4分の1になる。したがってばね定数が4倍の1個のばねと同じ働きをする。ばね定数は $k = 20000 \times 4\text{N/m} = 80000\text{N/m}$ である。自動車の揺れを決める質量は自動車と人間の質量の和であるから質量は $m = (1200+240)\text{kg} = 1440\text{kg}$ である。

(a) 段差を超える瞬間の状況は分からないので超えた後、単振動をする体系が固有振動数で振動する場合になぞらえて自動車の振動数を求める。角振動数 ω_0 を与える公式と、振動数 ν と角振動数の関係を用いて

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{80000\text{N/m}}{1440\text{kg}}} = 1.19\text{s}^{-1}$$

(b) 1回の振動にかかる時間は振動の周期 $T = 1/\nu$ であるから、2回の振動にかかる時間は、
$$\frac{2}{\nu} = 1.68\text{s}$$

である。

【解説】

複数のバネが用いられた場合直列と並列ではその結果は異なる。並列の場合にはバネの強さが個数倍になることに注意する。質量については、乗っている人数が多いほうが揺れ方ががゆっくりである。これは経験していることであろう。

【問題のねらい】

身の周りに単振動の公式を使って数値を見積もってみることができる例があれば、公式を生きたものと感ずることができよう。

8.1-4(a)

【解答例】

静止しているときは重りに働く重力とバネの力が釣りあうので、バネの自然長を ℓ_0 とおくと、

$$mg = k(\ell - \ell_0),$$

が成り立ち、よって求めるバネの長さは

$$\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

バネの自然長の時の下端の位置から下向きに測った重りの位置を x とすると、バネの伸びは x であるから、バネの力は下向きを正として $-kx$ である。したがって、重力も含めて重りの運動方程式は、

$$m\ddot{x} = mg - kx$$

である。右辺は、調和振動子の運動方程式の右辺とは少し異なるが、 $-k(x - mg/k)$ と書き換えると、座標 x の代わりに $u = x - \frac{mg}{k}$ に対する方程式になることに気づく。 $\ddot{u} = \ddot{x}$ であることに注意すると

$$m\ddot{u} = -ku$$

が得られ、これは調和振動子の運動方程式である。したがって、角振動数 ω は次である：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

【解説】

重りが静止しているので、重りに働く重力（下向きに mg ）とバネが自然長 ℓ_0 から伸びて長さ ℓ になった時にバネが上向きに引く力（上向きに $k(\ell - \ell_0)$ ）がつりあっている。

振動を始めた重りは、重力とバネの力が釣り合う点つまり平衡位置を原点として下向きにとった座標 u を使うと、復元力が $-ku$ であるので、その運動は調和振動である。

重力のもとでバネにつるした物体の振動の固有角振動数は、重力が働かない状況でそのバネに結んだ物体の調和振動子と同じであることが分った。

【問題のねらい】

調和振動子は、場所に依らない一定の力が働いても固有角振動数には影響しないこと、がその特徴である。このことを知識として得てもよいが、これを順を踏んで説明することができる力を身につけることは、いっそう重要である。

8.1-4(b)

【解答例】

図 8.5(a) のように配置した2個のバネは、それぞれの力の合力が重りに働くから、それぞれが単独で重りに力を及ぼすことに比べて半分伸びで済む。（全体として）力が同じで（共通に）伸びが1/2であるから、ばね定数は単独のバネの2倍である。つり合いの点の周りでの上下振動は調和振動であり、本問 (a) の結果の式で k とあるところを $2k$ とすればよい。よって求める角振動数 ω は：

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

次に、図 8.5(b) のように配置した2個のバネにはそれぞれに1個で重りを支えるときと同じ力が働く。それは、

(i) 下のバネは重りに働く下向きの重力を支えるため、重りに同じ力を上向きに及ぼす、

(ii) そのために下のバネは伸びて上のバネにも下向きの力を及ぼす、

(iii) 上のバネは下から引かれる力を支えるため伸びて下のバネに上向きの力を及ぼす、

からである。したがって各々のバネの伸びは1つのバネで重りを支える場合と同じであり、全体としての伸びは単独の場合に比べると2倍の伸びである。力は同じで伸びが2倍だから、つながったバネ全体でのバネ定数は単独のバネの1/2である。つり合いの点の周りでの上下振動は調和振動であり、本問 (a) の結果の式で k とあるところを $k/2$ とすればよい。よって求める角振動数 ω は：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

【解説】

図 8.5(a) の場合では問題 8.1-3 で行った4個のバネについての考察を2個のバネについて行い、その結果を本問の (a) の解答に利用すればよい。図 8.5(b) の場合には新しく説明を考える必要がある。

【問題のねらい】

同じ長さ同じ強さのバネを縦につないだり、横に並べたりして、結果としてどのようなバネを使ったことに相当するかを考えるためには、重りを下げてその伸びを見ることが有効である。このような考察をする習慣が身につくとよい。

8.2-1

【解答例】

一般解の式 (8.29) とその微分を記すと、

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 \exp [-(\lambda - \kappa)t] + c_2 \exp [-(\lambda + \kappa)t] \\ \dot{x}(t) &= -(\lambda - \kappa)c_1 \exp [-(\lambda - \kappa)t] - (\lambda + \kappa)c_2 \exp [-(\lambda + \kappa)t]\end{aligned}$$

となる。 $x(0) = 0$ と $\dot{x}(0) = v_0$ から、それぞれ次が得られる。

$$c_1 + c_2 = 0, \quad -(\lambda - \kappa)c_1 - (\lambda + \kappa)c_2 = v_0$$

これらを c_1, c_2 について解くと

$$c_1 = \frac{v_0}{2\kappa}, \quad c_2 = -\frac{v_0}{2\kappa},$$

であり、よって

$$x(t) = \frac{v_0}{2\kappa} e^{-\lambda t} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t})$$

である。このことから次に注意する：

$$x(t) \geq 0 \quad (\text{等号は } t = 0 \text{ のとき}).$$

この式は、 t とともに指数関数的に単調に減少する $e^{-\lambda t}$ と、 $t = 0$ で 0 であって $t > 0$ で単調に増大する $e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}$ の積であるが、 $\lambda > \kappa$ であることからその積は t が無限に増加するとき 0 に収束することがわかる。よって

$x(t)$ は $t = 0$ で 0 から始まり、
増大して極大を経て、
指数関数的に減少する

本文の図 8.6(b) の破線のグラフのふるまいをすることがわかった。

なお、極大となる時刻を t_0 とすると、 $\dot{x}(t_0) = 0$ であるので、上の $\dot{x}(t)$ の式に上で求めた c_1, c_2 を代入して方程式 $\dot{x}(t_0) = 0$ を解いて、

$$t_0 = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\lambda + \kappa}{\lambda - \kappa}$$

が得られる。したがってグラフで極大を与える横軸の値は $\omega_0 t_0 / 2\pi$ であり、ここに $\lambda = 1.5\omega_0$ および、 $\kappa = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ にこれを代入して得られた $\kappa = \omega_0 \sqrt{1.5^2 - 1}$ を用いると、極大値は

$$\frac{\omega_0 t_0}{2\pi} = 0.14$$

のときである。

8.2-2

【解答例】

まず、バネ定数 k を与えられた条件から求める。重りの質量を m 、バネの伸びを a 、重力加速度を g とすると、つり合っているとき $mg = ka$ が成り立つ。 $m = 0.10 \text{ kg}$ 、 $a = 0.05 \text{ m}$ 、 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ を代入して計算し、次のように求める：

$$k = \frac{mg}{a} = \frac{0.10 \text{ kg} \times 9.80 \text{ m/s}^2}{0.05 \text{ m}} = 19.6 \text{ kg/s}^2 = 19.6 \text{ N/m}.$$

(a) 1 分後に振幅が半分になるので、減衰振動の式の指数関数因数 $e^{-\lambda t}$ が $t = 60 \text{ s}$ に $1/2$ になればよい。方程式

$$e^{-\lambda \times 60 \text{ s}} = \frac{1}{2}$$

を解いて計算すると、

$$\lambda = -\frac{1}{60 \text{ s}} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{60 \text{ s}} \ln 2 = 0.0116 \text{ s}^{-1} \quad (45)$$

を得て、さらに $\lambda = \gamma/2m$ であることから、 γ は次のように求まる：

$$\gamma = 2m\lambda = \frac{2 \times 0.10 \text{ kg}}{60 \text{ s}} \ln 2 = 2.3 \times 10^{-3} \text{ kg/s} = 2.3 \times 10^{-3} \text{ N s/m}.$$

(b) ここまでで学んだように、抵抗力の係数 γ の大きさによって運動は異なり、重りの変位 $x(t)$ の式は異なる。問題文には振動するとあるから、抵抗が小さい場合の運動であると考えられる。それを確かめるため減衰の係数 λ と減衰がないとした場合の固有角振動数 ω_0 を比較する。題意より、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19.6 \text{ kg/s}^2}{0.10 \text{ kg}}} = 14 \text{ s}^{-1}. \quad (46)$$

本問 (a) で求めたように $\lambda = 0.0116 \text{ s}^{-1}$ であるから、これは $\lambda < \omega_0$ を満たし、よって運動は減衰振動である。

変位 $x(t)$ が満たすべき微分方程式は、重力が x を増す向きに作用しているので

$$\ddot{x} - 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = g$$

である。ここで、最初に見たように $ka = mg$ であり、また $k = m\omega_0^2$ であることから、右辺を $g = \omega_0^2 a$ と書くことができる。よって、 y を次のように定義して、その従う運動方程式を求めると次のようになる：

$$y = x - a \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} - 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (47)$$

これは、式 (8.25) の減衰振動の運動方程式であり、その解は一般に

$$y = e^{-\lambda t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad \text{ただし} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2},$$

と表され、 c_1, c_2 は任意定数である。与えられた初期条件

$$t = 0 \text{ で } y = -a, \dot{y} = 0$$

を用いると、少しの計算で

$$c_1 = -a, \quad c_2 = -\frac{\lambda}{\omega} a$$

が得られる。 $y(t)$ が求まったことで、式 (47) から $x(t)$ は次の式で表される：

$$x = a(1 - e^{-\lambda t} (\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t)). \quad (48)$$

この式は求める問題の解として正確ではあるが、問題の冒頭に減衰の程度を表す具体的な数値が与えられている。それに基づく具体的な数値を与える式 (45) と式 (46) から、 $\lambda \ll \omega_0$ である。このことを考慮すれば、より現実的な近似解を最終的な答えとすべきである。よって式 (48) において $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \approx \omega_0 = 14 \text{ s}^{-1}$ 及び $\cos \omega t + (\lambda/\omega) \sin \omega t \approx \cos \omega t$ の近似をする。

したがって、求める重りの変位 x の時間変化を表す近似的な表式は以下のとおりである：

$$x = a(1 - e^{-\lambda t} \cos \omega t) \quad \text{ただし} \quad a = 0.05 \text{ m}, \lambda = 0.0116 \text{ s}^{-1}, \omega = 14 \text{ s}^{-1}.$$

8.2-3

【解答例】

まず動き出して最初に止まるまでについて考察する。次いでその後の運動についての考察をする。

(1) 最初の位置は $x = a$ である。

$a \leq \mu mg/k$ ならば、このとき $kx \leq \mu mg$ 、ばねの力が摩擦力を上回らず静止したままである。

$a > \mu mg/k$ ならば、負の向きに動き出す。逆向きに動摩擦力を受け次の運動方程式が成り立つ：

$$m\ddot{x} = -kx + \mu' mg.$$

この式の右辺を $-ky$ とする y を定義すると、 y についての単振動の運動方程式が得られる：

$$m\ddot{y} = -ky, \quad \text{ただし} \quad x = \frac{\mu' mg}{k} + y.$$

x の初期条件が $t = 0$ で $x = a, \dot{x} = 0$ であるから、 y の初期条件は $t = 0$ で $y = a - \mu' mg/k, \dot{y} = 0$ である。これを用いて解を求め、それを x の式に代入すると次を得る：

$$x = \frac{\mu' mg}{k} + \left(a - \frac{\mu' mg}{k}\right) \cos \omega t, \quad \text{ただし} \quad \omega^2 = k/m.$$

この解は $\dot{x} < 0$ である間有効である。 $\dot{x} = 0$ から止まる位置が求まり、そのとき $\cos \omega t = -1$ である。

(2) 初めて止まる位置は $x = -a + 2\mu' mg/k$ である。

$a \leq 2\mu' mg/k$ であるならば、止まる位置は $x \geq 0$ であり、このとき $a > \mu mg/k$ と $\mu' \leq \mu$ を用いると摩擦力 μmg がばねの力 kx に勝ることが分かる。物体はここで静止したままになる。

$2\mu' mg/k < a \leq \mu mg/k + 2\mu' mg/k$ ならば、 $a - 2\mu' mg/k \leq \mu mg/k$ であり、止まった位置で $k|x| \leq \mu mg$ となればばねの力が摩擦力に勝ることはなく物体は停止したままになる。

$a > \mu mg/k + 2\mu' mg/k$ ならば、正の向きに動き出す。逆向きに動摩擦力を受け、次が成り立つ：

$$m\ddot{x} = -kx - \mu' mg.$$

先と同様にして $x = -\mu' mg/k + y$ とし、動き出したとき $\cos(\omega t) = -1$ であることと、その時に $y = -a + 3\mu' mg/k$ であることから解が次のように求まる：

$$x = -\frac{\mu' mg}{k} + \left(a - \frac{3\mu' mg}{k}\right) \cos \omega t.$$

この解は $\dot{x} > 0$ である間有効である。 $\dot{x} = 0$ から止まる位置が求まり、そのとき $\cos \omega t = 1$ である。

(3) 2度目に止まる位置は $x = a - 4\mu' mg/k$ である。

$a \leq 4\mu' mg/k$ であるならば、このとき $x \leq 0$ であり、 $a > \mu mg/k + 2\mu' mg/k$ と $\mu' \leq \mu$ を用いると摩擦力 μmg がばねの力 $-kx$ に勝ることが分かる。物体はここで静止したままになる。

上記の (1) での考察と同様に、

$4\mu' mg/k < a \leq \mu mg/k + 4\mu' mg/k$ ならば、 $kx \leq \mu mg$ となって静止したままであり、

$a > \mu mg/k + 4\mu' mg/k$ ならば動き出す、ことが分かる。

以上のように、動き出す条件を求め方程式と解を求める手続きをくり返すと a についての場合分けを一般化できる。

$$a_n = \frac{(\mu + 2n\mu')mg}{k} \quad \text{ただし} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

とおくとき、与えられた a の値の範囲が

$$a_{n-1} < a \leq a_n, \quad \text{ただし} \quad a_{-1} = 0 \quad \text{とする,}$$

にあるならば、 n 回目 (0 回目を手を初めて離れたときとして) の停止の後、その場に静止し続ける。このときの静止位置 x_n は次のように求まる：

$$x_n = (-1)^n \left(a - \frac{2n\mu' mg}{k}\right).$$

8.2-4

【解答例】

方程式 $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ の与えられた初期条件を満たす解は、 $\lambda = \omega$ の時 $x = (a + (v + \lambda a)t)e^{-\lambda t}$ である。 $a > 0$, $v + \lambda a < 0$ とされているから、 $x(t)$ は初期値 $x(0) > 0$ から速度 $v < 0$ で減少し、一度だけ 0 になる。最小値をとった後、緩やかに増大して $x = 0$ に負側から徐々に近づく。

8.3-1

【解答例】

時間が十分に経過したのちの強制振動は本文中に記されたように $x = c \cos(\Omega t + \delta)$ で与えられ、その振幅は

$$c(\Omega) = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\lambda^2}}$$

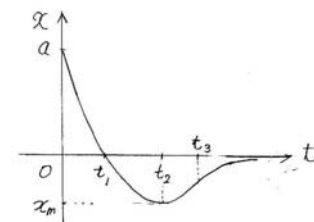
のように Ω の関数である。図 8.8 には、 λ/ω_0 が小さい場合には $c(\Omega)$ は極大をもつように描かれている。これは減衰が小さければある外部振動数の時に大きな振動が起こることを意味する。これを確かめて極大値を求めるためには $c'(\Omega)$ を計算してその符号を調べ、0 になる Ω を探せばよい。微分

グラフの概形を右図に示す。図の中で t_1, t_2, t_3 はそれぞれ x が 0 になる時刻、最小値を与える時刻、グラフの変曲点となる時刻を表し、 $x(t_1) = 0$, $\dot{x}(t_2) = 0$, $\ddot{x}(t_3) = 0$ から求められる。実際に計算して求めると以下のように表式が得られる：

$$t_1 = \frac{a}{|v| - \lambda a}, \quad t_2 = \frac{|v|}{\lambda(|v| - \lambda a)}, \quad t_3 = \frac{2|v| - \lambda a}{\lambda(|v| - \lambda a)}.$$

また、最小値は次の式で表される：

$$x_m = \left(a - \frac{|v|}{\lambda}\right) e^{-\lambda t_2}.$$



の計算から

$$c'(\Omega) = \frac{f}{m} \frac{2\Omega(\omega_0^2 - 2\lambda^2 - \Omega^2)}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\lambda^2)^{3/2}}$$

である。この分子は、もし問題に与えられたように $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$ であるならば Ω の大小で符号を変える。つまり、

$$c'(\Omega) > 0 \quad : \quad \Omega^2 < \omega_0^2 - 2\lambda^2 \text{ のとき}$$

$$c'(\Omega) < 0 \quad : \quad \Omega^2 > \omega_0^2 - 2\lambda^2 \text{ のとき}$$

である。よって、 $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ で $c(\Omega)$ は極大であり、最大値をとる。最大値は Ω の値を代入して、

$$c_{\max} = \frac{f}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

と求まる。

ところで、もしも問題に与えられた条件が満たされず、 $\omega_0^2 - 2\lambda^2 < 0$ であったならば、上記で常に $c'(\Omega) < 0$ であり、 $c(\Omega)$ は極大をもたず $\Omega = 0$ の時の値から Ω の増加とともに減少して $\Omega \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。

8.3-2

【解答例】

減衰のない強制振動で外力の振動数が固有振動数に等しい場合の運動方程式から、微分方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \omega_0 t$$

が導かれる。問題に与えられた $x(t)$ が特殊解であることは、代入して方程式を満たすことを確認して示すことができる。が、解を求める手続きの一部をみるために、関数は与えられるとして係数 a を未知定数と置いて求めてみる。

$$x = at \sin \omega_0 t$$

とおくと、

$$\dot{x} = a \sin \omega_0 t + a\omega_0 t \cos \omega_0 t,$$

$$\ddot{x} = 2a \cos \omega_0 t - a\omega_0^2 t \sin \omega_0 t$$

となるので、代入して

$$2a\omega_0 \cos \omega_0 t - a\omega_0^2 t \sin \omega_0 t + \omega_0^2 at \sin \omega_0 t = \frac{f}{m} \cos \omega_0 t$$

が得られる。これを満たす a を求めると、

$$a = \frac{f}{2m\omega_0}$$

が得られる。

【解説】

微分方程式の一般的な解法にしたがって解く Lagrange の定数変化法と呼ばれる方法がある。その方法では、外力がない方程式の解をもとに、その任意定数を未知関数に置き換える。外力がなければ

微分方程式は同次方程式（または斉次方程式）と呼ばれて、一般解は2階微分方程式の場合2つの任意定数を含む。今の場合の斉次方程式の一般解は、 $\sin \omega_0 t$ と $\cos \omega_0 t$ の1次結合である。外力がある場合には、以下のように、任意定数の代わりに t の未知関数を仮定して、解になるように未知関数を決める。2つの未知関数を $u_1(t), u_2(t)$ として、

$$x(t) = u_1(t) \cos \omega_0 t + u_2(t) \sin \omega_0 t$$

とおき、微分方程式を満たす条件を求める。まずこの $x(t)$ を微分方程式に代入すると、

$$\ddot{u}_1 \cos \omega_0 t + \ddot{u}_2 \sin \omega_0 t + 2\omega_0(-\dot{u}_1 \sin \omega_0 t + \dot{u}_2 \cos \omega_0 t) = \frac{f}{m} \cos \omega_0 t \quad (49)$$

を得る。ここで $u_1(t), u_2(t)$ に制限を加えて、

$$\dot{u}_1 \cos \omega_0 t + \dot{u}_2 \sin \omega_0 t = 0 \quad (50)$$

と仮定する。これを微分した式を用いて式 (49) の初めの2項を消去すると、結局

$$-\dot{u}_1 \sin \omega_0 t + \dot{u}_2 \cos \omega_0 t = \frac{f}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (51)$$

となる。式 (50), (51) は $u_1(t), u_2(t)$ に対する1階連立微分方程式である。これを解く計算は少し長くなり、途中で三角関数の和の公式も必要になるが、素直な計算であるのでここでは省略する。結果は、 c_1, c_2 を任意定数として

$$x(t) = \frac{f}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

である。もとの微分方程式における外力の項が特に今の式の場合には、式 (50) とは別の制限、例えば $u_1(t) = 0$ において $u_2(t)$ のみを求めることもできるが、式 (50) の仮定をすることは一般の外力に対しても使える方法であり、長い計算にはなるが試みる価値はある。

【問題のねらい】

本書の本文では減衰のない強制振動で外力の振動数が振動子の固有振動数に一致した場合の運動方程式の一般解を式 (8.45) に与えているが、なぜそうなるかの説明を省いた。これを補うために、確認することを促したものである。なお、物理学を学ぶ過程で、見かけの数式は運動のパラメータについて連続でないが現実は連続的である場合によく遭遇するが、今の場合には式 (8.44) は $\Omega \rightarrow \omega_0$ で発散していて、本問で確認した解とはつながらない。これは、減衰がごく小さいという極限と、 Ω が ω_0 にごく近いという極限の順序の問題を含むからである。本問は単に数学的な手続きの実行を求めているが、解くに際して物理的な考察と数学的な手続きの関係について考えるいい機会となるであろう。

8.3-3

【解答例】

(a) 式 (8.49) が方程式 (8.39) の解になるように定数 c_1, c_2 を求める計算を行う。式 (8.49) に与えられる $x(t)$ とその1階微分、2階微分を記すと、

$$x = c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t$$

$$\dot{x} = -\Omega c_1 \sin \Omega t + \Omega c_2 \cos \Omega t$$

$$\ddot{x} = -\Omega^2 c_1 \cos \Omega t - \Omega^2 c_2 \sin \Omega t$$

である。これを方程式 (8.39)

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = \frac{f}{m} \cos \Omega t$$

に代入した結果は

$$(-\Omega^2 c_1 + 2\lambda \Omega c_2 + \omega_0^2 c_1) \cos \Omega t + (-\Omega^2 c_2 - 2\lambda \Omega c_1 + \omega^2 c_2) \sin \Omega t = \frac{f}{m} \cos \Omega t$$

となる。この式が任意の時刻 t で成立するためには、両辺で $\cos \Omega t$ と $\sin \Omega t$ の係数がそれぞれで等しくなくてはならない。よって

$$(-\Omega^2 + \omega_0^2) c_1 + 2\lambda \Omega c_2 = \frac{f}{m}, \quad -2\lambda \Omega c_1 + (-\Omega^2 + \omega_0^2) c_2 = 0$$

が得られる。この c_1, c_2 についての連立方程式を解くと、

$$c_1 = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda \Omega)^2}, \quad c_2 = \frac{f}{m} \frac{2\lambda \Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda \Omega)^2}$$

と求まる。

(b) 小問 (a) の特殊解 $x = c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t$ が $c \cos(\omega t + \delta)$ と書きなおせるためには、

$$c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t = c \cos \delta \cos \Omega t - c \sin \delta \sin \Omega t$$

が成り立たなくてはならない。したがって、

$$c_1 = c \cos \delta, \quad c_2 = -c \sin \delta \quad \text{よって} \quad c_1^2 + c_2^2 = c^2, \quad \frac{c_2}{c_1} = -\tan \delta$$

であるので、小問 (a) の結果を用いて、

$$c^2 = \left(\frac{f}{m} \right)^2 \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda \Omega)^2}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda \Omega)^2)^2}$$

よって

$$c = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda \Omega)^2}}, \quad \tan \delta = -\frac{2\lambda \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

が得られた。これは式 (8.41) に一致する。

8.3-4

【解答例】

(a) 物体の変位を u としているので、またバネの伸びは u からバネの他端の変位 x_P を差し引く必要があり、バネから受ける力は $-k(u - x_P)$ である。与えられた x_P の式を代入して、運動方程式は、

$$m\ddot{u} = -ku + kA \cos \Omega t$$

となる。よって u の微分方程式として

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \frac{f}{m} \cos \Omega t \quad \text{ただし} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = kA$$

を得る。

(b) 方程式は減衰のない強制振動の微分方程式であり、本文で式 (8.44) を求めたのと同様にして、一般解は a, α を任意定数として

$$u = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$$

のように求められる。

(c) 与えられた初期条件を用いるため u と $\dot{u}$ の式を書く。上の小問 (b) で $\Omega = 2\omega_0$ を代入すると第2項の係数は $-\frac{f}{3m\omega_0^2}$ であるが、 f と ω_0 の定義を用いて書き換える。計算の結果

$$u(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha) - \frac{A}{3} \cos 2\omega_0 t, \quad \dot{u}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{2A}{3} \omega_0 \sin 2\omega_0 t$$

を得る。初期条件 $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0$ を使うと、

$$a \cos \alpha - A/3 = 0, \quad -a\omega_0 \sin \alpha = 0$$

よって、 $\alpha = 0, a = \frac{A}{3}$ が得られ、答えは

$$u(t) = \frac{A}{3} \cos \omega_0 t - \frac{A}{3} \cos 2\omega_0 t$$

となる。

グラフを描く際に、右辺は ω_0 の固有振動に2倍の速さのPの振動が同じ振幅で重なっていること、固有振動の山はPの振動で打ち消され、固有振動の谷はPの振動が重なって2倍になっていること、を考察しておく。グラフは図4に示す。ここで $T = 2\pi/\omega_0$ である。

【解説】

強制振動とは振動する外力を加えられた調和振動であると学んだが、外力ではなく拘束条件の振動が与えられた場合にも方程式が同じになることが分かった。共鳴条件が満たされない場合にもそ

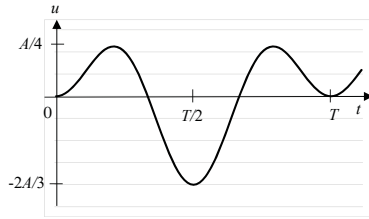


図 4: 固有振動数の 2 倍の振動数で支点を揺らせたときの単振動子の運動

れなりに振動が誘起されるので、式が与えられているとその程度を見積もることができる。

今の場合、外力の振動数 Ω が振動子の固有振動数 ω_0 とは離れているので強い共鳴はおこらず、与えられた P の振幅 A に対する物体の振幅 u の程度はさほどではないと予想されるが、数値は計算してみないと分からない。計算の結果、最大の変位は固有振動の谷の位置で、その絶対値は $2A/3$ であることが分かった。

【問題のねらい】

運動方程式は、与えられた条件を用いて書き下せば導くことができることを学び、その結果をすでに知っている微分方程式と関係づけることで問題の解決につながることを学ぶこと。共鳴について学んだので、実際に身近に起こりそうな状況を想定して、共鳴の程度の見積もりについて学ぶこと。

8.3-5

【解答例】

(a) 例題 8.1-2 では、振り子の振れ角が小さい時の近似として、重りの水平方向の変位 x に対する運動方程式 (8.20) を導いた。ここでは、支点 P が時間とともに変化するので、重りの水平方向の変位としては支点 P の x 座標をもとにした振り子の x 座標を用いるべきであり、問題に与えられたように $u = x - x_P$ が振り子としての変位である。例題 8.1-2 の解答で行った考察を繰り返すと、重りに働く力の x 方向の成分は、 $F_x = -mgu/\ell$ である。 $x_P = A \cos \Omega t$ を代入して、振れの小さい時の近似的な運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{\ell}(x - A \cos \Omega t)$$

である。これを x に対する微分方程式として書き直すと

$$\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = \frac{gA}{\ell} \cos \Omega t$$

となるが、 $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ 、 $f = mgA/\ell$ とおくと、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \Omega t$$

である。これは式 (8.39) の $\lambda = 0$ とした場合と同じであり、重りの位置座標は強制振動力をうける調和振動子の減衰がない場合の微分方程式にしたがうことが確かめられた。

設問にある ω に対応する量の答は、支点を動かす以前の振り子の振れが小さい場合の角振動数であり、 f に相当する量の答は、支点を揺る動きの振幅の振り子長に対する比率に応じた振り子に作用する重力の大きさの力であり、これが強制振動の強制力の役割を果たす。

(b) 小問 (a) の重りにその速度に比例する抵抗 $-\gamma\dot{x}$ が働くときの運動方程式から、本文 8.2 節の内容にならって $\lambda = \gamma/2m$ において次のように $x(t)$ の微分方程式が求まる；

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \Omega t.$$

問題文には P が固定されているとき、つまり $f = 0$ のときの減衰の程度が与えられているので、それを用いて λ を求めておく。そのため、 $f = 0$ の場合の方程式の一般解を書くと、式 (8.29) にならって a, α を任意定数として

$$x(t) = ae^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

である。5 回振動する間に経過する時間 t を周期 $2\pi/\omega_0$ の 5 倍とし、その時刻 t で減衰をあらわす因数の値が $1/2$ になることから、次のように求まる：

$$\exp\left(-\lambda \frac{2\pi}{\omega_0} \times 5\right) = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{\omega_0}{10\pi} \ln 2 = 0.022 \omega_0.$$

題意にしたがって支点 P を揺り動かした場合には、問題に指示されているように強制振動の振幅について本文中で求めた式を用いることにする。外力の角振動数が Ω のとき、十分に時間が経過したのちの重りの運動が、補足 8.3-1 の中で式 (8.47) に続くいくつかの式によって表された $x = c \cos \Omega t$ であり、その振幅は近似式 (8.43)

$$c \simeq \frac{f}{2m\omega_0 \sqrt{(\Omega - \omega_0)^2 + \lambda^2}}$$

である。 $\Omega = \omega_0$ だから、

$$c = \frac{f}{2m\omega_0 \lambda}$$

を得る。ここで小問 (a) での f の定義から $f = mgA/\ell = m\omega_0^2 A$ であることと、上で求めた今の場合の λ と ω_0 の比の値を用いて、

$$c = \frac{A\omega_0}{2\lambda} = \frac{5\pi}{\ln 2} A.$$

よって共鳴によって振れが増大する倍率つまり、重りの運動の振幅の支点の振幅に対する比は、

$$\frac{c}{A} = \frac{5\pi}{\ln 2} = 23$$

と求まった。

【解説】

問題 8.3-4 と同じように支点が強制的に動かされたときに調和振動子の運動が強制振動であることを運動方程式を立てて確かめる問題である。本問ではさらに抵抗のある減衰振動でもある場合に、共鳴が起こって大きくなった振動の振幅を見積もることも求めている。

【問題のねらい】

振動現象は物理学においてのみならず、科学技術の多くの場面で見られ、重要である。その基本方程式だけではなく、現実には存在する減衰、それに対抗して振動を維持させるための外力、そのいずれも必要な概念であり、その両方を一度に取り入れながら課題に対応することにより、必要な方程式について考えて対応する姿勢と能力を育てる。

本文中では、本問のように強制振動で外部の力の振動数と振動子の固有振動数が一致した場合に、抵抗のない場合には別の解を求めたのに対して、抵抗のある場合には外部の力の振動数にかかわらず同じ一般解を使い、一致した場合にも問題なく解が求まっている。このように、理想的に抵抗がないとした場合には共鳴周波数における発散による強制振動の解の不連続が生じるが、現実には存在する抵抗のおかげで連続性が回復しているといえる。したがって、本問ではこのようなことを認識するいい機会を与えているといえる。

8.4-1

【解答例】

(a) 質点 1 の変位を x_1 、横棒の変位を x_0 としているので、質点 1 のバネの伸びは $x_1 - x_0$ であり、バネが質点 1 に作用する力は変位の向きを正として $-k(x_1 - x_0)$ である。同様に質点 2 についても変位と力が分かるので、質点のそれぞれのしたがう運動方程式は以下通りである：

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_0), \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_0). \quad (52)$$

(b) 横棒の質量が 0 であるから横棒に作用するバネの力がつり合っていないとてはならない。天井のバネが横棒に作用する力は変位の向きを正として $-\lambda x_0$ であり、質点のバネがそれぞれ横棒に作用する力は $k(x_1 - x_0)$ 、 $k(x_2 - x_0)$ であるから、つり合いの条件式は

$$0 = -\lambda x_0 + k(x_1 - x_0) + k(x_2 - x_0)$$

であり、これより次の関係式が導ける：

$$x_0 = \frac{k}{2k + \lambda}(x_1 + x_2) \quad (53)$$

(c) 2つの質点の座標を用いて座標 x , X を次のようにおく：

$$x = x_1 - x_2, \quad X = x_1 + x_2. \quad (54)$$

これにより、式 (52) の2式の差から次が導かれる：

$$m\ddot{x} = -kx \quad (55)$$

また、式 (52) の2式の和から

$$m\ddot{X} = -k(X - 2x_0), \Rightarrow m\ddot{X} = -\frac{k\lambda}{2k + \lambda}X \quad (56)$$

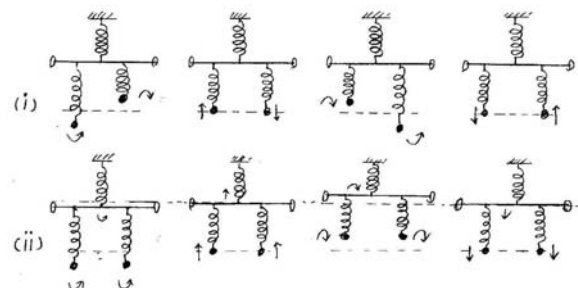
が導かれる。ここで x_0 に式 (53) を代入した。

これらの運動方程式から x と X は基準座標であり、基準振動数はそれぞれ次のとおりである：

$$x: \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (X = 0 \text{ のとき } x_1 = -x_2)$$

$$X: \omega_1 = \sqrt{\frac{k\lambda}{m(2k + \lambda)}} \quad (x = 0 \text{ のとき } x_1 = x_2).$$

(d) 下図の (i) に x の、また (ii) に X の振動を示す。左から右に向かって順次 $1/4$ 周期ずつの質点の位置を示し、矢印で運動の向きを表している。曲がった矢印はその時に運動の向きが変わることを表す。(i) では横棒は動かず、2つの質点が逆位相で振動する。(ii) では2つの質点は高さをそろえて同じ位相で振動し、それによって横棒も同じ位相で振動する。



【解説】

2つの基準振動数の大小関係は $\omega_0 > \omega_1$ である。2つの質点の振動が逆位相の場合に大きな角振動数になることは、図 8.11 と図 8.12 に示した例と同じである。が、理由は異なる。今の場合に同位相で振動するほうが角振動数が小さい理由は、横棒も同じ位相で揺れるため横棒が静止していた時に比べて質点のばねの力が弱まるからである。

8.4-2

【解答例】

(a) 変位を角度を用いて表すと：

$$x_1 = a\theta + \ell\varphi_1, \quad x_2 = a\theta + \ell\varphi_2.$$

ここで揺れが小さいとして $\sin\theta \approx \theta$ などの近似をした。

振り子1に作用する重力の φ_1 方向への成分は $-mg \sin\varphi_1$ である。これを $-mg\varphi_1$ で近似する。これと垂直の向きの成分は糸の張力とつり合う。振り子2についても同様であり、したがってそれぞれ

のしたがう運動方程式は以下になる：

$$m(a\ddot{\theta} + \ell\ddot{\varphi}_1) = -mg\varphi_1, \quad m(a\ddot{\theta} + \ell\ddot{\varphi}_2) = -mg\varphi_2. \quad (57)$$

(b) 張力 T は変位の1次微小量の範囲でひもによらず等しく、振り子に作用する重力で与えられ、

$$T = mg$$

である。横棒が受ける横向きの力は、天井のひもが棒の両端で作用する張力の θ 方向の成分 $-T\theta \times 2$ と、振り子のひもが棒の両端で作用する張力の θ 方向の成分 $T\varphi_1 + T\varphi_2$ である。横棒の質量は0であるからこれらの力はつり合い、次が成りたつ：

$$-2mg\theta + mg\varphi_1 + mg\varphi_2 = 0, \Rightarrow \theta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \quad (58)$$

(c) $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ と θ の方程式を立てる。式 (57) の2式の差から次が導かれる：

$$m\ell\ddot{\varphi} = -mg\varphi. \quad (59)$$

また、式 (57) の2式の和から次が導かれる：

$$m(a + \ell)\ddot{\theta} = -mg\theta. \quad (60)$$

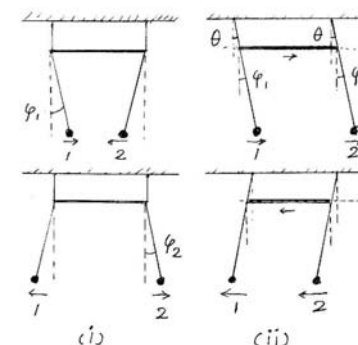
これらの運動方程式から φ と θ は基準座標であり、基準振動数はそれぞれ

$$\varphi: \omega_0 = \sqrt{g/\ell}, \quad (\theta = 0 \text{ のとき } \varphi_1 = -\varphi_2)$$

$$\theta: \omega_1 = \sqrt{g/(a + \ell)} \quad (\varphi = 0 \text{ のとき } \varphi_1 = \varphi_2)$$

である。

(d) 右図で、(i) に基準座標 φ の振動を示す。横棒は動かず2つのおもりが逆向きに振れる。矢印は質点の速度の向きを表す。また、(ii) に基準座標 θ の振動を示す。2つのおもりの変位がそろっていて、並んで振動する。 $\varphi_1 = \varphi_2$ であり、したがって $\theta = \varphi_1 = \varphi_2$ であるから、天井のひもと重りのひもは同じ1本の直線上にあるように見える。



【解説】

基準振動数の2つを比較すると $\omega_0 > \omega_1$ である。2つの振り子の振動が逆位相の場合に大きな角振動数になることは、先の問題 8.4-1 と同じである。理由は、今の例では、横棒が動かないときにはひもの長さの短い振り子として、同位相で振動する場合の長いひもの振り子よりも大きな角振動数を持つからである。

第9章 加速している座標系

9.1-1

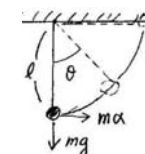
【解答例】

静止した座標系で見る。電車が減速して停止するまで、減速の加速度が一定であり、停止までの時間が τ 、初めの速さが v_0 であるから、加速度の大きさ α は

$$\alpha = \frac{v_0}{\tau}$$

である。

次に電車で固定した座標系で考える。この座標系は負の加速度で加速しているから、前方に向かって見かけの力が作用する。重りには鉛直下向きに大きさ mg の重力と、水平前向きに大きさ $m\alpha$ の見



かけの力が作用する。これを図に示す。ここではひもの長さを ℓ とする。図に示すように重りの振れ角を θ で表す。

いま、 τ が十分小さく、したがって α が大きく、進行前きの力が大きく、重力の働きに勝って重りが天井に達したと仮定する。 $\theta = 0$ から $\theta = \pi/2$ に至るまでに重力が重りに対してなした仕事 W_1 は、

$$W_1 = -mg\ell$$

である。その間に見かけの力が重りに対してなした仕事 W_2 は

$$W_2 = ma\ell$$

である。

仕事・エネルギーの定理により、 $W_1 + W_2$ は重りの運動エネルギーの増加になる。初めに重りは静止していたから、 $W_1 + W_2$ は重りが天井に達したときの運動エネルギーである。したがって、 $W_1 + W_2 \geq 0$ である。よって $\alpha - g \geq 0$ である。

$W_1 + W_2 = 0$ となるとき加速度 α の値を α_c と記すと $\alpha_c = g$ である。このときの τ の値を τ_c と記すと、 $v_0/\tau_c = g$ である。もし $\tau > \tau_c$ であれば $\alpha < g \Rightarrow W_1 + W_2 < 0$ となり、仮定に反する。

これにより、電車が停車したときにちょうど重りが天井に達することができる限界としての τ の値 τ_c が次のように求まった：

$$\tau_c = \frac{v_0}{g}.$$

【解説】

上記の解答例では、運動方程式を使わず、仕事・エネルギーの定理によって天井に到達したときの運動エネルギーで判定した。詳しく様子を見るために、途中の速度の変化を求める。

電車に固定した座標系で考える。重りが角度 θ まで振れたときまでに、重力と見かけの力それぞれによってなされた仕事は次のように求められ、仕事・エネルギーの定理によってその時のおもりの速さ v が求められる：

1. 重力は保存力であるから重力のなす仕事はポテンシャルの符号を変えたもので与えられる。重力のポテンシャルは高さのみで決まる。初めの位置からの高さは $\ell(1 - \cos \theta)$ であることから、重力のなした仕事は：

$$W_1(\theta) = -mg\ell(1 - \cos \theta).$$

2. 見かけの力は進行方向を向いていて、時間場所に依らず一定であるから、重力と同じように扱うことができ、初めの位置から進行方向に向かっての水平移動距離は $\ell \sin \theta$ であることから、重力の mg の代わりに $m\alpha$ を用いて、見かけの力のなした仕事は：

$$W_2(\theta) = ma\ell \sin \theta.$$

3. おもりが初めには静止していたから、仕事・エネルギーの定理 $W_1 + W_2 = mv^2/2$ により、

$$-mg\ell(1 - \cos \theta) + ma\ell \sin \theta = \frac{1}{2}mv^2$$

が成り立つ。これは、位置 θ における重りの速さを与える式である。この式を用いて、 v が θ の関数としてどのようなものであるかを調べることができる。

4. 左辺は $\theta = 0$ で 0 であり、 θ とともに増大し、あるところで極大になり、その後減少することが示せる。極大値をとる θ の条件から

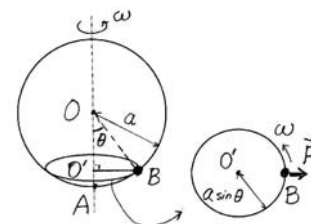
$$\tan \theta = \frac{\alpha}{g} \quad \text{で } v \text{ は最大}$$

が言える。 v が減少しても $v > 0$ である限り重りは動き続ける。 $v = 0$ になる θ が $0 < \theta < \pi/2$ の範囲で存在する条件は $\alpha < g$ でありその場合 $v = 0$ となる θ で θ の増加は終了し、おもりは落下を始める。もし $\alpha \geq g$ であるならば $v = 0$ に達する前に θ は $\pi/2$ に到達し、重りは天井に到達する。

9.2-1

【解答例】

図の左図は問題に与えられた図である。リングがその一つの直径を回転軸として回転できるようになっており、その回転軸が鉛直方向に向いているとしている。回転軸上の最下点を A とする。直線 $\overline{OA}$ が固定された回転軸である。問題の設定のように、ビーズ玉がリングに沿って動くことなく θ が一定のまま回転する場合を考える。ビーズの位置を B と記す。回転軸にビーズ玉の位置 B から下ろした垂線の足を O' とする。設定から、B は O' を中心とする水平な円周を軌道として円運動する。図の右図に B の O' を中心とする円運動の軌道を示す。円軌道の半径は $a \sin \theta$ である。



リングに固定した座標系で考える。ビーズ玉は静止しており、回転面に垂直に重力と回転面内で $\overrightarrow{O'B}$ の向きに見かけの力 $\mathbf{F}$ が作用して、これらが釣り合っている。ビーズ玉は質量が m 、半径が $a \sin \theta$ で角速度が ω の円運動をしているから、中心から離れる向きに大きさ $m(a \sin \theta)\omega^2$ の見かけの力(遠心力)を受ける。ビーズ玉の動くことができる方向はリングの B における接線の方向である。 θ の増す方向を正にとると、この方向の重力と見かけの力のそれぞれの成分は、

$$\text{重力: } -mg \sin \theta, \quad \text{見かけの力: } F = maw^2 \sin \theta \cos \theta$$

である。つり合いの条件は

$$(-mg + maw^2 \cos \theta) \sin \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{g}{aw^2}$$

である。この方程式は $|\cos \theta| \leq 1$ であることから、 $g > aw^2$ であるときには解を持たないが、 $g \leq aw^2$ であれば、つり合う場所がある。その場所に置かれたビーズ玉が動き出すことはない。この境界となる角速度を ω_c で表す。

リングが回転するときにビーズ玉がリングに対して動かないとともに回転することができるためには回転角速度は次の条件を満たさなければならない：

$$\omega \geq \omega_c \quad \text{ただし} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

なお、 $\omega < \omega_c$ の時には、どんな角度 θ であっても重力が見かけの力に勝るから、ビーズ玉はリングの最下点 A に落ちてしまう。

9.3-1

【解答例】

式 (9.17) の各関係式の両辺を微分する。

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega t - x' \omega \sin \omega t - \dot{y}' \sin \omega t - y' \omega \cos \omega t, \quad (9.61)$$

$$\dot{y} = \dot{x}' \sin \omega t + x' \omega \cos \omega t + \dot{y}' \cos \omega t - y' \omega \sin \omega t, \quad (9.62)$$

$$\dot{z} = \dot{z}'. \quad (9.63)$$

それぞれの右辺を整理すると式 (9.35), (9.36), (9.37) の右辺であることが分かる。

式 (9.25) の右辺第 2 項 $\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ は、 $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'}$ であることに注意して、またベクトル積の定義を用いて次のように書き直せる：

$$\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{e}_{z'} \times (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'}) = \omega (-y' \mathbf{e}_{x'} + x' \mathbf{e}_{y'}).$$

式 (9.25) の右辺の第 1 項に式 (9.22) の定義式を用い第 2 項に上記を用いて、式 (9.25) は次のように書き直せる：

$$\mathbf{v} = (\dot{x}' - \omega y') \mathbf{e}_{x'} + (\dot{y}' + \omega x') \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'}.$$

この右辺を式 (9.19) を用いて $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ で表し、左辺を $\dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z$ と表した上で、 x, y, z 成分をとりだすとそれは式 (9.35), (9.36), (9.37) である。このように、式 (9.35), (9.36), (9.37) は、運

動する質点の慣性系 S における速度 $\mathbf{v}$ と運動系 S' における速度 $\mathbf{v}'$ の関係をそれぞれの系における成分を用いて求めたものであり、既にベクトル表記で導いた式 (9.25) と一致することが確認できた。

【解説】

上で、座標成分の時間微分によって求めた速度の座標成分の間の関係式 (61), (62), (63) が式 (9.25) を表していることは以下のようにしても確かめられる。これらの式をまとめなすと、

$$\dot{x} = (\dot{x}' \cos \omega t - \dot{y}' \sin \omega t) - \omega(x' \sin \omega t + y' \cos \omega t) \Rightarrow v_x = v'_x - \omega y, \quad (64)$$

$$\dot{y} = (\dot{x}' \sin \omega t + \dot{y}' \cos \omega t) + \omega(x' \cos \omega t - y' \sin \omega t) \Rightarrow v_y = v'_y + \omega x, \quad (65)$$

$$\dot{z} = \dot{z}' \Rightarrow v_z = v'_z, \quad (66)$$

になる。ただし、ここで左辺において $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (v_x, v_y, v_z)$ を用い、右辺のはじめの括弧でまとめた項について $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = (v'_{x'}, v'_{y'}, v'_{z'})$ であることと

$$v'_x = v'_{x'} \cos \omega t - v'_{y'} \sin \omega t, \quad v'_y = v'_{x'} \sin \omega t + v'_{y'} \cos \omega t, \quad v'_z = v'_{z'}$$

という、式 (9.17) に相当する変換式を用いた。また、式 (64), (65) の右辺の 2 つ目の括弧でまとめた項については式 (9.17) を用いた。

導かれた式 (64), (65), (66) は式 (9.25) の x, y, z 座標成分である。

9.3-2

【解答例】

式 (9.35), (9.36), (9.37) の各関係式の両辺を微分する。

$$\ddot{x} = (\ddot{x}' - \omega \dot{y}') \cos \omega t - (\dot{x}' - \omega y') \omega \sin \omega t - (\ddot{y}' + \omega \dot{x}') \sin \omega t - (\dot{y}' + \omega x') \omega \cos \omega t, \quad (67)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{x}' - \omega \dot{y}') \sin \omega t + (\dot{x}' - \omega y') \omega \cos \omega t + (\ddot{y}' + \omega \dot{x}') \cos \omega t - (\dot{y}' + \omega x') \omega \sin \omega t, \quad (68)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}'. \quad (69)$$

それぞれの右辺を整理すると式 (9.38), (9.39), (9.40) の右辺であることが分かる。

式 (9.30) の右辺第 2 項 $2\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}'$ は $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'}$ であることに注意して、またベクトル積の定義を用いて次のように書き直せる：

$$2\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}' = 2\omega \mathbf{e}_{z'} \times (\dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'} + \dot{z}' \mathbf{e}_{z'}) = 2\omega (-\dot{y}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{x}' \mathbf{e}_{y'}).$$

同様に右辺第 3 項は

$$\omega^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = \omega^2 \mathbf{e}_{z'} \times (\dot{x}' \mathbf{e}_{y'} - \dot{y}' \mathbf{e}_{x'}) = -\omega^2 (\dot{x}' \mathbf{e}_{x'} + \dot{y}' \mathbf{e}_{y'})$$

となる。よって式 (9.30) は

$$\mathbf{a} = (\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x') \mathbf{e}_{x'} + (\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \mathbf{e}_{y'} + \ddot{z}' \mathbf{e}_{z'}$$

となる。この右辺に式 (9.19) を用いて $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ で表し、左辺を $\ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z$ と表した上で、 x, y, z 成分をとりだすとそれは式 (9.38), (9.39), (9.40) である。このように、式 (9.35), (9.36), (9.37) は、運動する質点の慣性系 S における加速度 $\mathbf{a}$ と運動系 S' における速度 $\mathbf{a}'$ の関係をそれぞれの系における成分を用いて求めたものであり、既にベクトル表記で導いた式 (9.30) と一致することが確認できた。

【解説】

上で、座標成分の時間微分によって求めた速度の座標成分の間の関係式 (67), (68), (69) が式 (9.30) を表していることは以下のようにしても確かめられる。これらの式をまとめなすと、

$$\ddot{x} = (\ddot{x}' \cos \omega t - \ddot{y}' \sin \omega t) - 2\omega(\dot{x}' \sin \omega t + \dot{y}' \cos \omega t) - \omega^2(x' \cos \omega t - y' \sin \omega t), \quad (70)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{x}' \sin \omega t + \ddot{y}' \cos \omega t) + 2\omega(\dot{x}' \cos \omega t - \dot{y}' \sin \omega t) - \omega^2(x' \sin \omega t + y' \cos \omega t), \quad (71)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}'. \quad (72)$$

になる。左辺において $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = (a_x, a_y, a_z)$ を用い、右辺の括弧でまとめた項について $(\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}') = (a'_{x'}, a'_{y'}, a'_{z'})$ および $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = (v'_{x'}, v'_{y'}, v'_{z'})$ であることと

$$a'_x = a'_{x'} \cos \omega t - a'_{y'} \sin \omega t, \quad a'_y = a'_{x'} \sin \omega t + a'_{y'} \cos \omega t, \quad a'_z = a'_{z'}$$

$$v'_x = v'_{x'} \cos \omega t - v'_{y'} \sin \omega t, \quad v'_y = v'_{x'} \sin \omega t + v'_{y'} \cos \omega t, \quad v'_z = v'_{z'}$$

のように (9.17) に相当する変換式を用い、右辺の 3 つ目の括弧でまとめた項について式 (9.17) を用いて、次を得る：

$$a_x = a'_x - 2\omega v'_{y'} - \omega^2 x, \quad (73)$$

$$a_y = a'_y + 2\omega v'_{x'} - \omega^2 y, \quad (74)$$

$$a_z = a'_{z'}. \quad (75)$$

導かれた式 (73), (74), (75) は式 (9.30) の x, y, z 座標成分である。

9.4-1

【解答方針】

例題 9.4-2 の解答のように運動方程式を立てる。地球の自転軸方向を表す単位ベクトル $\mathbf{u}$ を $x'y/z$ 座標系で表しておく。運動方程式は例題 9.4-2 の解答の式に対して、必要な箇所に ϕ を含む形になる：まず $\dot{v}_{x'}, \dot{v}_z$ の式の $\cos \alpha$ に $\cos \phi$ が加かる、次いで $\dot{v}_{y'}$ の式に $2m\omega v_z \cos \alpha \sin \phi$ の項が加わる、さらに $\dot{v}_z$ の式に $-2m\omega v_{y'} \cos \alpha \sin \phi$ の項が加わる。

【結果概略】

x' として式 (9.59) の x の表式で第 1 項の $\cos \alpha$ と第 2 項を展開した $\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha$ の $\cos \alpha$ の、どちらにも $\cos \phi$ が加かったもの、 y' として式 (9.58) の y の表式、 z として式 (9.58) の z の表式が得られる。ただし y' に対しては $v_0 = 0$ または $\theta = \pi/2$ の場合、それ以外で無視していた項 $-\frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \alpha \sin \phi + v_0 \omega t^2 \sin \theta \cos \alpha \sin \phi$ 、 z に対しては $v_0 = 0$ または $\theta = 0$ の場合に $-\omega v_0 t^2 \cos \alpha \cos \theta \sin \phi$ の項を加える。ここで $v_0 = 0$ の場合とは、発射するのではなく静かに落下させる場合を指す。

9.4-2

【解答方針】

(正誤表に訂正されたように真北に向かって投げたとする) 例題 9.4-2 の解答のようにして $\theta = 0$ の場合に $z = -\frac{1}{2}gt^2$ 、 $x = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \alpha + v_0 \omega t^2 \sin \alpha$ を得る。距離と初速から t を求め、 $g = 9.8\text{m/s}^2$ と式 (9.42) に与えられた ω 、 $\alpha = 35^\circ$ の正弦と余弦の値を用い、結果が確かめられる。

9.4-3

【解答方針】

図 9.11 の点 O を地上 h の場所にとり、例題 9.4-2 の解答のようにして $x = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \alpha$ および $z = -\frac{1}{2}gt^2$ を得る。赤道上であるから $\alpha = 0$ とする。落下地点は地上であるから $z = -h$ とする。真下から東に d ずれるとして $x = d$ とする。 t を消去して

$$d = \frac{2h}{3} \sqrt{\frac{2h\omega^2}{g}}.$$

得る。 h, ω, g の数値を代入すると d の近似値が得られ、 $d \approx 35\text{cm}$ が確かめられる。

【解説】

例題 9.4-2 の解法とは別に、次のように回答することもできる。赤道の円を含む平面は地球の回転軸 (地軸) に垂直である。この平面内で考える。コリオリ力は地軸に垂直であること、重力の向きは面内にあること、から問題の質点の運動はこの平面内に限られる、

この地点での東向きを回転系の x 軸方向にとる。地軸を z 軸にとるとそれはこの赤道上の地点では北向きである。またこの地点での鉛直下向きが回転系の y 軸方向である。

塔の頂上から落下を始めた質点は回転系で y 軸の正の向きの速度 $\mathbf{v}$ を持ち、加速する。したがって、コリオリの力 $\mathbf{F}_C = 2m\omega \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z$ は、 x 軸の正の向きである。つまり、コリオリ力は東向きに作用する。塔からの落下距離は短く、コリオリの力で速度が曲がる程度は小さいから、コリオリ力の向きを東向きとして落下地点のずれを求める。

落下後 t 秒後の y 方向への落下速度成分 v と落下距離 y は次で与えられる：

$$v = gt \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

よって、コリオリの力の大きさと、 x 方向への速度成分 v_x と移動距離 x は次のように与えられる：

$$F_C = 2m\omega gt \quad \Rightarrow \quad v_x = \omega gt^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\omega gt^3.$$

地上に達したとき $y = h$ であるから、そのとき $t = \sqrt{2h/g}$ であり、このとき $x = d$ である。よって、

$$d = \frac{2h\omega}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

となる。

9.4-4

【解答方針】

例題 9.4-2 の方法に従う。

【結果概略】 $y = 0$, $z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, $x = \frac{1}{3}\omega t^3 \cos \alpha - v_0 \omega t^2 \cos \alpha$ を得る。これは例題の $\theta = \pi/2$ の場合にあたる。 $t > 0$ で $z = 0$ となる時刻 t における x の値 d を求める。 $d = -\frac{4}{3}\omega v_0^3 \cos \alpha / g^2$.
 $\alpha = 0$, $v_0 = 100\text{m/s}$ と g および ω の数値を代入する。結果は、西向きに 1.0m のずれ、である。

9.5-1

【解答例】

この場合には慣性力が作用しないので、潮汐力は式 (9.64) の $\mathbf{F}$ で与えられる。この力は地球上のどこでも月の方を向くので、月に近い地点で満潮、遠い地点で干潮になる。

9.5-2

【結果概略】

$$F_{\text{td}}^{\text{太}} / F_{\text{td}}^{\text{月}} = (M_{\text{太}} / M_{\text{月}})(L_{\text{月}} / L_{\text{太}})^3 \approx 0.46.$$